第1章

複素関数論の基礎

はじめに

応用数学での御三家は、常微分方程式、複素関数論、フーリエ解析といわれています。これらは数学や物理、工学のさまざまな分野で使われています。ここでは複素関数論とフーリエ解析の入門を学びます。

複素数の歴史

負の数の平方根について、いささかなりとも言及している最も古い文献は、数学者で発明家のアレキサンドリアのヘロンによる『測量術』(Stereometrica) である。そこで彼は、現実には不可能なピラミッドの錐台について考察しているものの、計算を誤り、不可能であることを見逃している。

16 世紀にイタリアの数学者カルダノやボンベリによって三次方程式の解の公式が考察され、特に 3 つの異なる実数を解にもつ場合において解の公式を用いると、負の数の平方根をとることが必要になることが分かった。当時は、まだ、負の数でさえあまり認められておらず、回避しようと努力したが、それは不可能なことであった。17 世紀になりルネ・デカルトによって、虚 (imaginary) という言葉が用いられ、虚数と呼ばれるようになった。デカルトは作図の不可能性と結びつけて論じ、虚数に対して否定的な見方を強くさせた。その後、ウォリスにより幾何学的な解釈が試みられ、ヨハン・ベルヌーイやオイラー、ダランベールらにより、虚数を用いた解析学、物理学に関する研究が多くなされた。

複素平面の歴史は、1797 年にノルウェーの数学者カスパー・ベッセル (Casper Wessel) によって提出された論文に始まる。しかし、この論文はデンマーク語で書かれ、デンマーク以外では読まれずに 1895 年に発見されるまで日の目をみることはなかった。1806 年にジャン・ロバート・アルガン (Jean Robert Argand) によって出版された複素平面に関するパンフレットは、ルジャンドルを通して広まったものの、その後、特に進展は無く忘れられていった。

1814 年にコーシーが複素関数論を始め、複素数を変数に取る解析関数や複素積分が論じられるようになった。1831 年に、機は熟したとみたガウス

が、複素平面を論じ、複素平面はガウス平面として知られるようになった。ここに、虚数に対する否定的な視点は完全に取り除かれ、複素数が受け入れられていくようになる。実は、ガウスはベッセルより前の 1796 年には、ガウス平面の考えに到達していた。1799 年に提出されたガウスの学位論文は、今日、代数学の基本定理と呼ばれる定理の証明であり、複素数の重要な特徴付けを行うものだが、複素数の概念を表に出さずに巧妙に隠して論じている。

オーギュスタン＝ルイ・コーシー（Augustin Louis Cauchy, 1789 年 8 月 21 日 - 1857 年 5 月 23 日）はフランスの数学者。解析学の分野に対する多大な貢献から「フランスのガウス」と呼ばれることもある。これは両者がともに数学の厳密主義の開始者であった事にも関係する。他に天文学、光学、流体力学などへの貢献も多い。パリに生まれたが、直前に起こったフランス革命をさけ小さな村で育てられた。混乱した世相を受けて貧窮した生活を送ったため病身となり、生涯健康に配慮して暮らしたという。十三歳の頃には一家はパリに戻ったが、父がナポレオン政権下で元老院書記の職を得た関係で、サロンの科学者達と親交があった。特にラグランジュはコーシーを「未来の大数学者」と呼んで期待をかけたと伝えられる。

初期の研究では、コーシーは多面体に関するオイラーの定理に最初の証明を与え、また、置換計算を発展させることで群論の誕生に影響を与えた。解析学では、コーシーはそれまでの曖昧さを解消して、厳密な基礎を与えようとした。「厳密性」を目指したコーシーの解析学の講義はその後の解析学の教科書のスタイルの規範となった。彼は極限と無限小の概念を使って現在の連続関数を定義した。だが、コーシーの定義では、連続性と一様連続性を区別することができない、という問題を抱えていたことが明らかになる。数学者としての最大の業績は、いわゆるイプシロン-デルタ論法の原型となるアイデアによって級数の収束概念を形式的に捉えなおしたことであろう。これにより解析学全般の厳密な形式化が進行し、近代数学の基礎が築かれた。複素解析では、複素平面における積分の理論、留数計算など、基本概念の多くを独力で生み出していった。関連する業績は非常に多

く、「コーシーの平均値の定理」、「コーシーの積分定理」、「コーシー・リーマンの関係式」などその名を冠する定理が現在でも解析学の基礎をなしている。

彼の厳密主義は政治的な考えにも通底しており、ルイ・フィリップが「人民の王」を名乗ったときはそれを受け入れず、トリノ、プラハなどで亡命生活を送っている。才能ある三人の若い数学者との関係はうまくいかなかった。ポンスレは射影幾何学の研究をコーシーから批判され、アーベルはルジャンドルの庇護を得ながらもコーシーから評価されることはなかった。他人の介入を嫌うその性格が災いし、論文審査の役目を引き受けながらアーベル、ガロアの論文を紛失するという失態を犯している。両者ともにこの事件が夭逝の遠因となっただけに責任は重大である。研究者と研究組織の関係として、現代にも通じる問題と言える。

ゲオルク・フリードリヒ・ベルンハルト・リーマン（Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 年 9 月 17 日 - 1866 年 6 月 20 日）はドイツの数学者。解析学、幾何学、数論の研究は、現代数学への発展に大きな影響を与えた。だが、病身のために、その研究生活は短く、先駆的な彼の研究は一部の数学者を除くと当時あまり理解されなかった。ただ、リーマン幾何学についての講演については、数学者ガウスが興奮のあまり、同僚にしばらくこの着想のすばらしさを語りつづけたといわれる。リーマンの数学は 20 世紀になると多くの分野で再評価され、現在では、１９世紀を代表する数学者の一人と考えられている。

彼の名前が残っている数学用語に、リーマン積分、コーシー＝リーマンの方程式、リーマンのゼータ関数、リーマン多様体、リーマン球面、リーマン面、リーマン＝ロッホの定理、リーマン予想などがある。リーマンは 1826 年に現在のドイツのダンネンベルク近くの小村ブレゼレンツに牧師の息子として生まれた。ゲッチンゲン大学、ベルリン大学で学んだ後、1851 年にゲッチンゲン大学でガウスのもとで論文「１複素変数関数の一般理論の基礎づけ」を提出して博士号を取得、1854 年には「幾何学の基礎にある仮説について」で大学教授資格を取得した。二つの論文によって、複素

解析の基礎づけとリーマン幾何学を確立した。1857 年に予備教授となり、1859 年にディリクレの後継者として正教授になった。1862 年に妹の友人エリーゼ・コッホと結婚したが、この時期から病状が悪化して、イタリアで療養。1866 年に旅の途中にマッジョーレ湖の近くで 39 歳という年齢で亡くなった。その生涯についてはリーマン全集に掲載されたデデキントの小伝がある。

複素解析の分野はコーシーによって独力で研究されていたが、リーマンは 1851 年の学位論文で写像やリーマン面など新たな成果を組み込むことで複素解析の基礎づけを行った。1854 年の教授資格講演「幾何学の基礎にある仮説について」ではリーマン幾何学を確立した（後にアインシュタインによって一般相対性理論に応用された）。現代数学で重要となる多様体の概念はこのとき初めて提唱された。そのほかにも、三角級数による表現に関する論文では、現在のリーマン積分の概念を提示した。リーマンの数論に関するただ一編の 1859 年の論文「与えれらた数より小さい素数の個数について」は、解析的整数論の中でも最も重要な論文で、ゼータ関数についてのリーマン予想を述べた。この予想は重要な未解決問題の一つとなっている。

リーマン自身は自分の数学理論を物理学に応用したいと考えていたが、彼は準備していた研究を十分に公表するには至らなかった。リーマンの主要な後継者はリーマンロッホの定理で知られるグスタフ・ロッホと代数曲線論を発展させたアルフレッド・クレプシュのだったが、この二人は若くしてなくなってしまった。ゴルタンもリーマンとの交流があったが、不変式論で独自の研究へと進んでいった。現在では、リーマンの数学的業績の多くがさまざまな分野に浸透しているが、19 世紀には、複素解析の基礎づけもリーマン幾何学も正当な評価を得ていなかった。複素解析の分野では、ワイエルシュトラスがリーマンの複素解析の基礎づけにギャップがあることを指摘したため、多くの数学者が疑念を共有するようになった。だが、フェリックスクラインはリーマンの複素解析に関する論文を発表し、この分野での研究を促していった。1900 年には、ヒルベルトがワイエルシュト

ラスが指摘したディリクレの原理の問題を解決し、その後、ヘルマン・ワイルがリーマン面を厳密に定義したことで、リーマンの複素解析での業績は再評価されることになった。ポアンカレはリーマンが示した位置解析のアイデアを発展させ、トポロジーを体系的に研究した。シーゲルはリーマンの遺稿を分析することで、リーマン予想に関するリーマンの研究の中に、すでにその後の研究を先取りする内容が含まれていることを発見した。

リーマンの複素解析を支持したフェリックスクラインだったが、エルランゲン・プログラムとの違いからリーマン幾何学に対しては否定的な姿勢をとる。リーマン幾何学の研究はリーマンが晩年に滞在していたイタリアで発展していった。リーマン自身はリーマン幾何学の計算技法を十分に与えなかったが、それを補うテンソル解析がベルトラミ、レヴィ＝チヴィタによって発展させられた。この分野はアインシュタインの相対性理論の登場によって注目されることになる。三角級数に関する論文は、ルベーグ積分とカントールの集合論の発展に影響を与えた。

1.1　基礎事項

複素数（ふくそすう、complex number）とは、実数 a, b と虚数単位 i を用いて $a + bi$ の形で表すことのできる数のことである。四元数、八元数などに対して二元数と呼ばれることもある。

$x^2 + 1 = 0$ の解の一つを i と書き虚数単位 (imaginary unit) という。i と実数 a の積を ia あるいは ai と書く。任意の二つの実数 a, b に対し $a + bi$ の形で書かれる数を複素数という。 a, b がともに整数である場合 $a + bi$ をガウスの整数という。

複素数 $z = a+bi$ に対し、a を複素数 z の実部 (real part) といい、b を複素数 z の虚部 (imaginary part) という。実部と虚部はそれぞれ $a = \mathrm{Re}z$（あるいは $\Re z$）, $b = \mathrm{Im}z$（あるいは $\Im z$）のように表現される。

複素数 z が実数ではない、すなわち虚部が 0 ではないとき ($\mathrm{Im}z \neq 0$)、z は虚数 (imaginary number) であるといい、虚数であって実部が 0 のとき ($\mathrm{Re}z = 0$) z は純虚数 (purely imaginary number) であるという。

虚部の符号だけが異なる複素数 $z = a + bi$ と、$\overline{z} = a - bi$ は互いに共役 (conjugate) であると言われ、$\overline{z}$ を z の共役複素数あるいは複素共役という。

