2

確　　率

2-1　標本空間と事象

同一条件の下での繰り返しが可能で，その結果が偶然に支配されるとみなせるような実験や観測を**試行**という．ある試行で起こるすべての結果の集合を**標本空間**といい，S で表す．S を構成する個々の結果を**標本点**，S の任意の部分集合を**事象**という．特に，1つの標本点のみからなる事象を**根元事象**という．

2-2　確率の定義

定義（1）　S を構成しているすべての標本点の起こりやすさが**同様に確からしい**とき，事象 E の起こる確率を

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

で定義する．ここで，$n(E)$ と $n(S)$ はそれぞれ事象 E と標本空間 S に含まれる標本点の個数である．この $P(E)$ を事象 E の**確率**(または**数学的確率**)という．

定義（2）　n 回の試行で事象 E が r 回起こったとき，事象 E の起こる確率を，$n\to\infty$ のときの相対度数 $\dfrac{r}{n}$ の極限値で定義する．すなわち

$$P(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}$$

この確率を事象 E の**経験的確率**(または**統計的確率**)という．n が大きいときの相対度数は経験的確率の近似値とみなされる．

確率の公理　次の3公理をみたす測度 $P(E)$ を事象 E の確率と定義する．

1°　$0\leqq P(E)\leqq 1$

2°　$P(S)=1$

3°　$E_i \cap E_j = \phi \ (i \neq j)$ ならば，$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots$

2-3　事象と記号

和事象	$E_1 \cup E_2$	E_1 または E_2 が起こるという事象
積事象	$E_1 \cap E_2$	E_1 および E_2 が起こるという事象
余事象	$\overline{E}$	E が起こらないという事象
全事象	S	必ず起こる事象
空事象	ϕ	起こり得ない事象

2-4　確率の基本定理

（1）　任意の事象 E に対して

$$0 \leqq P(E) \leqq 1$$

特に，　$P(S)=1, \quad P(\phi)=0$

（2）　**余事象の確率**

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

（3）　**加法定理**

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

特に，E_1 と E_2 が互いに**排反**ならば

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

（4）　事象 E_1 が起こったという条件下で事象 E_2 の起こる**条件つき確率**を $P(E_2|E_1)$ で表し，次で定義する．

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

（5）　**事象の独立性**

$$E_1 \text{ と } E_2 \text{ が独立} \iff P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

（6）　**乗法定理**

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2|E_1) = P(E_2)P(E_1|E_2)$$

特に，E_1 と E_2 が独立ならば

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

2-5 ベイズの定理

n 個の事象 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ は，$E_i \cap E_j = \phi$ $(i \neq j)$，$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = S$ とする．B を任意の事象（ただし，$P(B) \neq 0$）とするとき，次が成り立つ．

ベイズの定理　$$P(E_k|B) = \frac{P(E_k)P(B|E_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(B|E_j)} \qquad (k=1, 2, \cdots, n)$$

例　題

例題 1　**（標本空間と確率）**

2個のサイコロを転がすとき，次を求めよ．

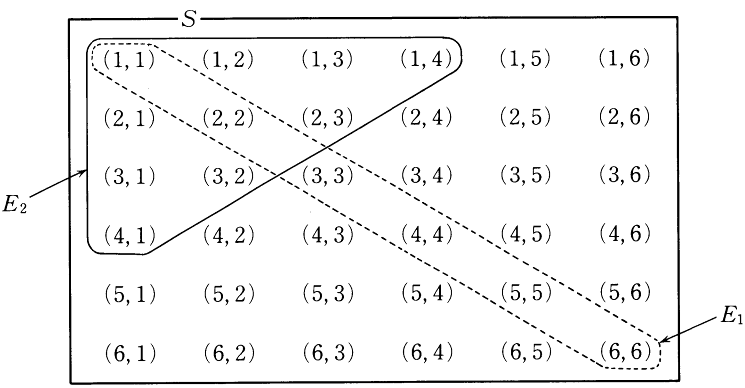
（a）　標本空間 S.

（b）　両方が同じ目を出す確率.

（c）　目の和が5以下である確率.

（d）　(b)または(c)が起こる確率.

