平成１５年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数学 A

平成１４年８月２１日（水）

９時００分～１２時００分

「注意事項」

1. 問題は８題であり、これらの中から任意に４題選んで解答すること。
（５題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は４枚あるので、そのすべてに科目名，専攻名と受験番号を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする問題番号を明記し、
１枚に１題だけを解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A1}}$ 4次元ベクトル空間 V の基底 v_1, v_2, v_3, v_4 を取り，

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w_1 &=& av_1 &-& v_2 &-& v_3 &+& v_4 \\ w_2 &=& -av_1 &+& 2v_2 &+& v_3 &-& v_4 \\ w_3 &=& av_1 &+& bv_2 &-& v_3 &+& 2v_4 \end{array}$$

とおく。w_1, w_2, w_3 が生成する部分空間を W とおく。

(1) 任意の a, b に対して w_1, w_2, w_3 は線形独立であることを示せ。

(2) $v_2, v_4 \in W$ を示し，v_2, v_4 を含む W の基底を一組求めよ。

(3) 線形写像 $f : V \to V$ を次によって定義する。

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} f(v_1) &=& & & v_2 &-& v_3 &+& v_4 \\ f(v_2) &=& & & v_2 & & &+& v_4 \\ f(v_3) &=& v_1 & & &+& 2v_3 & & \\ f(v_4) &=& bv_1 &+& v_2 &+& v_3 &+& v_4 \end{array}$$

このとき $f(W) \subset W$ が成り立つように a, b の値を定めよ。さらに，このとき f を W から W への線形変換と考えて，そのランクを求めよ。

$\boxed{\textbf{A2}}$ $\mathbb{R}^n$ には標準内積を入れて考える。次の問いに答えよ。

(1) A を実対称行列、λ, μ を A の相異なる固有値、$\boldsymbol{v}$ を λ に対する A の固有ベクトル、$\boldsymbol{w}$ を μ に対する A の固有ベクトルとするとき、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は直交することを示せ。

(2) $\mathbb{R}^3$ の線形変換 f を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x - 2y + 2z \\ -x + 2y + z \end{pmatrix}$$

で定めるとき、 f の固有値を求めよ。

(3) 上の f に対して、$\mathbb{R}^3$ の大きさ 1 のベクトル $\boldsymbol{x}$ のうち、$f(\boldsymbol{x})$ の大きさ $||f(\boldsymbol{x})||$ が最大となるものをすべて求めよ。それが最大となる理由も付すこと。

$\boxed{\textbf{A3}}$ 次の 2 つの定理 (1)(2) を証明せよ。

(1) 関数 $f(x),\ g(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で、開区間 (a,b) で微分可能とする。ただし (a,b) で $g'(x)\neq 0$ とする。 コーシーの平均値の定理：『 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ を満たす $c\in(a,b)$ が存在する。』 注：ロールの定理 または平均値の定理を証明なしで用いてもよいが、定理の内容を詳しく記述すること。

(2) $f(x),\ g(x)$ は $x=a$ の近くで連続、 a を除いて微分可能、$g'(x)\neq 0$ かつ $x\to a+0$ のとき $g(x)\to\infty$ とする。 ロピタルの定理：『極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\ (-\infty<\ell<\infty)$ が存在するならば、極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して ℓ に等しい。』

$\boxed{\textbf{A4}}$ 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続とする. 任意の $x,y\in[a,b]$ に対して

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$$

が成立するならば $f(x)$ は一次関数(つまり $f(x)=\alpha x+\beta,\ \ \alpha,\beta$ は定数) になることを示せ.

(2) $f(x),g(x)$ を実数 $\mathbb{R}$ 上の連続関数とする. 任意の実数 x に対して

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}g(t)dt=f(x)$$

が成立しているならば $f(x)$ は一次関数であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{A5}}$ 無限集合 X に

$$\{\, F \mid \ F \text{ は } X \text{ の部分集合で有限 } (\phi \text{ を含む}) \text{ かまたは } X \,\}$$

を閉集合族とする位相を定める。

(1) X の部分集合 M が X において稠密であるための必要十分条件を述べよ。

(2) f が X からある Hausdorff 空間への連続写像ならば $f(X)$ は一点から成ることを示せ。

$\boxed{\mathbf{A6}}$ 重さ 100 g の物体を測定するとき、1 回ごとの測定で生じる誤差の分布は平均 0, 分散 0.1 の正規分布 $N(0, 0.1)$ にしたがうとする。測定を n 回繰り返すとき、測定値の平均を $\bar{X}$ とする。以下の問いに答えよ。ただし、$Z \sim N(0,1)$ のとき、$P[Z > 1] = 0.1587, P[Z > 2] = 0.0228, P[Z > 3] = 0.0013, P[Z > 1.28] = 0.10, P[Z > 1.645] = 0.05, P[Z > 1.96] = 0.025$ として計算せよ。

(1) $n = 10$ のとき $\bar{X}$ の標本分布を求め、$|\bar{X} - 100| > 0.3$ となる確率を計算せよ。

(2) $n = 10$ のとき $\bar{X} = 100.2$ であったとする。母平均 μ に対する信頼度 95 パーセントの信頼区間を求めよ。ただし母分散 σ^2 は既知で、$\sigma^2 = 0.1$ とする。

(3) $|\bar{X} - 100| < 0.1$ となる確率を、0.9 以上にするためには、何回測定を繰り返せばよいか。

A7 以下の Pascal プログラム (の断片) について問に答えよ。

```
const MAXLEN = 100;
type string = array[1..MAXLEN] of char;
function palin(var s: string; i, j: integer): boolean;
  var p: boolean;
  begin
    p := true;
    while i < j do
      begin
        p := p and (s[i] = s[j]);
        i := i+1;   j := j−1
      end;
    palin := p
  end;
```

(1) palin は何を計算する関数であるか説明せよ。

(2) palin を再帰関数に書き直せ。ただし、何らかの意味で効率が向上していること。

A8 定数 size、型 string, tree, cell と 手続き printAtom が下のように定義あるいは宣言されているものとする。但し、string と printAtom の詳細は省略してある。

cell 型のデータには、tag の値に応じてそれぞれのフィールドが格納されているものとする。また、tree 型のデータは、tag が leaf あるいは null のとき葉を、node のときポインタが左右の部分木を指す二分木を表現しているものと考えることとする。尚、tag が null のとき、空 (empty) の木を表すものとする。

このとき、手続き printTree の頭書きを

procedure printTree(t : tree)

とし、渡された tree 型のデータ t が表現している木を、lisp のリスト表記 (list notation) の形で出力するように宣言せよ。

```
const size = 65535;
type  string = ···;
      tree = ↑cell;
      cell = record case tag : (node, leaf, null) of
                 node: (left, right: tree);
                 leaf: (pname: string);
                 null: (pnil: string)
             end;
procedure printAtom(s :string); ···
```

(注)lisp のリスト表記: A, B を木とするとき、これ等を左、右の部分木としてもつ二分木を $(A\ .\ B)$ と表現することにする。
$S_1, \cdots, S_n$ を木、t を葉とする。木が $(S_1\ .\ (S_2\ .\ (\cdots\ .\ (S_n\ .\ t))\cdots)$ であるとき、このリスト表記は、t が空木のとき、$(S_1 \cdots S_n)$ で、t が他の葉のとき、$(S_1 \cdots S_n\ .\ t)$ である。