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

を z の絶対値という。

複素数は元々、単位の異なる数の組み合わせで書かれる数のことをさす言葉であり、この場合は 1 を単位（素）とする実数と i を単位とする純虚数の和で表されているために複素数という言葉が用いられるようになった。

a, b, c, d を実数、 z, v, w を複素数とする。

四則演算

(i) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

(ii) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

(iii) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$

(iv) $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$

- $z + w = w + z$　（和の交換法則）
- $zw = wz$　（積の交換法則）
- $z(v + w) = zv + zw$　（分配法則）

複素共役

1. z が実数 $\Leftrightarrow \bar{z} = z$
2. z が純虚数 $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$ かつ $z \neq 0$

3. $\bar{\bar{z}} = z$ （対合）

4. $|z| = |\bar{z}|$

5. $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

6. $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

7. $z\bar{z} = |z|^2$

特に　$z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}, (z \neq 0)$

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, (w \neq 0)$

特に、複素数 z が実数係数の多項式 $f(x)$ の根となるならば z の共役複素数 z も $f(x)$ の根となることがわかる（1746 年:ダランベール)。すなわち、$f(x)$ が実数係数多項式ならば

$$f(z) = 0 \iff f(\bar{z}) = 0$$

が成り立つ。

複素数； $i^2 = -1$ を満たす数 $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位 (imaginary unit) といい、$z = x + iy$ を複素数 (complex numbar)。$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を極形式 (polar form)。r を絶対値 (absolute number)、 θ を偏角 (arg) という。

テイラー展開； x_0 のまわりでのべき級数展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

をテイラー展開 (Taylar expansion) という。

線積分；閉区間 $[\alpha,\beta]$ で定義された二つの関数 $F, g(g$ は実数値) について、

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(t_k)(g(t_k)-g(t_{k-1}))=\int_{\alpha}^{\beta}F(t)dg(t)$$

これをスティルチェス積分 (Stieltzes integral) といい、$g(t)=t$ のばあいがふつうのリーマン積分 (Riemann integral) である。もし経路がパラメータで表されているとき、$\gamma : x=x(t), y=y(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$ という形であるならば、γ 上の連続関数 $p=p(x,y), q=q(x,y)$ に対し

$$\int_{\gamma}(p\,dx+q\,dy)=\int_{\alpha}^{\beta}\{p(x(t),y(t))\,dx(t)+q(x(t),y(t))\,dy(t)\}$$

とおいて、γ に沿う線積分 (line integral) という。

指数関数と三角関数、対数関数；複素変数 z の指数関数 (exponential function) は

$$e^z=\exp z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

によって定義し、余弦関数 (cosine function) と正弦関数 (sine function) は

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k},\quad \sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

で定義する。

オイラーの公式: $e^{iy}=\cos y+i\sin y$ やドモアブルの公式: $(\cos y+i\sin y)^n=\cos ny+i\sin ny$ は複素数でも成り立つ。対数関数は指数関数の逆関数として、$e^w=z$ から z の関数 $w=\log z$ をいう。$z=re^{i\theta}$ ならば $u=\log r,\ v=\theta(mod 2\pi)$ から $\log z=\log|z|+i\arg z$ 注意として対数関数は無限多価である。

双曲線関数：$\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}, \sinh z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ での 双曲余弦、双曲正弦について、つぎが成り立つ；

(i) $\cosh z=\cos iz,\quad \sinh z=-\sin iz$

(ii) $\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1\cosh z_2+\sinh z_1\cosh z_2$

$\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1\sinh z_2$

(iii) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

(iv) $\sinh 2z = 2\sinh z \cosh z \qquad \cosh 2z = 2\cosh^2 z - 1 = 1 + 2\sinh^2 z$

複素数列 $\{c_n\}$ と複素数 z_0 が与えられたとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \cdots$$

という形を整級数あるいはべき級数という。よく知られたコーシー・アダマールの定理とは $R = \dfrac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}}$ とおけば級数は $|z-z_0| < R$ のとき絶対収束し、$|z-z_0| > R$ のとき発散する。R を収束半径という。ダランベールの公式とは $R = \lim_n \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

その他

- $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ かつ $b = d$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (三角不等式)
- $|zw| = |z||w|$

ガウス平面一つの複素数 $x + iy$ は二つの実数 x, y の組 (x, y) によって特徴付けられる。一方で二つの実数の組はデカルト座標を敷いた平面上の点として特徴付けられる。そこで、複素数を平面上の点と一対一に対応付けることによって、複素数をその内部の点として含む平面を考えることができる。このようにして得られる平面を、ガウス平面 (Gaussian plane) あるいはアルガン図 (Argand Diagram)、複素平面（ふくそへいめん、complex plane）などとよぶ。ガウス平面では、x 座標に実部、y 座標に虚部が対応し、 x 軸のことを実軸 (real axis)、 y 軸のことを虚軸 (imaginary axis) と呼ぶ。

複素数 z, w に対して

$$d(z, w) = |z - w|$$

によって距離を定めれば $\mathbb{C}$ は距離空間となる。この距離は、ガウス平面上で考えると、複素数が普通のユークリッド平面上の点と同じように扱えることが分かる。ガウス平面は複素数の形式的な計算を視覚的に見ることができ、数の概念そのものを拡張した。

通常の実数体 $\mathbb{R}$ 上の平面 $\mathbb{R}^2$ を実平面と呼ぶことがあるのと同様に、複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義される平面すなわち $\mathbb{C}^2$ のことを複素平面と呼ぶことがあり、複素平面という呼称は紛らわしい。実際、$\mathbb{C}^2$ の意味の複素平面は実 4 次元の空間である。区別のために、ガウス平面のことを複素数平面と呼ぶこともある。

極形式ガウス平面を利用すると、複素数の極座標による表示として極形式 (polar form) を考えることができるようになる。複素数 $z = a + ib$ に、ガウス平面上の点 (a, b) を対応させたとき、この点が極座標で (r, θ) とあらわされるなら

$$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

が成り立つ。 r は z の絶対値 $(r = |z|)$ である。θ を偏角 (argument, amplitude) といい、「$\arg z$」と書くこともある。$z = 0$ の時の偏角は任意の実数とする。

偏角 θ の単位をラジアンとするならば、これらの関係式とオイラーの公式から

$$\begin{aligned} z &= a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= re^{i\theta} = r\exp(i\theta) \end{aligned}$$

という表示が得られる。$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ あるいは $re^{i\theta}$ のような複素数の表示を極形式という。またこれを $r\angle\theta$ のように表記する場合もあり、この表し方をフェーザ形式 (phasor form) などと呼ぶ。極形式（またはフェーザ形式）に対して、$a + ib$ のような表示形式を直交形式 (orthogonal form) と呼ぶことがある。

極形式で表された 2 つの複素数 $re^{i\theta}$, $se^{i\phi}$ の積は三角関数の加法定理に

より

$$
\begin{aligned}
& (re^{i\theta})(se^{i\phi}) = rse^{i\theta}e^{i\phi} \\
= \; & rs(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\
= \; & rs((\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)) \\
= \; & rs(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)) \\
= \; & rse^{i(\theta+\phi)}
\end{aligned}
$$

となり、絶対値はそれぞれの絶対値の積に、偏角はそれぞれの偏角の和になるということが分かる。すなわち、 $se^{i\phi}$ に対応するガウス平面上の点を原点の周りに θ ラジアンだけ回転し、原点からの距離を示す絶対値を r 倍して得られる点が、積 $(re^{i\theta})(se^{i\phi})$ に対応する点となる。

ここでは $se^{i\phi}$ に対応する点を基準に述べたが、複素数の積は可換なので $re^{i\theta}$ に対応する点を基準に考えても同じ結果が得られる。

もし θ がある複素数の偏角である場合、任意の整数 n をとり、n 回転させた時の偏角 $\theta + 2n\pi$ もすべてその複素数の偏角となるため、偏角は一意に決まらない。このためふつう偏角と言ったときには、上の形の数をすべて同一視したものを考えている。この同一視を明示的に表す場合、等号を用いて $a = b$ と書く代わりに $a \equiv b(mod 2\pi)$ と書く（合同式)。

複素数の演算と偏角の間には次のような関係がある;

- $\arg z_1 z_2 \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$
- $\arg z^{-1} \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$

ハミルトンによる定義: 1835 年にハミルトンによって、負の数の平方根を用いない複素数の定義が与えられた。実数の順序対 (a, b) および (c, d) に対して和と積を

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
2. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$

によって定めるとき、 (a, b) を複素数という。実数は $(a, 0)$ の形で表され、虚数単位 i は $(0, 1)$ にあたる。ここで順序対とは二つの集合 A, B に対し、

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

で定義される集合を A と B の直積集合とよぶ。ここで (a, b) は、順序対を表す。つまり一般には $(a, b) \neq (b, a)$ である。ハミルトンの代数的な見方に対するこだわりは、複素数をさらに拡張した四元数の発見へと結びついた。ウィリアム・ローワン・ハミルトン（William Rowan Hamilton, 1805 年 8 月 4 日 - 1865 年 9 月 2 日）はアイルランド生まれのイギリスの数学者、物理学者。ハミルトン力学, ハミルトン閉路問題, ケイリー・ハミルトンの定理, 四元数でよく知られている。

行列表現

対応

$$a + bi \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

により、複素数を行列で表現することができる。これを複素数の行列表現 (matrix representation) という。$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ という極形式で考えれば

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。この右辺の表示は r 倍というスカラー倍と回転行列の合成であり、複素数の積がガウス平面上での一次変換に対応することを明示している。特に、体の同型

$$\mathbb{C} \simeq \left\{ r\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \; r, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

が成り立つ。

複素数 $z = a + ib$ の行列表現を A とするとき、 A の行列式は

$$det(A) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

になる。

乗法群 0 でない複素数を極形式で考えると次が成り立つ：

- $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $(re^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

またここから、

- $\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

ゆえに、0 でない複素数の全体に乗法を考えたものは群になる。これを $(\mathbb{C}_0, \times), \mathbb{C}^\times, \mathbb{C}^*$ のように記す。C における距離空間の位相を $\mathbb{C}^*$ に制限したもの（部分位相、相対位相）を考えると、$\mathbb{C}^*$ は位相群である。また、絶対値 1 の複素数全体の成す群（円周群）を $\mathbb{U}$ と書くことにすると、$\mathbb{U}$ は $\mathbb{C}$ の相対位相で位相群であり、写像

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{U};\, x \mapsto e^{2\pi ix}$$

および写像

$$\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U};\, re^{i\theta} \mapsto (r, e^{i\theta})$$

は位相群としての同型である。ここに、$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は閉区間 $[0,1]$ において 0 と 1 を同一視したものであり、$\mathbb{R}_+^*$ は正の実数の全体の成す乗法半群である。