解　（a）　標本空間 S は



同じ目が出る事象を E_1，目の和が5以下である事象を E_2 とすると，

$E_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$E_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

上の図より，

$$n(S) = 36, \quad n(E_1) = 6, \quad n(E_2) = 10, \quad n(E_1 \cap E_2) = 2$$

各標本点は同様に確からしいから

(b)　$P(E_1)=\dfrac{n(E_1)}{n(S)}=\dfrac{6}{36}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

(c)　$P(E_2)=\dfrac{n(E_2)}{n(S)}=\dfrac{10}{36}=\mathbf{\dfrac{5}{18}}$

(d)　$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{18}-\dfrac{2}{36}=\mathbf{\dfrac{7}{18}}$

例題 2　**(経験的確率)**

次の表は新生児1万人が特定の年齢まで生き残ると期待される人数を示したものである．

年齢	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
生存者数	10000	9590	9510	9295	9067	8651	7590	5278	3625	1530

この表を用いて，次の確率を求めよ．

(a)　いま生まれた新生児がこの後10年以内に死ぬ．

(b)　いま生まれた新生児が60歳まで生きる．

(c)　いま生まれた新生児が30歳から40歳までの間に死ぬ．

(d)　いま40歳の人が今後10年以内に死ぬ．

解　(a)　新生児1万人のうち，10歳までに死ぬのは $10000-9590=410$ (人)だから，求める確率は $\dfrac{410}{10000}=\mathbf{0.041}$.

(b)　新生児1万人のうち，60歳まで生き残る人は7590人いるので，求める確率は $\dfrac{7590}{10000}=\mathbf{0.759}$.

(c)　30歳から40歳までに死亡する人は $9295-9067=228$ (人) いるから，求める確率は $\dfrac{228}{10000}=\mathbf{0.0228}$.

(d)　これは条件つき確率で，40歳まで生きた人9067人のうち，50歳までに死亡する人は $9067-8651=416$ (人) だから，求める確率は $\dfrac{416}{9067}=\mathbf{0.0459}$.

例題 3 (ベン図と確率)

ある市では A, B, C の 3 紙の新聞が販売されている. この市で世帯を対象に新聞購読調査を行った結果, 次のことがわかった.

20%が A を購読.
16%が B を購読.
14%が C を購読.
8%が A, B の 2 紙を購読.
5%が A, C の 2 紙を購読.
4%が B, C の 2 紙を購読.
2%が A, B, C の 3 紙を購読.

このとき, 3 紙のうち

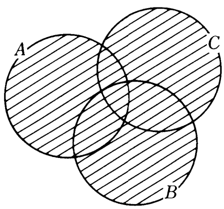
(a)　少なくとも 1 紙,
(b)　1 紙のみ,
(c)　A 紙のみ

を購読する世帯の割合を求めよ.

解　ベン図を使って解く. 題意から

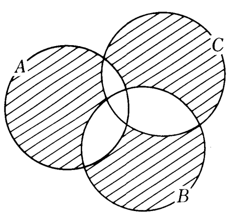
$$P(A)=0.20,\ P(B)=0.16,\ P(C)=0.14,\ P(A\cap B)=0.08,$$
$$P(A\cap C)=0.05,\ P(B\cap C)=0.04,\ P(A\cap B\cap C)=0.02$$

(a)



$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)\\&\quad-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)\\&=0.20+0.16+0.14-0.08-0.05-0.04+0.02\\&=\mathbf{0.35}\end{aligned}$$

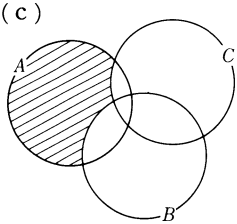
(b)



左図より

$$\begin{aligned}&P(A\cup B\cup C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)\\&\quad-P(B\cap C)+2P(A\cap B\cap C)\\&=0.35-0.08-0.05-0.04+2\times0.02\\&=\mathbf{0.22}\end{aligned}$$

