平成１０年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

(数学・情報数理学専攻)

数学 A

平成９年９月１０日 (水)

９時００分 ~ １２時００分

「注意事項」

1. 問題は７題であり、これらの中から 任意に４題選んで 解答すること。
(５題以上解答することは認められない。)

2. 解答用紙は４枚あるので、そのすべてに受験番号と氏名を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする 問題番号を明記 し、
１枚に１題だけ を解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

A1　$\mathbb{R}$ を実数全体，n をある自然数，V を n 次元 $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間とする．また，f を V 上 $\mathbb{R}$- 双線形写像とする．つまり，

$$f(\alpha u+\beta v,w)=\alpha\cdot f(u,w)+\beta\cdot f(v,w)$$

$$f(u,\alpha v+\beta w)=\ \alpha\cdot f(u,v)+\beta\cdot f(u,w)$$

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad \forall u,v,w\in V$$

を満たしている．また，$\{v_1,\cdots,v_n\}$ を V の一つの $\mathbb{R}$- 基底とする．このとき，次の問い $(1),(2),(3)$ に答えよ．

(1)　$v\in V$ を一つ固定する．このとき

$$f(w,v)=0,\ \forall w\in V\quad\Longleftrightarrow\quad f(v_i,v)=0,\ \forall i=1,\cdots,n$$

を証明せよ．

(2)　各 $i,\ j$ に対して，$\alpha_{ij}=f(v_i,v_j),\ i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,n$ とおく．そして，α_{ij} が (i,j) 成分である n 次実正方行列を A とする．このとき，次の条件 $(\mathrm{a}),(\mathrm{b})$ が同値であることを証明せよ．

(a)　$v\in V$ が $f(v_i,v)=0,\forall i=1,\cdots,n$ をみたす　$\Rightarrow$　$v=0$

(b)　$\det A\neq 0$

(3)　次の条件 $(\mathrm{c}),(\mathrm{d})$ が同値であることを証明せよ．

(c)　$v\in V$ が $f(w,v)=0,\forall w\in V$ をみたす　$\Rightarrow$　$v=0$

(d)　$v\in V$ が $f(v,w)=0,\forall w\in V$ をみたす　$\Rightarrow$　$v=0$

A2　漸化式　$x_n+x_{n+1}=x_{n+2}$　を満たす複素数列 $\{x_n\}\ (n=1,2,3,\cdots)$ を考え、そのような数列の全体を V とする。通常の数列の定数倍、和を演算として V は複素ベクトル空間となる。以下の問いに答えよ。

(1)　V の 2 つの元

$$e_1=\{0,1,1,2,3,5\cdots\}$$
$$e_2=\{1,0,1,1,2,3\cdots\}$$

を定めると e_1,e_2 は V の基底になることを示せ。

(2)　写像 $f:V\longrightarrow V$ を

$$f:\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}\longmapsto\{x_2,x_3,x_4,\cdots,x_{n+1},\cdots\}$$

によって定めると線形写像となる (証明不要)。基底 $\{e_1,e_2\}$ に関する f の表現行列 (すなわち $(f(e_1),f(e_2))=(e_1,e_2)A$ となる行列 A) を求めよ。

(3)　f の固有値と、各々の固有値に対応する固有ベクトルとなる数列を求めよ (数列は一般項で示すこと)。

A3

(1) $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき， $f^{(n)}(0)$ の値を求めよ。

(2) $[a,\ b]$ で $f(x)$ を連続とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\{\int_a^b |f(x)|^n dx\}^{\frac{1}{n}} = \sup_{a\le x\le b}|f(x)|$$

であることを示せ。

A4

$s > 0$ に対し、

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$$

とおく。この時、次の問に答えよ。

(1). 広義積分 $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$ が収束することを示せ。

(2). 広義積分 $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ が収束することを示せ。

(3). $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ が成り立つことを示せ。

A5

(X, d) を距離空間とする。

(1) X から X への写像 f が連続であることを $\varepsilon - \delta$ を用いて述べよ。

(2) 次の 4 つの命題について、正しいものには証明を、正しくないものには反例をあげよ。

(a) f が X から X への連続写像ならば、
X の任意の開集合 U に対して $f(U)$ も開集合である。

(b) X から X への写像 f が任意の集合 A に対して $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ を満たすならば、
f は連続である。

(c) f が X から X への連続写像ならば、 X の任意のコンパクト集合 K に対して
$f(K)$ もコンパクトになる。

(d) f が X から X への連続写像ならば、 X の任意のコンパクト集合 K に対して
$f^{-1}(K)$ もコンパクトになる。

A6　確率変数 X の分布関数を $F(x) = P(X \leq x)$ とし, その密度関数 $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ をもつとする。実数 a に対して，絶対偏差の期待値

$$\phi(a) = E[\,|X - a|\,]$$

とおく。

(1) この $\phi(a)$ を最小にする値が存在することを示せ。

(2) (1) の値を a^* とするとき，$F(a^*)$ の値を求めよ。

A7　関数 power を次のような Pascal プログラム (の断片) によって定める。

```
function power(x, y: integer): integer;
  var w: integer;
  begin
    if y = 0 then power := 1
    else
      begin
        w := power(x, y div 2);
        if y mod 2 = 0 then power := w*w
        else power := w*w*x;
      end;
  end;
```

y の値が $m\,(\geq 0)$ のとき power(x, y) の計算中に使われるかけ算の回数を c_m とする。

(1) c_m と c_{2m} の関係および c_m と c_{2m+1} の関係を求めよ。

(2) $2^{c_m} \leq (m+1)^2$ が成り立つことを示せ。