平成１１年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数学Ｂ

平成１０年９月９日（水）

１４時００分～１７時００分

「注意事項」

1. 問題は１３題であり、これらの中から <u>任意に３題選んで</u> 解答すること。
（４題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は３枚あるので、そのすべてに受験番号と氏名を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする <u>問題番号を明記</u> し、
<u>１枚に１題だけ</u> を解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

B1 p を素数とし，有限群 G の部分群 N は次の条件

> N は G の正規部分群で，かつ，位数 $|N|$ は p と素で，指数 $|G:N|$ は p のべきである

をみたしている。このとき，N は G の正規 p- 補群であるという。
P を G の Sylow p- 部分群であるとするとき，以下の問に答えよ。

(1) $G = NP$ を示せ。

(2) G の任意の部分群 H に対し，$H \cap N$ は H の正規 p- 補群であることを示せ。

(3) G の任意の p- 部分群 Q に対し，$C_G(Q) \supset N \cap N_G(Q)$ を示せ。

(4) $N_G(Z(P)) = C_G(Z(P))$ であることを示せ。

ただし，一般に群 X とその部分群 Y に対し，

$N_X(Y) = \{x \in X \mid x^{-1}Yx = Y\}$ （Y の正規化群）
$C_X(Y) = \{x \in X \mid x^{-1}yx = y(\forall y \in Y)\}$ （Y の中心化群）
$Z(Y) = \{z \in Y \mid z^{-1}yz = y(\forall y \in Y)\}$ （Y の中心）

である。

B2 $R = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$ ($\mathbb{Z}$ と $\sqrt[3]{5}$ を含む最小の環), $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ ($\mathbb{Q}$ と $\sqrt[3]{5}$ を含む最小の体) とする.

(1) $R/(2)$, $R/(\sqrt[3]{5}-1)$, $R/(2, \sqrt[3]{5}-1)$ はどのような環になるか構造を決定せよ. ただし, (x) は x で生成される R の単項イデアル xR, (x, y) はイデアル $xR + yR$ を表わす.

(2) R において既約元分解の一意性が成り立つかどうか (つまり R は UFD (素元分解整域) か否か) 判定せよ.

(3) F は $\mathbb{Q}$ のガロア拡大でないことを示せ. また F を含む最小の $\mathbb{Q}$ のガロア拡大体 K を求めよ. さらに, そのガロア群 $Gal(K/\mathbb{Q})$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{B3}}$ S を 3 次元 Euclid 空間 E^3 の滑らかな境界のない Compact 曲面とし、 O を E^3 の定点とする。 O から最も遠い S 上の点の 1 つを P とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は P における S の接平面 $\mathrm{T_pS}$ に垂直であることを示せ。

(2) P における S の Gauss 曲率 K(P) は正であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B4}}$ $\mathbf{R}^3$ 内の 3 つの図形 X, Y, Z を次のように定める。

$X = \{(x,y,0) \mid (x-1)^4 + y^4 = 1\}$,

Y は, X を y 軸のまわりに回転してできる図形,

Z は, Y の xy 平面による切口。

次の問いに答えよ。

(1) 図形 X のホモロジー群を求めよ。

(2) 図形 X が C^∞ 級の 1 次元多様体であることを示せ。

(3) 切口 Z のホモロジー群を求めよ。

(4) 回転体 Y のホモロジー群を求めよ。

$\boxed{\textbf{B5}}$

(1) 平面領域 D で定義された C^2- 級 (2 回連続微分可能ともいう) の実 2 変数関数 $u(x,y)$ は D の各点で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を満たすとき D で調和であるという。
複素平面の領域 Ω で定義された正則関数 $f(z)$ を実部、虚部に分解して

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (z = x+iy)$$

と書くとき、 $u(x,y)$ は Ω で調和であることを示せ。

(2) 単連結な平面領域 Ω で調和な関数 $u(x,y) = u(x+iy)$ は Ω におけるある正則関数 $f(z)$ の実部として表される (このことは証明不要)。 Ω の点 $(a,b) = a+ib$ と (a,b) を中心とする Ω 内の半径 r の円 $C = \{x+iy \mid x+iy = a+ib+re^{i\theta}\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ に対して

$$u(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+ib+re^{i\theta})d\theta$$

が成り立つことを、 $f(z)$ の性質を用いて証明せよ。

(3) $\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ が原点を除く全平面で調和となるように 1 変数関数 φ を定めよ。

B6 $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ とする。

(1) ほとんどすべての x に対して、関数 $y \mapsto f(x-y)g(y)$ はまた、$L_1(\mathbb{R})$ に属することを示せ。

(2) $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$

とおくと、 $||f * g||_1 \leqq ||f||_1 \cdot ||g||_1$ なることを示せ。

(3) $h \in L_1(\mathbb{R})$ のとき、$f * (g * h) = (f * g) * h$ を示せ。

B7 $L > 0$ を定数, $R = (-\infty, \infty)$ とする。

(1) スカラー同次線形微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = Lx$ の一般解を求めなさい。特に $t = \tau$ $(\tau \in R)$ のとき $x = 0$ を通る解は $x(t) \equiv 0$ であることを示しなさい。

