

Hahn-Banach の定理

- X は実線形空間とします
- E は X の部分空間です
- $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ は半ノルム, つまり

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad x, y \in X$$

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \alpha > 0$$

をみたす

- 線形汎関数 $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ が

$$\varphi(x) \leq p(x), \quad x \in E$$

を満たす

このとき φ の拡張である線形汎関数 $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ で

$$\Phi(x) \leq p(x), \quad x \in X$$

となるものが存在する

証明の考え方について説明する。

- まづ $x_0 \notin E$ となる元 $x_0 \in X$ を選ぶ。
- E と x_0 によってできる X の部分空間 E_0 を作る。つまり E_0 は E より 1 次元大きい線形空間である。

- E_0 の元 y は、 E の元 x と x_0 を用いて

$$y = x + \alpha x_0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

と書ける。

- E_0 上の線形汎関数 ψ を

$$\psi(x) = \varphi(x) \quad x \in E$$

$$\psi(x_0) = \beta \in \mathbb{R}$$

と定義すると ψ は φ の拡張になっている。

- このとき

$$\psi(y) \leq p(y) \quad y \in E_0$$

が成立するようにするには β をどう定めると良いか？ が問題になる。

- 半ノルムの性質を用いると、その答えは次のようにすればよいことになる。

$$\begin{aligned} \sup\{\varphi(x) - p(x - x_0) \mid x \in E\} &\leq \beta \\ &\leq \inf\{p(x + x_0) - \varphi(x) \mid x \in E\} \end{aligned}$$

この議論によって1次元ずつ拡張していくと、そのうち E から X まで拡張していける感じがするのですが、ここの操作は無限の作業です。したがって Zorn's Lemma の出番になりますが、これは興味ある方だけに演習問題としましょう。

上の命題がハーンバナッハの定理の呼ばれる重要な定理です。

続く定理および2つの系は実ノルム空間に対する上の定理の応用です。

いままで複素ノルム空間を扱ってきたので、この場合はどうなるかが次の定理です。

定理に関する注意

- X は複素ノルム空間
- Y は X の部分空間、 X, Y ともに複素線形空間だが実線形空間と見ることができる。
- $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ は Y 上の複素線形汎関数、 φ の実部、虚部を考えると実数値実線形汎関数になる。

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \operatorname{Re}\varphi(x) + i\operatorname{Im}\varphi(x) \\ &= \psi_1(x) + i\psi_2(x)\end{aligned}$$

- 実部、虚部の実線形汎関数 ψ_1, ψ_2 は次の関係をもつ

$$\psi_1(ix) = -\psi_2(x), \quad \|\varphi\| = \|\psi_1\| = \|\psi_2\|$$

この関係式に注意すれば実線形汎関数 ψ_1 の拡張を考えればよい。

[以上]