平成１３年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数学Ｂ

平成１２年８月２３日（水）

１４時００分～１７時００分

「注意事項」

1. 問題は１６題であり、これらの中から任意に３題選んで解答すること。
（４題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は３枚あるので、そのすべてに科目名，専攻名と受験番号を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする問題番号を明記し、
１枚に１題だけを解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{B1}}$　G を群とする。H は G の部分群で，K は G の正規部分群とする。

(1) $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ は G の部分群であることを示せ。

(2) 同型定理 $HK/K \cong H/(H \cap K)$ を証明せよ。

次に，G の元 x, y に対し，関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Longleftrightarrow Hx \cap yK \neq \phi$$

と定義する。

(3) 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ。

(4) $x \sim y$ であるための必要十分条件は $xy^{-1} \in HK$ であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B2}}$　A は $\mathbb{R}$ 上 3 次元の多元環とする。すなわち A は $\mathbb{R}$ の必ずしも可換ではない拡大環で $\forall p \in \mathbb{R}, \forall a \in A$ について $pa = ap$ が成り立ち、$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての次元は 3 であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $a^2 = 1$ かつ $a \neq 1$ なる $a \in A$ に対して $(a+1)x = 1$ をみたす $x \in A$ は存在しないことを示せ。

(2) $1, a, b$ が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての A の基底となる様に $a, b \in A$ をとり $a^2 = p + qa + rb$ $(p, q, r \in \mathbb{R})$ と表わす。$r \neq 0$ ならば A は可換環となることを示せ。

(3) A は斜体でないことを示せ。

$\boxed{\textbf{B3}}$　次の各問いに答えよ。

(1) $\mathbb{F}_4$ は 4 個の元からなる体, $\mathbb{F}_8$ は 8 個の元からなる体とする。このとき, 体としての中への同型写像 $f\colon \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_8$ は存在するか。

(2) $\mathbb{F}_a, \mathbb{F}_b$ は各々 a 個, b 個の元からなる有限体とする。 もし, $b = a^e$ (e は自然数) と表せるならば, 体としての中への同型写像 $f\colon \mathbb{F}_a \to \mathbb{F}_b$ が存在することを証明せよ。

(3) F は $\mathbb{R}$ の部分体で, $\mathbb{R}$ は F の有限次ガロア拡大であるとする。このとき, $F = \mathbb{R}$ であることを証明せよ。

$\boxed{\textbf{B4}}$ $C : [\,0\,,\,\ell\,] \to \mathbb{R}^2$ を弧長を助変数とする C^∞ 級の平面曲線とする。C の点 $C(s)$ における曲率を $\kappa(s)$ で表す。もし C が閉じていれば，

$$\int_0^\ell \kappa(s)\,ds$$

は 2π の整数倍であることを証明せよ。

$\boxed{\textbf{B5}}$

$$\begin{aligned} S^2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}, \\ H &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=-1\} \end{aligned}$$

とおく．

(1) S^2 は 2 次元微分可能多様体となることを示せ。

(2) $S^2 \cup H$ は多様体でないことを示せ。

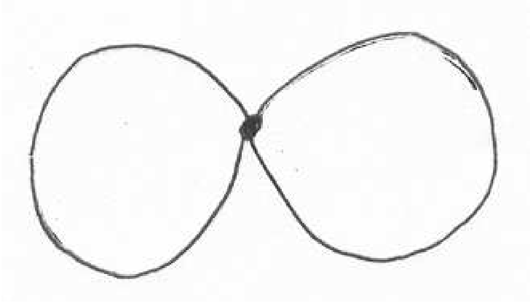
(3) $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ 上の同値関係 $\sim$ を，

$$(x,y,z) \sim (x',y',z') \iff \text{正の実数 } \lambda \text{ が存在して } x'=\lambda x,\ y'=\lambda y,\ z'=\lambda z$$

で定めるとき，商位相空間 $(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\})/\sim$ は多様体であることを示せ。

B6 次の各問いに答えよ。

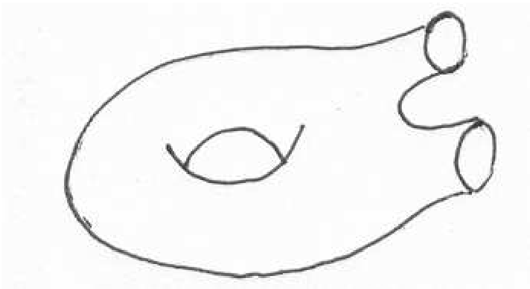
(1) ２つの S^1 のブーケ $S^1 \vee S^1$ を単体分割（三角形分割）せよ。（ただし，２つの位相空間 X と Y のブーケ $X \vee Y$ とは，X と Y の直和（disjoint union）において，X の１点と Y の１点を同一視して（くっつけて）得られる位相空間のことである。）