(2) スカラー関数 $f(t, x) \in C(R \times R, R)$ が"リプシッツ定数を L としてリプシッツ条件を満たす"とはどのようなことか式で書きなさい。

(3) (2) のもとで, $(\tau, \xi) \in R \times R$ を任意に与えたとき方程式

$$\text{(E)} \qquad \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

の (τ, ξ) を通る解が 2 つあったとしてそれを $x_1(t), x_2(t)$ とする。$h(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$ とおくとき $h(t)$ の満たす微分不等式を与えなさい。さらに (1) の結果を参考にして $x_1(t) \equiv x_2(t)$、すなわち (E) の (τ, ξ) を通る解はただ一つであることを示しなさい。

B8 X を実ノルム空間, T は X から X への線形作用素とする.

(1) T が 0 で連続ならば, 任意の点 $x \in X$ で T は連続になることを示せ.

以下, 正の数 M が存在して

$$\|Tx\| \geq M\|x\| \quad x \in X$$

が成り立つものとする. このとき,

(2) T は one-to-one であることを示せ.

(3) T の値域が X で稠密ならば

$$ST = TS = id_X$$

を満たす連続な線形作用素 S がただ一つ存在することを示せ.

$\boxed{\textbf{B9}}$ 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数を X とし、
EX を P に対する X の期待値とする。

(1) g を $\mathbb{R}$ 上の非負偶関数で、$(0, \infty)$ 上で正かつ増大とする。
このとき、以下の式が成立することを示せ。

$$P\{|X| \geqq x\} \leqq \frac{Eg(X)}{g(x)} \quad \text{for any} \quad x > 0$$

(2) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列、$p \in (0, \infty)$ とする。
$E|X_n - X|^p \to 0$ as $n \to \infty$ のとき (p 次平均収束という)、
X_n は X に確率収束することを示せ。

(3) (2) の逆は成立しないことを、$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に確率収束するが、
p 次平均収束しない例を挙げて説明せよ。

$\boxed{\textbf{B10}}$ 規準正規分布 $N(0,1)$ からの標本を Z、
一般正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本を $X, X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。
ただし、Z の密度関数を $f_Z(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ とし、
Z の積率母関数を $M_Z(\vartheta) = \exp(\vartheta^2/2)$ とする。

(1) X の積率母関数を求めよ。

(2) $\overline{X}_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の分布を求めよ。

(3) $U := X_1 + X_2$、$V := X_1 - X_2$ は独立になることを証明せよ。

$\boxed{\textbf{B11}}$ 確率密度関数 $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$ $(x > 0\ ;\ \theta > 0)$ をもつ母集団から取られた大きさ n の無作為標本を $(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$ とする。またこの母集団分布の平均を μ, 分散を σ^2 とする。以下の問に答えよ。

(1) μ および σ^2 を、θ を用いて表せ。

(2) 母集団と標本の 1 次のモーメントを等しくおくことにより、θ に対するモーメント推定量を求めよ。

(3) μ に対する最尤推定量を求めよ。

(4) (3) で求めた推定量は、μ に対する不偏推定量の分散の下限を達成していることを示せ。
[ヒント] 一般に、$\tau(\theta)$ に対する不偏推定量 T の分散について、次の不等式が成立する。

$$Var[T] \geq \frac{\{\tau'(\theta)\}^2}{n\mathrm{E}[\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X;\theta)\}^2]}$$

B12 次の問いに答えよ。なお, 論理式の足りない括弧は右から補うものとする。すなわち, $\alpha \to \beta \to \gamma$ は $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ を表している。

(1) 論理式

$$\forall x(p(a) \to q(x) \to r) \to (\forall x\ p(x) \to q(b)) \to \forall x\ p(x) \to r$$

が古典述語論理の体系で証明できることを示せ。古典述語論理の体系は何を用いてもよいが, 用いた体系が何であるか書くこと。

(2) 論理式

$$\forall x \forall y(p(x) \to p(y))$$

が古典述語論理の体系で証明できないことを示せ.

(3) 論理式

$$\forall x \forall y \forall z(r(x,y) \to r(y,z) \to r(x,z)) \to \forall x \exists y\ r(x,y) \to \exists x\ r(x,x)$$

が古典述語論理の体系で証明できないことを示せ。

B13 次の Scheme のプログラムについて、以下の問に答えよ。

```
(define (str n)
  (if (odd? n) (cons n (lambda () (str (+ n 1))))
      (str (+ n 1))))

(define (prstr s)
  (if (pair? s) (prstrsub (car s) (cdr s))
      (prstr (s))))

(define (prstrsub n s)
  (print n)
  (prstr s))
```

(1) `(str 1)` および `((cdr (str 1)))` のそれぞれを評価した結果を求めよ。(closure の表記は適当に定めてよい。)

(2) `(prstr (str 1))` を評価すると数を出力し続けて停止しない。どのような数が出力されるか、理由と共に述べよ。