シミュレーション, 中心極限定理

擬似乱数； x_0 :*seed*; repeat : $x_n = ax_{n-1}$ modulo m（乗数合同法）x_0 :*seed*; repeat : $x_n = (ax_{n-1} + c)$ modulo m（混合合同法）

乱数発生; パソコンや電卓などでは簡単に（正確かどうかは問わなければ）単位区間 $(0,1)$ のあいだの数を生成できる。この U を一様乱数とよぶ。これをもとにさまざまな乱数が新たに作り出せる。“RANDOMIZE; U:=RND.”

積分の近似 関数 $y = g(x)$ の原始関数が求められなくても計算できる。なぜならば，$E[g(U)] = \int_0^1 g(x)dx$ で大数の法則を用いているから。

(1) 関数 $y = g(x), 0 \le x \le 1$ の積分 $\int_0^1 g(x)dx$ の近似値；“ RANDOMIZE; INPUT K; S=0; FOR I=1 TO K; U=RND; S=S+g(U); NEXT; PRINT S/K. ”

(2) 関数 $y = g(x), a \le x \le b$ の積分 $\int_a^b g(x)dx$ の近似値；$h(y) = (b-a)g(a+[b-a]y)$ とおけば、$\int_a^b g(x)dx = \int_0^1 h(x)dx$

(3) 関数 $y = g(x), 0 \le x \le \infty$ の積分 $\int_0^\infty g(x)dx$ の近似値；$y = 1/(x+1)$ とおけば、$\int_0^\infty g(x)dx = \int_0^1 h(x)dx, \quad h(y) = \dfrac{g(1/y-1)}{y^2}$

逆変換法による乱数の生成 $P[X = x_j] = p_j, j = 0, 1, 2\cdots, \sum_j p_j = 1$

$U \sim (0,1)$ 上の一様分布 $\Longleftrightarrow X = x_j \quad \text{if} \sum_{i=1}^{j-1} p_i \le U \le \sum_{i=1}^{j} p_i$.

幾何分布に従う乱数の例：$P[X = i] = pq^{i-1}, i \ge 1, q := 1-p$ で $X = j \Longleftrightarrow 1 - q^{j-1} \le U < 1 - q^j \Longleftrightarrow q^j < 1 - U \le q^{j-1}$. パラメータ n, p の 2 項乱数の例：Step 1: U の一様乱数の生成. Step 2: $c := p/(1-p), i := 0, pr := (1-p)^n, F := pr$. Step 3: If $U < F$, then $X := i$ and Stop. Step 4: $pr := [c(n-i)/(i+1)]pr, F := F + pr, i := i + 1$. Step 5: Goto Step 3. なぜなら $P[X = i] = \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$ について $P[X = i+1] = \dfrac{n-1}{i+1}\dfrac{p}{1-p}P[X = i]$ が成り立つから。

棄却採択法による乱数の生成 ある確率密度 $\{q_0, q_1, q_2, \cdots\}$ が与えられていたとき、これをもちいて $P[X = j] = p_j, j = 0, 1, 2, \cdots$ となる確率変数 X をつぎのアルゴリズムで生成できる。Step 1: Y を確率密度 q_j で生成する。Step 2: 一様乱数 U を生成。Step 3: If $U < \dfrac{p_Y}{cq_Y}$, then $X = Y$ and stop, otherwise return to Step 1. なぜなら，$P[Y = j, accepted] = P[Y = j]P[accepted|Y = j] = q_j\dfrac{p_j}{cq_j} = \dfrac{p_j}{c}$. これを加え合わせると，$P[accepted] = \sum_j \dfrac{p_j}{c} = \dfrac{1}{c}$ さらに $P[X = j] = \sum_n P[$値 j が n 回目で $accept] = \sum_n P[$値 j が $n-1$ 回目まで $not\,accept, n$ 回目で $accept] = \sum_n \left(1 - \dfrac{1}{c}\right)^{n-1}\dfrac{p_j}{c} = p_j$

例題.

確率 q_j	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
Y の値 j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X の値 j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
確率 p_j	.11	.12	.09	.08	.12	.10	.09	.09	.10	.10

$c = \max_j \dfrac{p_j}{q_j} = 1.2$ と選び，Step 1: 一様乱数 U_1 から，$Y = Int[10U_1] + 1$ とおく（Int は整数を返す関数）。Step 2: 2 番目の一様乱数 U_2 をつくる。Step 3: If $U_2 \le \dfrac{p_Y}{0.12}$, then put X:=Y and stop. Otherwise return to Step 1.

正規乱数の生成 平均 0，分散 1 の標準正規分布にしたがう乱数をつくるには，12 個の一様乱数を足し合わせて，これから 6 を引けば，1 個の正規乱数が作れる。**中心極限定理** 平均 μ, 分散 σ^2 をもつ独立同一分布の確率変数は，n が大きいとき，標本平均 $\overline{X_n}$ を基準化して $\dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$ に近づく。乱数の生成にはこの左辺の式が $n = 12$ で $\mu = 1/2$, 分散 $\sigma^2 = 1/12$ より $X_1 + \cdots + X_{12} - 6$ に等しいから。