問 1.1.1
つぎを求めよ。

1. $(1-i)^{10}$ （答え）$-32i$
2. $(1+i)^{20}$ （答え）-1024
3. $(1+\sqrt{3}i)^{-6}$ （答え）$1/64$
4. $z = 2+\sqrt{3}i$, $w = 2-\sqrt{3}i$ のとき、z^3+w^3 （答え）-20

問 1.1.2
つぎの計算をおこなえ。x, y の関数 $f(x,y)$ を $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ の式で表せ。

(1) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy$

(2) $f(x,y) = x^n - y^n$

問 1.1.3
複素数 z の関数 $\dfrac{1}{z^2+1}$ を部分分数の和の形で表せ。

問 1.1.4
つぎを求めよ。

1. $e^{\pi i}$ （答え）-1

2. $z = \cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5)$ のとき、$1 + z + z^2 + \cdots + z^9$ （答え）0

3. $I = \cos(\alpha+h) + \cos(\alpha+2h) + \cdots + \cos(\alpha+nh)$, $I = \sin(\alpha+h) + \sin(\alpha+2h) + \cdots + \sin(\alpha+nh)$
（答え）$I = \dfrac{\sin(\alpha + (n+1/2)h) - \sin(\alpha + h/2)}{2\sin(h/2)}$
$J = \dfrac{\cos(\alpha + (n+1/2)h) - \cos(\alpha + h/2)}{2\sin(h/2)}$

1.2 コーシー・リーマンの方程式

解析学において、正則関数（せいそくかんすう、holomorphic function）とは、ガウス平面上のある領域で微分可能な複素変数複素数値の関数のことである。

複素微分; 複素平面の領域 D で定義された $f(z)$ が、D の点 c で微分可能であるとは極限

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在するときをいい、$f'(c)$ を点 c における $f(z)$ の複素微分係数という。D の各店で微分可能であれば、複素微分可能であるという。注意することは h も複素数であり、$h \to 0$ とは 2 次元の平面上の点として原点に近づけることである。

問 1.2.1

正則関数 $f(z)$ に対して、つぎが成り立つ。

1. $\dfrac{d}{dz}f(z) = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}$
2. $f(z) = u + iv$ に対して、$\dfrac{d^n}{dz^n}f(z) = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n} + i\dfrac{\partial^n v}{\partial x^n}$ (ヒント、1 をつかう)
3. $f(z) = u + iv$ に対して、$\dfrac{d^{2n}}{dz^{2n}}f(z) = (-1)^n\left(\dfrac{\partial^{2n} u}{\partial y^{2n}} + i\dfrac{\partial^{2n} v}{\partial y^{2n}}\right)$
(ヒント、1 をつかう)
4. $f(z)$ に対して、$\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{d^2}{dy^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$

問 1.2.2

1. $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\sin z,\ \dfrac{d}{dz}\sin z = \cos z$
2. $\dfrac{d}{dz}\cosh z = \sinh z,\ \dfrac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$
3. $\dfrac{d}{dz}\cos^{-1} z = -\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}},\ \dfrac{d}{dz}\sin^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

テイラー展開：x_0 のまわりでべき級数展開を

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

をテイラー展開 (Taylar expansion) という。

正則関数は複素解析において中心的な役割を演じる。複素関数が正則であることを仮定すると、その関数は各点で無限階（任意有限階）の微分が可能で冪級数に展開される（テイラー展開）。すなわち複素関数に関して

は、それが正則関数であるということと解析関数であることとは同値である。また、一致の定理により正則関数はその特異点を含まない領域へ一意的に拡張（解析接続）することができる場合がある。ガウス平面の全域で正則である複素関数は整関数であるといい、正則関数の商として得られる関数は有理型関数という。

複素数列 $\{c_n\}$ と複素数 z_0 が与えられたとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \cdots$$

という形を整級数あるいはべき級数という。よく知られたコーシー・アダマールの定理とは、$R = \dfrac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}}$ とおけば、級数は $|z-z_0| < R$ のときは絶対収束し、$|z-z_0| > R$ のときは発散する。等号は両方あり得る。R を収束半径という。ダランベールの公式とは $R = \lim_n |\dfrac{c_n}{c_{n+1}}|$ に対して成り立つものである。

ガウス平面 $\mathbb{C}$ 内の開集合 U と U 上で定義される複素数値関数 $f(z)$ について、$a \in U$ に対し極限

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

が定まるとき、すなわち U 内で z を a に近づけるとき、どのような近づけ方によっても右辺の商がただ一つの値に収束するとき、$f(z)$ は点 a で、あるいは $z=a$ で微分可能であるといい、この極限値を

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

と書いて、関数 $f(z)$ の点 a あるいは $z=a$ における微分係数と呼ぶ。関数 $f(z)$ が U の各点で微分可能であるとき、関数 $f(z)$ は U において正則である、または U 上の正則関数であるという。

性質: f, g を領域 U 上で定義される正則関数とする。また α, β を複素数の定数とすると

- 線型性: $\frac{d(\alpha f+\beta g)}{dz} = \alpha\frac{df}{dz} + \beta\frac{dg}{dz}$

- ライプニッツの規則: $\frac{d(fg)}{dz} = \frac{df}{dz}g(z) + f(z)\frac{dg}{dz}$
- 連鎖律: $\frac{d(f \circ g)}{dz} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dz}$

が成り立つ。ゆえに正則関数の和、定数倍（スカラー倍)、積は再び正則である。正則関数は微分が 0 にならない点において複素平面上の等角写像である。

コーシー・リーマンの方程式

$z = x + iy$ とおいて、ガウス平面 $\mathbb{C}$ を実平面 $\mathbb{R}^2$ と同一視すると、複素関数 f は 2 つの実 2 変数関数 u, v を用いて

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

と表すことができる。$f(z)$ が正則関数であれば、u, v はコーシー・リーマンの方程式と呼ばれる偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

を満たす。ここから正則関数 f の実部 u, 虚部 v は実 2 変数の関数として調和であることがわかる。

複素変数 $z = x + iy$ の平面の開集合 Ω で定義された関数：

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

（ここで実部 $u = \mathrm{Re} f$, 虚部 $v = \mathrm{Im} f$）に対して $f_x = u_x + iv_x$, $f_y = u_y + iv_y$ とするとき、この関数が 2 つの偏微分方程式

コーシー・リーマンの方程式:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

をみたすとき、f は**正則な関数**であるという。関数が複素微分可能である条件は正則であること。いいかえればコーシー・リーマンの方程式は $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ に帰着される。

問 1.2.3

f, g がともにコーシー・リーマンの方程式を満たすとき、積 fg, 商 f/g もコーシー・リーマンの方程式を満たす。つまり 2 つの正則関数の積、商はともに正則となる。（ヒント：$\dfrac{\partial(fg)}{\partial x} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial(fg)}{\partial y}, \dfrac{\partial(f/g)}{\partial x} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial(f/g)}{\partial y},$）

問 1.2.4

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とし、C^2 級の関数 $f = f(z), z = x + iy$ が $\Delta f = 0$, $\Delta(z^2 f) = 0$ を満たすとする。 この f は正則である、すなわちコーシー・リーマンの方程式を満たす。

等角写像：一般に、正則関数 $w = f(z)$ は、複素 $z-$ 平面の点を $w-$ 平面の点 w に写す写像と考えられる。すなわち $z-$ 平面の図形を $w-$ 平面の図形に写すもの。もし $f'(a) \neq 0$ であれば、逆関数が存在し、$b = f(a)$ の対応において、局所的には a 近傍と b の近傍には 1 対 1 対応で、高位の無限小を無視すれば、1 次式 $w = f'(a)(z - a) + b$ とみなせる。この 1 次式の写像を考えてみる。$w_1 = z - a$ は平行移動、$W_2 = rz$(r は実数) は拡大／縮小、$w_3 = e^{i\theta}$ は回転を意味する。１次写像はこれらを組み合わせた写像で $w = f'(a)(z-a) + b = re^{i\theta}(z-a) + b$, (ただし $f'(a) = re^{i\theta}$) という合成写像である。点 a において交わる 2 つの曲線 γ_1, γ_2 のなす角が θ ならば、写像の像点 b で交わる 2 つの像曲線 $f(\gamma_1), f(\gamma_2)$ のなす角も θ である。したがって 2 曲線の交角は写像によって不変である。この性質を等角写像とよぶ。したがってつぎの命題が成立する。

> 正則関数は微分がゼロにならない点において、複素平面上の等角写像である。

問 1.2.5

(1) $|z|=1$ の $w=iz+i$ による像を求めよ。(答え)$|w-i|=1$

(2) $|z-2|=1$ は $f(z)=(1-2i)z$,$g(z)=z-i$ の合成写像 $w=g(f(z))$ でいかなる図形に移るか。(答え)$|w-2+5i|=\sqrt{5}$

問 1.2.6

$|z|=1$ のとき、$\left|\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|=1$ を示せ。

問 1.2.7

$|\alpha|<1$ を満たす複素数に対して、$|z|<1$ を $|w|<1$ の上に移し、α を 0 に写す 1 次変換を求めよ。（答え）α でゼロ、$1/\overline{\alpha}$ で ∞ になる変換は $w=c\dfrac{z-\alpha}{z-(1/\overline{\alpha})}$ の形だから $w=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$

調和関数（ちょうわかんすう、harmonic function）とはラプラス方程式の解となる関数のことをいう。関数 $f:\mathbb{C}^n(resp.\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}(resp.\mathbb{R})$ がラプラス作用素

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

に対し、$\Delta\ f=0$ を満たすとき、関数 f は調和的 (harmonic) である、あるいは f は調和関数であるという。$z=x+iy(x,y\in R)$ を複素変数とする複素関数 $w=f(z)$ に対し、$w=u+iv(u,v\in R)$ とおくと、実 2 変数の実数値関数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ が得られる。このとき、w が複素微分可能であれば u, v は 2 変数の調和関数となる。

解析関数とは領域の局所的な各点を中心とする整級数によってあらわせるときをいう。**一致の定理**とは、ある解析関数が部分領域の開集合で恒等的にゼロならば、すべての領域内の点で関数は恒等的でゼロであるとなる。これから、もし実軸と交わる領域 D 上の二つの解析関数 f,g が領域 D に含まれるすべての実軸点 x で $f(x)=g(x)$ であれば、$z\in D$ で一致する。**関数の拡大**とは、与えられた数直線の開区間上の実解析関数と複素平面上の領域を定義域とする解析関数を、数直線では一致するように定めることできる。

1.3 複素積分

複素解析で中心となる道具は複素積分である。ある閉曲線に囲まれた領域で正則な関数をその閉曲線に沿って複素積分すると値は 0 となる (コーシーの積分定理)(いまいち正確ではない閉曲線の近傍でも正則でないと)。正則関数の円盤内での値は円周上での値がわかれば計算できる (コーシーの積分定理)。複雑な実関数の積分を複素積分を用いて計算することができる。このとき留数の理論を使うと計算が簡単になる。関数の値が有限でなく「値が爆発」しているところを関数の極あるいは特異点というが (特異点は極より広い概念)、極においては留数を定義することができる (ほんとは孤立特異点ならできる)。この留数を用いて複素積分を計算することができる。詳しくは留数の項目を見るとよい。真性特異点のまわりにおける正則関数のおどろくべき挙動を示す定理がワイエルシュトラス (Weierstrass-Casorati theorem) の定理である。特異点が極のみの関数を有理形関数とよぶ。