（c）



左図より

$P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

$=0.20-0.08-0.05+0.02$

$=\mathbf{0.09}$

例題 4　（ベン図と確率）

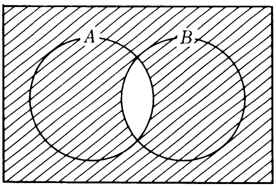
$P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A\cap B)=c$ とするとき，次の事象の確率を a, b, c で表せ．

（a）　$\overline{A}\cup\overline{B}$　　（b）　$\overline{A}\cap\overline{B}$　　（c）　$\overline{A}\cup B$

（d）　$\overline{A}\cap B$　　（e）　$\overline{A\cup B}$　　（f）　$\overline{A\cap B}$

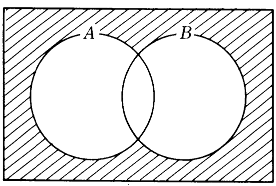
解　このような問題を解くときには，必要に応じてベン図を使うと便利である．

（a）



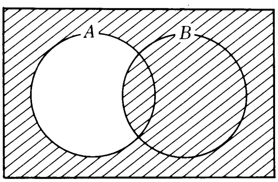
$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})$$
$$=1-P(A\cap B)$$
$$=\mathbf{1-c}$$

（b）



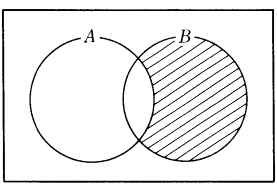
$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$$
$$=1-P(A\cup B)$$
$$=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$$
$$=\mathbf{1-a-b+c}$$

（c）

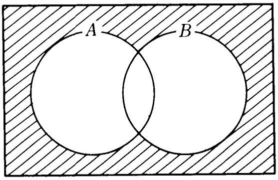


$$P(\overline{A}\cup B)=\mathbf{1-a+c}$$

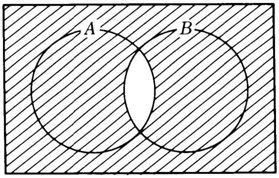
（d）



$$P(\overline{A}\cap B)=\mathbf{b-c}$$

（e） 

$$P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$$
$$=\mathbf{1-a-b+c}\qquad（（b）と同値）$$

（f） 

$$P(\overline{A\cap B})=P(\overline{A}\cup\overline{B})$$
$$=\mathbf{1-c}\qquad（（a）と同値）$$

例題 5（確率の計算）

ある選挙では夫婦のうち夫が投票する確率は 0.5，妻が投票する確率は 0.6，夫が投票したことがわかったとき，その妻が投票する確率は 0.9 であるという．この選挙で

（a） 夫妻がともに投票する確率，

（b） 夫妻のうち，少なくとも一方が投票する確率，

（c） 妻が投票したことがわかったとき，その夫が投票する確率

を求めよ．

解 夫が投票する確率を $P(A)$，妻が投票する確率を $P(B)$ とする．

（a） 題意より $P(A)=0.5$，$P(B|A)=0.9$ であるから

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$
$$=0.5\times0.9=\mathbf{0.45}$$

（b） $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=0.5+0.6-0.45$$
$$=\mathbf{0.65}$$

（c） $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.45}{0.6}=\mathbf{0.75}$

例題 6（確率の計算）

A と B は互いに排反な事象で，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.8$ である．いま，$P(C|A)=0.4$，$P(C|B)=0.5$ のとき，$P(A|C)$ を求めよ．

解

$$0.4=P(C|A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{P(C\cap A)}{0.2}\Rightarrow P(C\cap A)=0.08$$

$$0.5=P(C|B)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(C\cap B)}{0.8}\Rightarrow P(C\cap B)=0.40$$

A と B が排反ならば，$C\cap A$ と $C\cap B$ も排反であるから

$$\begin{aligned}P(C)&=P((C\cap A)\cup(C\cap B))\\&=P(C\cap A)+P(C\cap B)\\&=0.08+0.40=0.48\end{aligned}$$

よって，

$$P(A|C)=\frac{P(C\cap A)}{P(C)}=\frac{0.08}{0.48}=\frac{1}{6}\fallingdotseq\mathbf{0.167}$$