$S^1 \vee S^1$

(2) $S^1 \vee S^1$ のホモロジー群を求めよ。

(3) ２つ穴あきトーラス（２次元トーラス T^2 から，互いに交わらない２個の円板を取り去った図形）を X とするとき，X は何個の S^1 のブーケにホモトピー同値か。



２つ穴あきトーラス

(4) X のホモロジー群を求めよ。

B7

(1) 次の積分を求めよ。

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(1-az)}, \quad (0 < a < 1).$$

(2) (1) を用いて次の関係式を示せ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}, \quad (0 < a < 1).$$

$\boxed{\mathbf{B8}}$ 実数空間 $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度を m で表わし, $f \in L^1(\mathbb{R})$ とする。

(1) $\{E_n\}$ は可測集合列で, $m(E_n) \to 0$ とする。このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f dm = 0$$

であることを示せ。

(2) $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f dm$ は t の連続関数であること, および

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$$

であることを示せ。

$\boxed{\mathbf{B9}}$

(1) 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -x + 1$$

の原点($t = 0$ のとき $x = 0$)を通る解 $x(t)$ は $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ をみたすことを示しなさい。

(2) $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}^n$ は n 次元ユークリッド空間とする。$x \in \mathbb{R}^n$, f は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への連続関数とする。微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

の $\mathbb{R}$ 上有界な解 $x(t)$ で $\lim_{t\to\infty} x(t) = a \in \mathbb{R}^n$ をみたすものが存在するとき、$f(a) = 0$ であることを示しなさい。

$\boxed{\mathbf{B10}}$ T をヒルベルト空間 $\mathbb{H}$ 上の有界線形作用素とする。このとき

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$$

が存在し, この値は

$$\inf\{\|T^n\|^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

に等しいことを示せ。

（以下の手順を参考にしても良い。

(1) $a_n = \log\|T^n\|$ として, $a_{n+m} \le a_n + a_m$ を示す。

(2) $n > m$ のとき $n = mq + r$ $(0 \le r \le m-1)$ に注目して

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n}$$

を示す。

(3) (2) から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n}$$

を示す。)

$\boxed{\mathbf{B11}}$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。任意の集合 $D(\subset \Omega)$ に対して、外測度

$$P^o(D) = \inf_{D\subset A,\ A\in\mathcal{F}} P(A)$$

を定義する。このとき以下を示せ。

(1) $P^o(\phi) = 0.$

(2) (単調性) $D_1 \subset D_2 \Rightarrow P^o(D_1) \le P^o(D_2).$

(3) (劣加法性) $P^o(\bigcup_{k=1}^\infty D_k) \le \sum_{k=1}^\infty P^o(D_k).$

(4) $\mathcal{B} = \{B \subset \Omega \mid P^o(D) \ge P^o(D\cap B) + P^o(D \cap B^c)\ \ \text{for any}\ \ D \subset \Omega\}$

とおくと、 $\mathcal{B}$ は 加法族であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B12}}$ (1) 確率変数 (X, Y) が独立 $\Longrightarrow \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ を示せ。

(2) (1) の逆が成立しないような例を作れ。

(3) 確率変数 (X, Y) の分布が 2 次元正規分布であるとき、
確率変数 (X, Y) が独立 $\iff \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ を示せ。

(4) 確率変数 (X, Y) の分布が 2 次元正規分布であるとき、
確率変数 $aX + bY \quad (a, b \in \mathbb{R})$ の分布を求めよ。

$\boxed{\textbf{B13}}$ 確率ベクトル $\mathbf{X}$ は未知の母数 θ に依存する確率分布 P_θ に従うとする。$T = T(\mathbf{X})$ を θ の十分統計量とし，$S = S(\mathbf{X})$ を $g(\theta)$ の不偏推定量で $Var_\theta(S) < \infty$ なるものとする。ただし，θ は実数，g は実数値可測関数，$Var_\theta(S)$ は P_θ のもとでの S の分散である。