複素積分とは複素数平面のある経路に沿った線積分として定義される。複素平面上の経路をパラメータをもちいて表現して、$\gamma : x = x(t), y = y(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$ のとき、$z(t) = x(t) + iy(t)$ とおき、経路を $\gamma : z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$ と表す。経路 γ で連続な複素数値関数 f が与えられたとき、γ に沿う f の**複素積分**を、線積分

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (f dx + i\, f dy)$$

で定義する。また経路が滑らかならば、すなわち $z'(t) = x'(t) + i\, y'(t)$ をもちいて

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

というリーマン積分の形となる。

問 1.3.1

原点を中心とする半径 r の円の上部の偏角 0 から π までの経路を γ_1, 円の

下部の偏角 $-\pi$ から 0 までの経路を γ_2 とする。これらの経路をパラメータ表示せよ。これらの向きはともに正の向き（時計と反対周り）に回るという。それぞれの経路に対する関数 $\mathrm{Re}z$ を積分せよ。

（答え）$\displaystyle\int_{\gamma_1} \mathrm{Re}z dz = \int_0^\pi r\cos t \cdot r(-\sin t + i\cos t)dt = \frac{i\pi r^2}{2}, \int_{\gamma_2} \mathrm{Re}z dz = \int_0^\pi r\cos t \cdot r(-\sin t - i\cos t)dt = -\frac{i\pi r^2}{2}$

問 1.3.2

複素平面上の点 c を中心とする半径 r の円を正の向きに一周する経路を γ: $z = c + re^{it}\,(0 \le t \le 2\pi)$ とするとき、関数 $(z-c)^n$, $\pm1, \pm2, \cdots$ に対して計算せよ。

（答え）$\displaystyle I_n = \int_\gamma (z-c)^n dz = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} \exp\{i(n+1)t\}dt,\ I_{-1} = 2\pi i,$ $I_n = 0(n \ne -1)$

問 1.3.3

経路 $\gamma : z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$ に対して定めた経路 $\gamma^- : z = z(\alpha + \beta - t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$ はどういう経路であるか、またこのときの関数の積分の値はどうなるか？

(答え) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$

問 1.3.4

つぎの積分を求めよ。

(i) $\displaystyle\int_\gamma z^n dz$　　ただし $\gamma : z = re^{it}\ (0 \le t \le \pi)$

(ii) $\displaystyle\int_\gamma z^n dz$　　ただし $\gamma : z = z_0 + (z_1 - z_0)t\ (0 \le t \le 1)$

(iii) $\displaystyle\int_\gamma z^n dz$　　ただし $\gamma : z = x + ib\ (-a \le x \le a)$

(答え)(i) $\int_0^{\pi}(re^{i\theta})^n ire^{i\theta}d\theta = -(1+(-1)^n)r^{n+1}/(n+1)$, (ii) $(z_1^{n+1} - z_0^{n+1})/(n+1)$, (iii)$((a+ib)^{n+1}+(-1)^n(a-ib)^{n+1})/(n+1)$

1.4 コーシーの積分定理

コーシーの積分定理（コーシーのせきぶんていり）は、コーシーの第 1 定理ともいわれ、コーシーによって示された。ガウス平面上である領域において正則である関数の経路積分についての定理で、複素積分における代表的な定理である。

コーシーの積分定理は次のように記述されることが多い。D を単連結領域とし、$f(z)$ は D 上で正則である関数とするとき、C を D 内にある長さを持つ単純閉曲線とすると、

$$\int_C f(z)dz \ = 0$$

つまり、ある領域を囲む曲線で複素積分をするとき、領域内に正則ではない部分が存在しない場合には積分の値は 0 となることを主張している。

上に書いた形でのコーシーの積分定理は、20 世紀にグールサによって証明された。それまでの証明では f の微分可能性だけでなく、導関数の連続性が仮定されていた。

コーシーの積分公式（コーシーのせきぶんこうしき）は、コーシーの第 2 定理ともいわれ、コーシーによって示された、数学、特に微分積分学において、ガウス平面上である領域において正則ではない点が存在する場合の関数の経路積分についての定理で、複素積分の重要な定理の一つである。

公式: D を単連結領域とし、$f(z)$ は D 上で正則である関数とするとき、C を D 内にある長さを持つ単純閉曲線とする。C によって囲まれる領域の任意の一点 a において、 以下の式が成立する。

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

※この公式は領域の中に正則ではない点が存在する場合の考えが示されていることに注意。また、この式を用いて $f(z)$ の n 階複素導関数を与えることができる。a を z に置き換えて、積分変数を ζ で置き換えると

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

被積分関数は任意の自然数 n に対して n 回複素微分可能である。この微分と積分は交換できて、n 階の導関数は以下のようになる。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

解析学において、解析関数 $f(z)$ の孤立特異点 $z = a$ における微分形式 $f(z)dz$ の留数（りゅうすう、residue）$Res_{z=a}f(z)$ とは、以下の積分によって得られる値のことである：

$$\mathrm{Res}_{z=a}f(z) := \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz.$$

ただし、i は虚数単位、積分路 γ は点 $z = a$ を中心とする十分小さな円（実際には、積分路は、それが複素数平面から切り取る有界領域が $z = a$ 以外に $f(z)$ の特異点を含まなければ、どんな単純閉曲線でも良い）。

後述する留数定理を用いると、複雑な関数の積分がその関数の特異点における留数の計算に帰着されるなど、留数は複素関数論における強力な道具の一つとなっている。これは実領域における積分の計算にも威力を発揮する。

留数の計算: 冒頭の条件の下、複素解析関数 $f(z)$ は孤立特異点 $z = a$ の周りでローラン展開される：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

この収束は γ 上で一様収束するから、項別積分可能で

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_\gamma (z-a)^n dz$$

となるが、コーシーの積分定理などを用いれば、右辺は $n = -1$ のところを除いて 0 となり、

$$\oint_\gamma f(z)dz = a_{-1} \cdot 2\pi i$$

（ここに現れる $2\pi i$ は 自然対数 $\log_e = ln$ の偏角のずれの分である）。したがって、

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = a_{-1}$$

となることがわかる。ゆえに、ローラン展開を計算できる関数の留数は直ちにわかる。またこのとき、孤立特異点 z = a が f(z) の n 位の極であるなら、(z - a)nf(z) は正則で、とくに

$$(z-a)^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}(z-a)^k$$

とテイラー展開されるので、

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z)$$

と計算することができる。

定理 1.4.1

留数定理: 単純閉曲線 γ と、その γ が囲む有界領域 D を考える。D 上で定義される関数 $f(z)$ が D 内に孤立特異点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ をもち、それ以外で正則であるならば、

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=a_i} f(z)$$

が成り立つ。ただし、積分は γ を D の内点からの偏角が正の向き（領域を左に望む方向）に進む。これを留数定理と呼ぶ。

実領域での積分への応用: 留数定理を用いて、例えば次のような積分が計算できる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

$f(x) = 1/(1+x^2)^{n+1}$ とおく。を一旦複素領域へ拡張して $f(z)$ を考え、適当な $R > 0$ を取って、区間 $[-R, R]$ を直径とする原点中心の半円（$z = i$ を含むもの）を C_0 とする。半円 C_0 から直径を除いた周を C とすると、実軸上を正の向きに進むように C_0 を積分路として

$$(*) \int_{C_0} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + \int_C \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}}$$

である。このとき R が十分大きければ R に依らず、C_0 の囲む領域内で $f(z)$ は $n+1$ 位の極 $z = i$ をもち、それ以外で特異点を持たないから、留数定理により (*) の左辺は

$$\begin{aligned} & 2\pi i \,\mathrm{Res}_{z=i} f(z) = \tfrac{2\pi i}{n!} \lim_{z \to i} \tfrac{d^n}{dz^n} \left(\tfrac{(z-i)^{n+1}}{(1+z^2)^{n+1}} \right) \\ = \quad & \tfrac{2\pi i}{n!} \tfrac{d^n}{dz^n} \tfrac{1}{(z+i)^{n+1}} \Big|_{z=i} \\ = \quad & \tfrac{\pi (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \end{aligned}$$

となる。一方、(*) の右辺の第二項は $R \to \infty$ のとき 0 に収束するので、結局

$$\frac{\pi (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$$

を得ることになる。

留数定理をもちいることで、次のような定理を得ることができる。

定理 1.4.2

偏角の定理: 単純閉曲線 γ の囲む有界領域 D の閉包を E とし、E 上で定義される有理型関数 $f(z)$ は γ 上に極も零点も持たないとする。このとき、$f(z)$ の D 内での零点と極は有限個である。重複度まで込めた零点の個数を n, 極の個数を m とすると

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - m$$

が成り立つ。これを偏角の定理と言う。さらに一般に、重複度込みで零点が $a_1, a_2, \cdots, a_n$、極が $b_1, b_2, \cdots, b_m$ であるとすると、E 上の任意の正則関数 $g(z)$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} g(a_j) - \sum_{k=1}^{m} g(b_k)$$

が成立する。

定理 1.4.3

ガウス・グリーンの定理:

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} (Pdy - Qdx)$$

定理 1.4.4

コーシーの積分定理:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

積分表示あるいは積分公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \quad (z \in D)$$

定理 1.4.5

モレラの定理:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f : \text{regular}$$

1.5 留数

ローラン展開: $f(z)$ を開円環 $R_1 < |z-a| < R_2$ で正則な関数とすると

き、ローラン級数に展開できる。この級数は負のべきをもつ。

$$f(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l (z-a)^l$$

もし開円板 $|z-a| < R$ で正則な場合には、負のべきがない、テイラー級数に展開される。

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

例題 1.5.1

関数 $f(z) = \dfrac{2}{(3-z)(z-1)}$ を $1 < |z| < 3$ でローラン展開せよ。

（解）部分分数に分けてから $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{3-z} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{3}} =$ $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^{n+1}} + \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{z^m}{3^{m+1}} \quad (1 < |z| < 3)$

問 1.5.1

関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - iz + 2}$ を $1 < |z| < 2$ でローラン展開せよ。

（答え）$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{i^n}{3z^n} + \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{z^m}{3 \cdot 2^{m+1} i^m}$, $(1 < |z| < 2)$

問 1.5.2

関数 $f(z) = \dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ を $z = 0$ を中心とするでローラン級数に展開せよ。

（答え）$f(z) = \dfrac{1 - \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(2z)^m}{m!}}{z^4} = \sum_{l=-3}^{\infty} \dfrac{-2^{4+l}}{(4+l)!} z^l$, $(0 < |z| < \infty)$

定理 1.5.1

留数定理: 関数 $f(z)$ が a の近傍で a を除いて 1 価正則であるとき、ある開円板 $0 < |z-a| < r$ において $f(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l (z-a)^l$ とローラン展開できる。もし $0 < |z-a| < r$ 内で正の向き（時計と反対回り）に一周する閉曲線を γ とおけば、複素積分の値は $c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta$, を用いてつぎで表せる。$c_{-1}$ を f の a にお

ける留数 (Residue) とよび、 $\mathrm{Res}(f,a)$ と表す。

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f,a)$$

m 位の極：関数が

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots \\ &\quad + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

と表されるとき、a を f の m 位の極という。

m 位の極における留数の計算：f の a における留数である c_{-1} を求めるには $m-1$ 回の微分の計算をおこなう。

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}$$

1 位の極における留数の計算：

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

なぜなら 1 位の極では関数 $f(z) = \dfrac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$ と表されるから、$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = c_{-1}$ が成り立つ。

問 1.5.3
複素数関数 $\dfrac{1}{z^2-i}$ の $z = e^{\pi i/4}$ における留数を求めよ。

問 1.5.4
与えられた正数 $R > 1$ に対して、複素数平面内の曲線：$C_1 : z = x \, (-R \leq x \leq R)$, $C_2 : z = Re^{i\theta} \, (0 \leq \theta \leq \pi)$ について、線積分

$$\int_{C_1} \frac{1}{z^2-i}dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^2-i}dz$$

の値を留数定理により求めよ。またこの関係式から $R \to \infty$ とした積分の計算をおこなえ。

問 1.5.5

- 複素数平面で 0 を中心とする半径 1 の円周に沿って反時計回りに 1 から i までの曲線を C とするとき、線積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{\zeta}d\zeta$ の値をもとめよ。
- 与えられた複素数 $z(|z-i|<1)$ に対して、i と z を結ぶ線分を $C_x : \zeta = (1-t)i + tz (0 \leq t \leq 1)$ と表すとき、線積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{\zeta}d\zeta$ の値を t の定積分の形で示せ。

問 1.5.6

$|z-a|<1$ で正則な関数 g に対して、$I = \displaystyle\int_{|z-a|=1/2} \frac{g(z)-g(a)}{z-a}dz$ を求めよ。

（答え）$z=a$ は除去可能な特異点で、$f(z) = g(z) - g(a)$ は $|z-a| \leq \dfrac{1}{2}$ の近傍で正則。したがって $I = \int_{|z-a|=1/2} \dfrac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a) = 2\pi i(g(a) - g(a)) = 0$

問 1.5.7

$g(z) = \displaystyle\int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{(z-\zeta)\zeta}$ に対して、$g\left(\dfrac{i}{2}\right) + g(2i)$ を求めよ。

（答え）$f(\zeta) = \dfrac{1}{(z-\zeta)\zeta}$ の特異点は $0, z(z \neq 0)$ で、その留数は $\mathrm{Res}(f,0) = \dfrac{1}{z}, \mathrm{Res}(f,z) = -\dfrac{1}{z}$ となる。$|z|<1$ ならば、$g(z)=0$、また $|z|>1$ ならば、$g(z) = \dfrac{2\pi i}{z}$, したがって $g\left(\dfrac{i}{2}\right) + g(2i) = \pi$

問 1.5.8

$\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(2z-i)}$ を求めよ。

（答え）$\mathrm{Res}\left(f, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2(1-i)}, \mathrm{Res}\left(f, \dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{-1}{2(1-i)}$ であるから積分は 0

問 1.5.9

正数 $r \neq 1$ に対して $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{z^2+1}$ を求めよ。

（答え）$\mathrm{Res}(f,i)=\dfrac{1}{2i}, \mathrm{Res}(f,-i)=\dfrac{-1}{2i}$ $r>1$ ならば、留数和がゼロだから、積分はゼロ、$0<r<1$ ならば、コーシーの積分定理より、積分はゼロ

問 1.5.10

$\displaystyle\int_{|z-1|=2}\frac{dz}{z^3-4z}$ を求めよ。

（答え）$\mathrm{Res}(f,0)=\dfrac{-1}{4}, \mathrm{Res}(f,2)=\dfrac{1}{8}$, 積分は $\dfrac{-\pi i}{4}$

問 1.5.11

$\displaystyle\int_{|z-2i|=1}\frac{dz}{z^3-4z}$ を求めよ。

（答え）積分はゼロ。

問 1.5.12

$\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-1)(z-2)^3}dz$ を求めよ。

（答え）特異点は 1 位の極 $z=1$ と 3 位の極 $z=2$ であるから、$\mathrm{Res}(f,1)=-e$, $\mathrm{Res}(f,2)=\dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{dz^2}\left(\dfrac{e^z}{z-1}\right)\Big|_{z=2}=\dfrac{e^2}{2}$ よって積分は $(e^2-2e)\pi i$

問 1.5.13

自然数 n, 相異なる正数 a,r に対して $\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{dz}{z^n+a^n}$ を求めよ。

（答え）特異点は $z^n=-a^n=a^ne^{(2k+1)\pi i}, k=1,2,\cdots,n$ より、$z_k=ae^{\frac{2k+1}{n}\pi i}$ が特異点で、もし $r<a$ であれば、積分はゼロ。また $r>a$ であれば、$\mathrm{Res}(f,z_k)=\dfrac{1}{nz_k^{n-1}}=\dfrac{z_k}{nz_k^n}=\dfrac{-e^{\frac{2k+1}{n}\pi i}}{na^{n-1}}$ これらの留数の和を計算すると、等比級数の和の公式からゼロである。よって積分もゼロ。

問 1.5.14

$f(x,y)=x^2-y^2+2ixy$ を曲線 $C:z(t)=\dfrac{1}{t^2+1}+it\,(0\le t\le 1)$ に沿った線積分した $\int_C f(x,y)dz$ の値を求めよ。

問 1.5.15

複素平面上で i を中心とする半径 1 の円周に沿って反時計回りに 0 から $2i$ にいたる半円を C とするとき、線積分 $\int_C \dfrac{1}{z^2+1}dz$ の値を求めよ。

1.6　実積分の計算

タイプ　：三角関数の積分 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$

$z = e^{i\theta}$ とおいて $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \int_{|z|=1} R\Big(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\Big)\frac{dz}{iz}$ に帰着される。

例題 1.6.1

整数 n に対し、$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = 2\pi\frac{(2n)!}{(n!2^n)^2}$

なぜなら $\int_{|z|=1}\Big(\frac{z^2+1}{2z}\Big)^{2n}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2^{2n}i}\int_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}dz =$
$\frac{1}{2^{2n}i}\Bigg\{\binom{2n}{n}\int_{|z|=1} z^{-1} + \cdots\Bigg\}dz = \frac{2\pi i}{2^{2n}i}\binom{2n}{n} = 2\pi\frac{(2n)!}{(n!2^n)^2}$

問 1.6.1

（1）$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$, ただし $a > |b|$ を求めよ。

（2）$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta}$, ただし $a > |b|$ を求めよ。

(答え)（1）$\int_{|z|=1}\frac{2dz}{i(bz^2+2az+b)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ を得る。（2）も同じ値となる。

問 1.6.2

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & n = 0, 2, 4, \cdots \\ 1 & n = 1, 3, 5, \cdots \end{cases}$$

問 1.6.3

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{a}$ ただし $(a, \lambda > 0)$

タイプ II：有理関数の広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx, \int_0^{\infty} R(x)dx$

問 1.6.4

$a > 0$ とする。（1）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$ （2）$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{1}{a}$

（3）$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x+a)^2} dx = \frac{\log a}{a}$ （4）$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2} = \frac{\pi \log a}{2a}$

タイプ III:有理関数と三角関数の積 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\theta x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\theta x dx$

例題 1.6.2

$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

原点以外では正則な関数 e^{iz}/z を考え、原点をさけて実軸上の小線分 $\{-\delta \leq \mathrm{Re}z \leq \delta\}$ の代わりに原点を中心とする半径 δ の上半円周とした経路をもちいる。コーシーの積分定理から、$0 = \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\pi}^{0} \frac{e^{\delta e^{i\theta}}}{\delta e^{i\theta}} i\delta e^{i\theta} d\theta = \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) \frac{e^{ix}}{x} dx + i\int_{\pi}^{0} e^{\delta e^{i\theta}} d\theta \to \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi i \quad (\delta \to 0)$

よって $\pi i = \lim_{\delta\to 0} \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) \frac{e^{ix}}{x} dx = 2i \lim_{\delta\to 0} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

から、結果が得られる。

タイプ IV:対数関数との積の積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} R(x) \log^n x dx,$

例題 1.6.3

$\displaystyle\int_0^{\pi} \log\sin\theta d\theta = -\pi \log 2$

関数 $1 - e^{2iz} = -2ie^{iz}\sin z$ を考える。経路 $0, \pi, \pi + iy, iy$ の矩形で、$0, \pi$ を避けるとする。この４分小円の一部を半径 δ とおく。$|1 - e^{2iz}|/|z| \to 2(z \to 0)$ であり、原点 0 の近くでは、$\delta \log \delta \to 0 (\delta \to 0)$、さらに頂点 π の周りでも同様であるから、$\displaystyle\int_0^{\pi} \log(-2ie^{ix}\sin x) dx = 0$ を得る。$\log e^{ix} = ix$ と選べば、$-\pi$ から π の間では $\log(-i) = -\pi i/2$ となる。したがって $\displaystyle\int_0^{\pi} \Big(\log 2 +$

$$\log(-i) + ix + \log\sin x\Big)dx = \pi\log 2 - \frac{\pi i}{2}\pi + \frac{\pi^2}{2}i + \int_0^\pi \log\sin x dx = 0$$

よって $\displaystyle\int_0^\pi \log\sin\theta d\theta = -\pi\log 2$

第 2 章

フーリエ解析

2.1　フーリエ変換

フーリエ変換（フーリエへんかん, Fourier transform）は、関数変換を行う線型作用素の一種。具体的には関数をフーリエ級数に変換すること（すなわち、三角関数の和の形として表現すること）で、例えば「ある波について、どういった周波数成分がどの程度含まれるのか」といった事柄を調べるのに用いられる（後述）。フーリエ変換（特に高速フーリエ変換）は工学、理学の広い分野で利用されている。具体的には、スペクトル解析やX 線散乱実験などの解析、バンド計算などでの実空間⇔逆格子空間の変換などに利用される。離散フーリエ変換を計算機上で高速で計算できるようにしたのが高速フーリエ変換 (FFT)。特に高速フーリエ変換を使うことにより畳み込みは高速で計算できる。同じくフーリエ変換と呼ばれるものの、分野によっては係数などに細かな違いを持っていることがあるが、これらは本質的にみな同じものである。