(1) $S^* = E_\theta(S|T)$ としたとき，S^* は $g(\theta)$ の不偏推定量となることを示せ。ただし，$E_\theta(S|T)$ は T が与えられたときの S の P_θ のもとでの条件付き期待値である。

(2) すべての θ に対して，

$$Var_\theta(S^*) \leq Var_\theta(S)$$

が成立し，さらに，上の不等式の等号成立条件は $P_\theta(S = S^*) = 1$ であることを示せ。

B14 正規表現

$$(a^* \mid b)ab$$

に合致する文字列を受理する有限オートマトンを作れ。ただし, 非決定性オートマトンを作成した場合には, それを記した上, 決定性オートマトンに変換せよ。

B15 まず, 論理体系 BCI を定義する。体系 BCI の論理式は論理記号 '→' と命題変数から作られた命題論理式である。体系 BCI の公理型は次の 3 つである。

$$\begin{array}{ll} (B) & (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \\ (C) & (\alpha \to \beta \to \gamma) \to \beta \to \alpha \to \gamma \\ (I) & \alpha \to \alpha \end{array}$$

ここで, 論理式の足りない括弧は右から補うものとする。すなわち, $\alpha \to \beta \to \gamma$ は $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ を表している。体系 BCI の推論規則は次の MP ただ 1 つである。

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \alpha}{\beta}$$

体系 BCI の証明図とは公理たちを上端とする木状の図形であり, 下端にある論理式がその証明図で証明されたことになる。上端にくる論理式として公理以外のものを認めたものを推論図ということにする。Π を体系 BCI の推論図とする。Π の上端に現れる公理でない論理式を全て並べたものが Γ で, 下端にある論理式が γ のとき, $\Pi(\Gamma \vdash \gamma)$ と書く。ここで, 公理でない論理式 α が上端にちょうど n 個現れるならば, Γ にはちょうど n 個の α が現れている。Γ の論理式の並べ方はどのように並べてもよい。

$\Pi(\Gamma \vdash \gamma)$ となる推論図 Π が存在するとき, $\Gamma \vdash \gamma$ とかく (この '$\vdash$' の意味は普通と異なっているので注意せよ)。$\Pi(\Gamma \vdash \gamma)$ のとき推論図 Π が $\Gamma \vdash \gamma$ を示すという。このとき, $\alpha, \Gamma \vdash \beta$ を示す推論図の長さについての帰納法を用いて, 次のことを証明せよ。

$\alpha, \Gamma \vdash \beta$ ならば $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ である。

B16 次のように scheme で書かれたプログラムがある。

```
(define (ev e a)
  (if (pair? e)
     (if (symbol? (car e))
        (cond
          ((eq? (car e) 'quote) e)
          ((memq (car e) '(car cdr cons)) (ap (car e) (evlis (cdr e) a) a))
          ((eq? (car e) 'if) (cons 'if (evlis (cdr e) a)))
          ((eq? (car e) 'lambda) (ap e (cadr e) a))
          (#t (cons (car e) (evlis (cdr e) a))) )
        (ap (car e) (evlis (cdr e) a) a)); end pair
     (if (symbol? e) (let ((x (assoc e a))) (if x (cdr x) e)) e)))

(define (ap f x a)
  (if (symbol? f) (cons f x)
    (let ((v (symblis x)) (e (ev (caddr f) (pairlis (cadr f) x a))))
         (if (null? v) e (list 'lambda v e)))))

(define (symblis x)
   (if (null? x) '()
       (if (symbol? (car x)) (cons (car x) (symblis (cdr x)))
           (symblis (cdr x)))))

(define (evlis e a)
  (if (null? e) '() (cons (ev (car e) a) (evlis (cdr e) a))))

(define (pairlis x y a)
   (if (null? x) a (cons (cons (car x) (car y)) (pairlis (cdr x) (cdr y) a))))
```

このプログラムについて、次の問いに答えよ。

(1) 関数 symblis について、`(symblis '(a (b c) d))` と `(symblis '(1 2 3))` の値をそれぞれ記せ。

(2) 次のように f, g, args, fa, ga が定義されている。このとき、fa, ga の値を記せ。

```
(define f '(lambda (x y) (cons x y)))
(define g '(lambda (x y) (lambda (x) (cons x y))))
(define args '('a 'b))
(define fa (cons f args))
(define ga (cons g args))
```

(3) 関数 ev について、`(ev fa '())` と `(ev ga '())` の値をそれぞれ記せ。