特に電気電子情報工学系では通例、t を時間、ω (ω) を複素角周波数、j を虚数単位（※数学では i と表すが電流を i とするから重複を避けている）として

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dtf(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

と書く。ここで $F(\omega)$ は複素数であり、極形式 $A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ で表したとき、$A(\omega)$ を振幅スペクトル、$\phi(\omega)$ を位相スペクトル、$A(\omega)^2$ を電力スペクトル（パワースペクトル）と呼ぶ。通常我々が単純に周波数特性と呼ぶときは、電力スペクトルを対数表示したものを指すことが多い。

なお、理論上フーリエ係数を求めるには無限の区間に渡って積分を行わなければならないが、実験値等からフーリエ係数を求めるには範囲を区切らなければならない。そのために、ある範囲の実験値のフーリエ係数を求めるには、このある範囲の実験値が周期的に無限に繰り返されていると仮定して計算するのが一般的である。だがここで問題なのは、ある範囲の最

初の値と最後の値を無理やりつなげることによって発生する不連続な要素である。これを解決するため、中央が 1 付近の値でその範囲外で急速に 0 に収束する関数を掛けて、不連続な要素を極力排除することが行われる。このとき、この掛け合わせる関数を窓関数という。波には色々な周期の波が混ざっている事が多い。例えば音声は色々な周期（高さ）の音の混合である。それを、どの周波数の波がどのくらいの割合で混ざっているかを調べるのに、フーリエ変換する。そうすると、例えば「50Hz が 12 の強さ、347Hz が 45 の強さで混じった音」などということが分かる。この 12 や 45 はその周波数成分がどの程度含まれているかという相対的な値であり、単位を持たない。これを応用した「スペクトラム・アナライザー」は、通信機やオーディオ機器の周波数応答特性の測定や調整などに使われるほか、今や高級オーディオ機器の定番装備となっている（「高音・中音・低音などいくつかの音域にごとに分かれて上下する棒」など）。関東大地震の 69 年周期説も、考案者が（戦後すぐなので手作業で）地震発生期間をフーリエ変換した時の、卓越周期として出てきたものである。

フーリエの法則と熱伝導方程式：ある固体内の温度分布は、どのような方程式で表されるか。その答えがフーリエが導いた熱伝導方程式（熱方程式やフーリエの方程式などとも呼ばれる）である。フーリエは、「各点での熱の移動する速さは、その点における温度勾配に比例する」（フーリエの法則）ことを示した。これにより、ある時刻のある領域における熱量は流入した熱と流出した熱の差で表すことができる。また、熱量と比熱・温度の関係式からも熱量を表すことができる。フーリエはこれらの関係式を用いて熱伝導方程式を導き、さらにいくつもの境界条件のもとでこれを解いた。熱伝導（ねつでんどう, Conduction of heat, Thermal conduction）は、高温側から低温側へ熱が伝わる（移動する）こと。熱伝導は、フォノン及び伝導電子が担う。特に、金属においては、伝導電子が熱伝導の主要な担い手である。通常は、伝導電子による寄与が大きいので金属は、半導体、絶縁体（フォノンが主要な熱伝導の担い手）より熱伝導性が良いが、非常に硬いダイヤモンドでは、フォノン（格子振動）を介した熱伝導性が非常に

大きい。ヘリウムが超流動状態になると熱の伝導性が非常に高くなる。

フーリエ解析：ある有限区間上の関数を三角関数の級数で表すことをフーリエ展開といい、無限区間に拡張されたそれをフーリエ変換という。フーリエ解析とは、これらフーリエ展開やフーリエ変換を用いて関数を解析すること、特に関数を周波数成分に分解して調べることである。これは線形微分方程式を解くための極めて強力な武器であるばかりでなく、物理学や工学において光や音、振動、コンピュータグラフィックスなど幅広い分野で用いられている。フーリエは著書『熱の解析的理論』において、「任意の関数は、三角関数の級数で表すことができる」（フーリエの定理）と主張した。この証明は不十分なものであったが、のちに多くの数学者たちによって厳密化が行なわれた。フーリエ解析は「ほとんどあらゆる」関数が周期関数の和として「表せる」という逆説性から多くの数学者たちの注目を浴び、「ほとんどあらゆる」の範囲や「表せる」という根拠をめぐる議論は、まだ関数という言葉の意味すら曖昧だった 19 世紀の解析学の厳密化に貢献した。後のリーマンの積分論やカントールの集合論もこれに関する研究から生まれることになる。

その他の業績：フーリエの最初の論文は方程式の数値解法についてのもので、方程式論や方程式の解法に彼は終生興味を持ち続けた。熱伝導方程式を解くとき、フーリエは単位に注目して解のあたりをつけるということを行なった。これは次元解析のはしりであった。

2.2　フーリエ変換への応用

フーリエ変換とは実数値関数 $f(x)$ について

$$F(a) : a \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx$$

をいう。特に関数に条件があれば、留数定理をもちいてつぎのように計算できる。

定理 2.2.1

(i) $f(z)$ は上半平面で有理形、実軸上にはない有限個の極 z_k をもつ。

(ii) 十分に大きな $|z|$ では、$|f(z)| \leq \dfrac{K}{|z|}$ なる K が存在する。

このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}(e^{iaz}f(z), z_k)$$

(証明)$A, B, T = A+B$ を定数として、矩形 $B+0i, B+Ti, -A+Ti, -A+0i$ を考えて、この中に有限個の極 z_k が含まれているとする。$a = 1$ とも一般性を失わない。辺 $I_1 : z = x + Ti, -A < x < B$ ではその上の積分は $I_1 = \displaystyle\int_{-A+Ti}^{B+Ti} e^{i1z} f(z)dz = \int_{-A}^{B} e^{ix-T} f(x+iT)dx$ より、$|I_1| \leq e^{-T}\displaystyle\int_{-B}^{A} |f(x+iT)|dx \leq e^{-T}\frac{K}{T}(A+B) = e^{-T}K \to 0 (T \to \infty)$ また辺 $I_2 : z = B + iy, 0 < y < T$ での積分は $I_2 = \displaystyle\int_0^T e^{iB-y} f(B+iy)dy$

$|I_2| \leq \displaystyle\int_0^T e^{-y}\frac{K}{|B+iy|}dy \leq \frac{K}{B}\int_0^T e^{-y}dy = \frac{K}{B}(1-e^{-T}) \to 0 (T \to \infty)$ よって $A, B \to \infty$ として $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}(e^{iaz}f(z), z_k)$

とくに

$f(x)$ が偶関数ならば $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\cos ax dx = \pi i \sum_k \mathrm{Res}(e^{iaz}f(z), z_k)$

$f(x)$ が奇関数ならば $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\sin ax dx = \pi \sum_k \mathrm{Res}(e^{iaz}f(z), z_k)$

例題 2.2.1

$a > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$$

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2} = \dfrac{1}{(z-ia)(z+ia)}$, 上半平面には極として $z = ia$ を

もち、そこでの留数を計算すると $\mathrm{Res}(f(z);ia)=\dfrac{e^{-a}}{2ia}$ となる。したがって定理をつかって $(-\infty,\infty)$ での積分が求められて、結局実軸の正の部分のみでは、その半分に等しくなる。

参考文献：「大学テキスト　関数論」小松勇作、梶原譲二著　共立出版

第3章

フーリエ級数

3.1 フーリエ級数

フーリエ級数は微積分に続く解析学での重要な概念のひとつである。微積分では指数関数などの関数をテイラー展開する、$\sum a_n x^n$ の形をしたベキ級数による多項式近似などを議論してきた。この章では、周期 2π をもつ関数 $f(x+2\pi)=f(x)$ を $\sin, \cos$ の三角関数をもちいて展開していく。

フランスのパリ南東オーグゼールに洋服屋の息子として生まれたが、8歳のときに孤児になったという。司教の世話で軍の学校に入り、次第に数学の才能を発揮していった。1789年フランス革命が勃発して、新時代の幕開けとなった。1794年高等師範学校の教授、ついで理工科学校の教授となった。1798年ナポレオンのエジプト遠征に随行したが、事態の急変において きぼりとなった。その後パリにもどり、県知事に任命された。行政にも大いに貢献したが、この間に有名な熱伝導に関する論文をパリの科学学士院に提出した。科学学士院は1811年熱伝導の法則の数学的理論を構成し、この理論の結果と実験の結果を比較せよという懸賞問題を出し、フーリエの成果は彼の名を不朽のものとした。1830年学士院秘書として生涯を閉じた。63歳であった。

より詳しくインターネットなどで資料を参照するとつぎのように調べられている。ジャン・バティスト・ジョゼフ・フーリエ男爵（Jean Baptiste Joseph Fourier, Baron de、1768年3月21日 - 1830年5月16日）は、フランスの数学者・物理学者。固体内での熱伝導に関する研究から熱伝導方程式（フーリエの方程式）を導き、これを解くためにフーリエ解析と呼ばれる理論を展開した。フーリエ解析は複雑な周期関数をより簡単に記述することができるため、音や光といった波動の研究に広く用いられ、現在調和解析という数学の一分野を形成している。このほか、方程式論や方程式の数値解法の研究があるほか、次元解析の創始者と見なされることもある。また統計局に勤務した経験から、確率論や誤差論の研究も行った。

生い立ち：フーリエは 1768 年 3 月 21 日に、フランス中部、ヨンヌ県のオセールで仕立屋の息子として生まれた。8 歳のときに父親の死去によって孤児となり、地元のベネディクト派司教のもとへあずけられた。司教はフーリエを同じくベネディクト派の僧侶が経営する陸軍幼年学校へ入学させた。そこで彼は早くも数学に興味を示し、夜中になってから蝋燭の燃えさしを集めて一人で勉強に没頭した。当時数学を教える学校は士官学校しかなかった。フーリエは貧乏な身分で軍人になれなかったため、卒業後彼は僧侶たちの勧めに従ってサン・ブノワ修道院（聖ベネディクト修道院）で修道士として修行を始めた。修道院でも、並行して数学を学んだ。1789 年、フーリエは『定方程式の解法』と題した論文を発表するためパリへ向かい、そこでフランス革命に遭遇した。身分から開放されたフーリエは、故郷の友人たちのはからいで幼年学校の数学教師になった。

革命後：フランス革命後の恐怖政治によって、多くの科学者が処刑されたり亡命したりしていた。しかし科学の復興が必要と考えた革命政府は学校の設立を奨励し、パリにエコール・ノルマル・シュペリュールやエコール・ポリテクニークといった新しい高等教育機関（グランゼコール）が創設された。1794 年、フーリエはエコール・ノルマル・シュペリュールに第一期生として入学した。エコール・ノルマル・シュペリュールは翌年一時閉鎖されてしまうが、才能を認められたフーリエはラグランジュやモンジュのもとでエコール・ポリテクニークの築城学の助講師に、のち解析数学の教授になった。ここの講義の中で、彼は代数方程式の実数解の個数に関するフーリエの定理を証明した。1798 年、ナポレオンはイギリスとインドの連絡を絶つため、「不幸な人民を救い、文明の恩恵を与える」ことを口実にエジプトへ遠征した。フーリエはこのとき編成された文化使節団の一員に選ばれ、モンジュやベルトレらとともにナポレオンに随行した。フーリエは新設されたエジプト学士院の書記としてさまざまな数学的・考古学的研究を行い、のちに発表された『エジプト誌 (Description de l'Egypte) 』（1808 年-1825 年）も監修した。しかし翌年、ヨーロッパ情勢が不安定になったため、ナポレオンはモンジュ他わずかな部下を伴ってフランスへ逃

げ帰った。このときフーリエは大多数の将兵とともにエジプトに取り残され、帰国したのは 1801 年、イギリスやオスマン帝国との間に停戦協定が成立してからのことであった。

このエジプト滞在中に、フーリエには妙な癖がついた。フランスの寒さと湿気を嫌い、健康と思索のためには砂漠のような熱気と乾燥が必要だと考えるようになったのである。彼は四六時中部屋を締め切って蒸し暑い状態にし、全身に真綿と包帯をミイラのようにぐるぐるに巻いて暮らすようになった。この習慣が心臓に負担をかけ、皮肉なことに逆に彼の死期を早めることになったという。

グルノーブル時代：フランスに帰国したフーリエは、エジプト遠征中に発揮した行政・外交手腕をナポレオンに認められ、1802 年 1 月 2 日にイゼール県知事に任命された。知事としては、革命後悪化していた治安の回復、トリノへの道路の建設、ブルゴア沼沢地の干拓、マラリアの一掃などといった事業を行なった。これらの功績を称えられ、1808 年に彼は皇帝に即位していたナポレオンによって男爵に叙された。知事としてグルノーブルに赴任していた時代は、フーリエが生涯の中でもっとも精力的に活動していた時期だった。知事として多忙な職務をこなし、エコール・ポリテクニークから続けていた方程式論の研究をする一方、固体内における熱伝導を数学的に研究した。熱伝導に関する最初の論文は 1807 年にアカデミー・デ・シアンスに提出された。アカデミーは内容が不十分だとして掲載は見送ったが、その有望さから 1812 年の懸賞論文の題目を「熱の解析的理論」とした。これに応じ、フーリエは大幅に加筆訂正した第二論文を提出した。審査員のひとりであったラグランジュは、その数学的厳密性に難があると厳しく指摘した（実際、ラグランジュも似たことを考えていたが導出にまでは至らなかった）。しかしながら重要性が認められ、この論文はアカデミー大賞を受賞した。電流を論文中における熱の流れと同じように扱ってオームがオームの法則を導き、方程式を解くために導入されたフーリエ級数は解析学に一分野を築くことになるなど、この論文は学界に大きな影響を与えた。また、エジプトから持ち帰った史料の中にあったロゼッタ・ス

トーンを、自身のサロンに出入りしていた当時 12 歳のシャンポリオンに初めて見せたのもフーリエだった。刻まれている三種の文字のうちの一つ（ヒエログリフ）が未解読であることを告げられたシャンポリオンは、「自分がいつか読んでみせる」と宣言し、約 20 年の歳月をかけて解読に成功することになる。

ナポレオン戦争：ライプツィヒの戦いで敗れたナポレオンは、1814 年に退位してエルバ島へ流された。しかしフーリエはラプラスらとともに寝返ってルイ 18 世に忠誠を誓ったため、知事を続けることを認められた。ところが翌 1815 年 3 月 1 日、エルバ島を脱出したナポレオンはフランスに帰還し、パリへ向かって進軍を始めた。エジプトで置き去りにされたことを覚えていたフーリエは自らリヨンへ赴き王党派に通報したが、グルノーブルへ戻ってみるとそこはすでにナポレオンに占領され、部下の兵士たちはその下についてしまっていた。捕らえられたフーリエは再びナポレオンに従ってローヌ県知事に任命されるが、後に強権的姿勢に反対して辞職した。ワーテルローの戦いののちナポレオンはセントヘレナ島へ流され、フランスはみたび王政に戻った。復位したルイ 18 世は裏切りを許さず、フーリエは罷免された。フーリエはパリで財産を売りながら糊口をしのいでいたが、それをみかねた友人のセーヌ県知事シャブロル伯によってセーヌ県統計局長の職を用意してもらうことができた。このころ、職務の関係から生命保険に関する研究を行なった。

晩年：1816 年、アカデミー・デ・シアンスはフーリエを会員に推薦したが、ルイ 18 世はそれを認めなかった。しかしアカデミーは抵抗し、翌年彼は会員に選出された。さらにその後もルイ 18 世やポアソンの反対にもかかわらず勢力を伸ばして 1822 年には終身幹事に、1826 年にはアカデミー・フランセーズ会員となった。他にもラプラスの後をついでエコール・ポリテクニークの理事長になるなど、フーリエの晩年はナポレオンに最後まで従ったため悲惨な末路を辿ったモンジュなどと比べれば、名誉に満ちたものであったといえる。権力欲も旺盛だったようで、当時パリに来ていたアーベルはその学界への君臨ぶりを伝えている。フーリエの最後の数年は、過

去の研究をまとめ、それまでに発表した論文を出版するために費やされた。また、後進の指導にも力を注いだ。たとえば、フーリエ級数が収束するために必要な「ディリクレの条件」を導いたディリクレは彼の教え子の一人である。1830 年 5 月 16 日、下院の選挙でシャルル 10 世に対する反対派が圧勝し、世情が再び革命（7 月革命）へと動いていく中でフーリエは息を引き取った。63 歳だった。心臓病だったとも、動脈瘤だったともいう。20 代の頃から続けていた方程式論の研究をまとめるべく全 7 巻の予定で執筆途中だった『定方程式の解析』は、ナヴィエが遺稿をまとめて 1831 年に 2 冊だけが出版された。

参考文献：「数学をつくった人々II」ベル著、東京図書
「解析学入門」数学セミナーリーディング、日本評論社１９８０年

そもそも三角関数による級数をもちいて関数を表すことの起源は有名なオイラーによるものが多い。オイラーの見出した結果（1749 年）では、天文学の研究において二つの惑星間の距離の逆数を、その動径ベクトル間の角の整数倍を cos の級数で表していたが、これを $\cos nx$ の形で級数にすると項数が少なくても非常に精度のよい計算ができることを示した。

これ以前にもオイラーは

$$\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}=1+r\cos x+r^2\cos 2x+\cdots$$

$$\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}=r\sin x+r^2\sin 2x+\cdots$$

を 1748 年に導き、1754 年には

$$\frac{\cos mx-r\cos(m-1)x}{1-2r\cos x+r^2}=\cos mx+r\cos(m+1)x+r^2\cos(m+2)x+\cdots$$

$$\frac{\sin mx-r\sin(m-1)x}{1-2r\cos x+r^2}=\sin mx+r\sin(m+1)x+r^2\sin(m+2)x+\cdots$$

という式を $\dfrac{z^m}{1-z}=z^m+z^{m+1}+z^{m+2}+\cdots$ から得ている。

また関数を三角級数によって表現する問題は、弦の振動を問題とした 1715 年のテイラーは、振動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を導き、この解が $u=$

$A\sin bx\sin abt$ であることを示した。さらにベルヌーイ 1741 年は両端を固定した弦の振動が $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos nt\sin nx$ という形であることを導いた。

この時代には級数が収束すとかしないとかに全く無頓着であったから、いろいろと不都合が起こることに気がかりであった。しかし 1772 年ベルヌーイは $\frac{1}{2}(\pi-x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots$ が $0<x<2\pi$ で得られることを示している。

熱伝導の方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

について、$u(t,x)=\phi(t)g(x)$ という形であるとして変数分離の方法をもちいて解く。代入すると $\phi'(t)g(x)=\phi(t)g''(x)$ より、

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}=\frac{g''(x)}{g(x)}$$

ここで左辺は t の関数、右辺は x の関数であるが、独立変数であることからこれが等しくなるためには、この値は定数でなければならない。これを λ とおけば、

$$\begin{cases} g(x)=c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x} \\ g(x)=c_1+c_2x \\ g(x)=c_1\cos\sqrt{|\lambda|}x+c_2\sin\sqrt{|\lambda|}x \end{cases}$$

が $\lambda>0,=0,<0$ の場合に得られる。境界条件から $x=0,x=l$ で温度がゼロとするから、$\lambda<0$ の場合しか、あり得ない。またその条件式から $g(0)=0,g(l)=0$ として $\sin(\sqrt{|\lambda|}l)=0$ より、$\sqrt{|\lambda|}l=n\pi\quad(n=1,2,\cdots)$ つまり $\lambda=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$

したがって $\phi'(t)=\lambda\phi(t)$ より $\phi(t)=ae^{\lambda t}$ よって求める解は

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \phi(t)g(x) \\ &= b_n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{aligned}$$

この係数 b_n は初期条件 $u(0,x)=f(x)$ から定められる $t=0$ とおくことで

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

つまり関数が三角関数の級数で表されることになった。ここで

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

denki_math_02 : 2008/4/6(17:48)

第4章

ラプラス変換

4.1 ラプラス

ピエール＝シモン・ラプラス（Pierre-Simon Laplace, 1749 年 3 月 23 日 - 1827 年 3 月 5 日）はフランスの数学者。「天体力学」と「確率論の解析理論」という名著を残した。「天体力学」においては、剛体や流体の運動を論じたり、地球の形や潮汐の理論までも含んでいる。数学的にはこれらの問題はさまざまな微分方程式を解くことに帰着されるが、方法論的にも彼が発展させた部分もあり、特に誤差評価の方法などは彼自身の確率論の応用にもなっている。また、現在ベイズの定理として知られているものも、ラプラスが体系化したものであるので、ベイズよりもラプラスに端を発するという見方も強い。ラプラス変換の発見者。決定論者としても知られる。これから起きるすべての現象は、これまでに起きたことに起因すると考えた。ある特定の時間の宇宙のすべての粒子の運動状態が分かれば、これから起きるすべての現象はあらかじめ計算できるという考え方である（ラプラスの悪魔を参照)。しかし、ラプラスの死後、量子力学が成立すると、この考え方は成り立たないことが判明した。他に、ラプラスの星雲説などで知られる。

ラプラス変換（ラプラスへんかん）とは、積分で定義される関数空間の間の写像（線型作用素）の一種。関数変換。ラプラス変換の名はピエール＝シモン・ラプラスにちなむ。ラプラス変換によりある種の微分・積分は積などの代数的な演算に置き換わるため、制御工学などにおいて時間の（とくに超越的な）関数を別の（おもに代数的な）関数に変換することにより、計算の見通しをたてるための便法として用いられる。

4.2 基本事項

定義: 関数 $f(t)$ のラプラス変換とは

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

で定義される s の関数 $F(s)$ のことである。右辺の積分はラプラス積分と呼ばれる。注意することは t は実変数であって、s は複素変数であること。この無限積分が収束するとき、ラプラス変換またはラプラス積分という。また、j を虚数単位、$c > 0$ として、関数 $F(s)$ から 元の関数 $f(t)$ を計算することを逆ラプラス変換といい、

$$f(t) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-jp}^{c+jp} F(s)e^{st}\,ds$$

のように求めることができる。ラプラス変換の他の記述の仕方として、次のようなものもある。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

同様に逆ラプラス変換は、次のようにも記述される。

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

また、これらの記号を用いた写像

$$\mathcal{L}\colon f \mapsto F, \qquad \mathcal{L}^{-1}\colon F \mapsto f$$

のことも、それぞれラプラス変換、逆ラプラス変換と呼ばれることがある。

性質: ラプラス変換と逆ラプラス変換は互いに他の逆変換である。

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L} = \mathrm{identity}.$$

線形性: ラプラス変換は線型性を持ち、したがって特に重ね合わせの原理を用いて計算することが可能である。ラプラス変換が線型性を持つとは、

任意の関数 $f(t)$, $g(t)$ に対して

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)](s) = aF(s)+bG(s)$$

が成り立つということである。ただし、a, b は t に関係しない定数。逆ラプラス変換も同様で、

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s)+bG(s)](t) = af(t)+bg(t)$$

が成り立つ。したがって、与えられた関数を部分分数分解できるとき、各因子がラプラス変換の表にあるものに合致すれば、その変換が求められる。

微分式: 時間 t に関する導関数のラプラス変換は多項式の差となって現れる。実際に、一階の導関数をラプラス変換すると以下のように $f(0)$（元の式に 0 を代入した値）が現れる。

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s)-f(0)$$

また、二階導関数の場合は $f(0)$ に加え、$t=0$ における微分係数 $f'(0)$ が現れる。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

これを繰り返すと、一般の n 階の導関数のラプラス変換は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\tfrac{d^nf(t)}{dt^n}\right] \\
=\ & s^nF(s)-\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0) \\
=\ & s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f^{(1)}(0)-s^{n-3}f^{(2)}(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

積分式: $\lim_{t\to\infty}e^{-st}\int_0^t f(x)=0$ のとき

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{s}F(s).$$

なぜならば、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\textstyle\int_0^t f(u)du\right] = \textstyle\int_0^\infty\left(\int_0^t f(x)dx\right)e^{-st}dt \\
&= \left[-\frac{e^{-st}}{s}\textstyle\int_0^t f(x)dx\right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{s}\textstyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \tfrac{1}{s}F(s).
\end{aligned}$$

畳み込み: 関数の畳み込みはラプラス変換で積（値ごとの積）にうつされる。

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)\,G(s).$$

これは、$H(s) = F(s)G(s)$ かつ

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)],\ G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$$

ならば

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s)] = f(t) * g(t)$$

と書くこともできる。

ラプラス逆変換は因数分解と同じように考えられるから、基本と対応を表にまとめる。原関数 $f(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ とおく。

もとの関数	ラプラス変換	備考
$f(t)$	$F(s)$	この表で使う関数 $F(s)$ の定義
$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$	$(a>0)$
$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$(a>0)$
$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{1}{s}F(s)$	
$\delta(t)$	1	$\delta(t)$ は デルタ関数（インパルス関数）
$H(t)$	$\frac{1}{s}$	$H(t)$ は ヘヴィサイドの 階段関数（ステップ関数） Re $s>0$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	n は自然数
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	Γ はガンマ関数 $(\alpha>-1)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	$\frac{d^n}{ds^n}F(s)=F^{(n)}(s)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)$ $-\sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0)$	$f^{(0)}(s)=f(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(t)dt$	
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$	符号に注意
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	符号に注意
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	
t^ne^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	
$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	
$tf(t)$	$-F'(x)$	
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$	
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$	

最終値の定理（さいしゅうちのていり）とは、ラプラス変換を用いて原関数の極限を表す定理である。

定理 4.2.1
t の関数 $f(t)$ が $t>0$ で微分可能、かつ $\frac{d}{dt}f(t)$ のラプラス変換が $s=0$ で収束するならば、

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \qquad s\in\Delta_0$$

が成り立つ。ただし、Δ_0 は $s=0$ を含む角領域である。

問 4.2.1
つぎを求めよ。ただし $\mathrm{Re}s>0$

1. $\mathcal{L}\{t^2\}$
2. $\mathcal{L}\{t^3\}$
3. $\mathcal{L}\{\dfrac{1}{\sqrt{t}}\}$ (答え) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$
4. $f(t)=3t^5+7t^2$ のとき、$\mathcal{L}\{f(t)\}$ (答え)$\mathcal{L}\{3t^5+7t^2\}=3\cdot\dfrac{5!}{s^6}+7\cdot\dfrac{2!}{s^3}$

問 4.2.2

1. $f(t)=5\cos t+7\sin t$ のとき、ラプラス変換を求めよ。(答え)$\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{5s+7}{s^2+1}$
2. $f(t)=2\sin 2t\cos 2t+2\cos 5t$ のとき、ラプラス変換を求めよ。(答え)$\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{2s^3+4^s+32^s+100}{(s^2+16)(s^2+25)}$
3. $f(t)=2\sin 5t\cos 3t$ のとき、ラプラス変換を求めよ。(答え)$\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{8}{s^2+64}+\dfrac{2}{s^2+4}$

問 4.2.3
つぎの畳み込みとそのラプラス関数を求めよ。

1. $\sin * \cos t$ (答え)$\frac{1}{2}t\sin t,\ \frac{s}{(s^2+1)^2}$

2. $e^{-at} * e^{-bt}$ (答え) $\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a},\ \frac{1}{(s+a)(s+b)}$

3. $e^{-at} * \cos bt$ (答え) $\frac{1}{a^2+b^2}(a\cos bt + b\sin bt),\ \frac{s}{(s+a)(s^2+b^2)}$

4.3 常微分方程式への応用

ラプラス変換を用いた微分方程式の解法は、与えられた微分方程式の両辺に変換を施し、その像関数を整理して、最後に逆変換をおこない、解を求める。

例題. $\frac{d^2}{dt^2}f(t)+f(t)=0$ を解け。ただし $f(0)=3,\ f'(0)=5.$

(解) 両辺にラプラス変換を施すと、$\mathcal{L}\{f''(t)\}+\mathcal{L}\{f(t)\}=0,$ これから $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ とすると、$\{s^2F(s)-sf(0)-f'(0)\}+F(s)=0$ ゆえに $(s^2+1)F(s)=3s+5,$ すなわち $F(s)=3\cdot\frac{s}{s^2+1}+5\cdot\frac{1}{s^2+1}$ 逆変換することで $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=3\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}+5\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}$ ゆえに $f(t)=3\cos t+5\sin t.$ (終わり)

例題. $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-35y=4,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$ を解け。

(解) $y''-2y'-35y=4$ の両辺に変換を施すと、$\mathcal{L}\{y''-2y-35y\}=\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}-2\{sY(s)-y(0)\}-35Y(s),\ \mathcal{L}\{4\}=4/s.$ ゆえに $(s^2-2s-35)Y(s)=1+\frac{4}{s}$ から $Y(s)=\frac{s+4}{s(s+5)(s-7)}$ ここで部分分数に分解すれば、$Y(s)=-\frac{4}{35}-\frac{1}{60(s+5)}+\frac{11}{84(s-7)}$ したがって $y(t)=-\frac{4}{35}-\frac{e^{-5t}}{60}+\frac{11}{84}e^{7t}$ (終わり)

例題. $t\frac{d^2y}{dt^2}-(2t+1)\frac{dy}{dt}+(t+1)y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$ を解け。

(解) 両辺にラプラス変換を施して $\mathcal{L}\{ty''\}-2\mathcal{L}\{ty'\}-\mathcal{L}\{y'\}L\mathcal{L}\{ty\}+\mathcal{L}\{y\}=0\ \therefore -\frac{d}{ds}\{s^2Y(s)\}+2\frac{d}{ds}\{sY(s)\}-sY(s)-\frac{d}{ds}Y(s)+Y(s)=0.$ こ

れを整理すれば、$\dfrac{Y'}{Y} = -\dfrac{3}{s-1}, \therefore \log Y = -3\log c_1(s-1)\ Y = \dfrac{c_2}{(s-1)^3)}$ ここで c_1, c_2 は定数。逆変換をすることで $y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{c_2}{(s-1)^3}\right\} = ct^2e^t$ (c は定数)。(終わり)

例題。 つぎの連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x'' - y'' + 2x' = 2 \\ x'' + y'' + 2y' = -2 \end{cases}$$

ただし $x(0) = 1, x'(0) = 0, y(0) = y'(0) = 0.$

(解) $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = y(s)$ とおく。それぞれにラプラス変換を施す。$\mathcal{L}\{x'\} = sX - x(0)$, $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$. さらに $\mathcal{L}\{x''\} = s^2X - sx(0) - x(0)$, $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y(0)$. 初期値を代入すると、つぎの方程式に帰着され、

$$\begin{cases} s(s+2)X - s^2Y = s + 2 + \dfrac{2}{s} \\ s^2X + s(s+2)Y = s - \dfrac{2}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} + \dfrac{1}{s^2} \\ Y = \dfrac{1}{(s+1)^2+1} - \dfrac{1}{s^2} \end{cases}$$

よって $x = \mathcal{L}^{-1}\{X\}$, $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}$ から、$x = \mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} + \dfrac{1}{s^2}\} = e^{-1}\cos t + t$、$y = \mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{1}{(s+1)^2+1} - \dfrac{1}{s^2}\} = e^{-1}\sin t - t$ (終わり)

問 4.3.1
$\dfrac{d^3}{dt^3}x + \dfrac{dx}{dt} = 0$ を $x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 5$ で解け。(答え) $x(t) = 5t - 5\cos t$

問 4.3.2
$\dfrac{d^4}{dt^4}x - \dfrac{d^2}{dt^2}x = 0$ を $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = 6$ で解け。(答え) $x(t) = -6t^2 - 3e^{-t} + 3e^t$

問 4.3.3

つぎの連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x' + y = t \\ y' - x = t \end{cases}$$

ただし $x(0) = 0, y(0) = 0$ とする。(答え）$x(t) = 1 - t - \cos t + \sin t$, $y(t) = 1 + t - \cos t - \sin t$.

問 4.3.4

つぎの連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x' - x + y = -2 \\ y' - x - y = 0 \end{cases}$$

ただし $x(0) = 2, y(0) = -1$ とする。(答え）$x(t) = 1 + e^t \cos t$, $y(t) = -1 + e^t \sin t$.