例題 7　（確率の計算）

2 次方程式

$$x^2+ax+b=0$$

の 2 つの係数をサイコロの 2 回の投げで決めるとき，得られた 2 次方程式が

（a）　実数解，（b）　有理解

をもつ確率を求めよ．

解　サイコロの 2 回の投げで決まる (a, b) のすべての組合せは，次の 36 通りである．

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

（a）　2 次方程式で実数解をもつのは，判別式が $D=a^2-4b\geqq 0$ を満たすときで，これを満たす (a, b) の組合せは

(2, 1)，(3, 1)，(3, 2)，(4, 1)，(4, 2)，(4, 3)，(4, 4)，(5, 1)，(5, 2)，(5, 3)，
(5, 4)，(5, 5)，(5, 6)，(6, 1)，(6, 2)，(6, 3)，(6, 4)，(6, 5)，(6, 6)

の 19 組だから，求める確率は $\mathbf{\dfrac{19}{36}}$．

（b）　2 次方程式が有理解をもつのは，判別式 $D=a^2-4b$ が 0 か，有理数の平方であればよい．

これを満たす (a, b) の組合せは，

$$(2, 1),\ (3, 2),\ (4, 3),\ (4, 4),\ (5, 4),\ (5, 6),\ (6, 5)$$

の 7 組だから，求める確率は $\mathbf{\dfrac{7}{36}}$.

例題 8　（確率の計算）

52 枚のトランプ札をよく切って 4 人のプレーヤーにそれぞれ 13 枚ずつ配るとき

（a）　特定のプレーヤーの手にある種類の札が一枚も含まれない確率，

（b）　特定のプレーヤーの手にエースが 4 枚とも配られる確率

を求めよ．

（c）　ゲームを繰り返して，特定のプレーヤーがすべてのエースを少なくとも 1 回受けとる確率を 0.5 以上とするためには何回のゲームが必要か．

解　（a）　特定のプレーヤーの手にある種類の札，たとえばスペードがこない確率は，このプレーヤーの手にスペードを除いた 39 枚の中から 13 枚がくればよいから

$$\frac{{}_{39}C_{13}}{{}_{53}C_{13}}=\frac{\dfrac{39!}{13!26!}}{\dfrac{52!}{13!39!}}\fallingdotseq 0.01279$$

ハート，クラブ，ダイヤについても同じことが考えられるから，求める確率は

$$0.01279\times 4\fallingdotseq \mathbf{0.051}$$

（b）　エースが 4 枚配られる確率は，13 枚中 4 枚がエースで，あとの 9 枚がエース以外の 48 枚からとられればよいから

$$\frac{{}_4C_4\times{}_{48}C_9}{{}_{53}C_{13}}=\frac{\dfrac{48!}{9!39!}}{\dfrac{52!}{13!39!}}=\mathbf{0.0026}$$

（c）　1 回のゲームで，特定のプレーヤーに 4 枚のエースが配られる確率を p，配られない確率を q とする．題意より

$$\sum_{r=1}^{n}{}_nC_r p^r q^{n-r}\geqq 0.5$$

を満たす n を求めればよい．この不等式の左辺は $1-q^n$ に等しく，(b)より，$q=1-p=1-0.0026=0.9974$ であるから

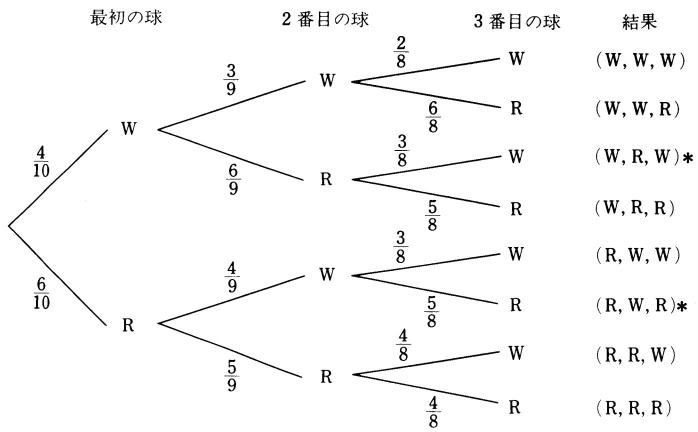
$$(0.9974)^n \leqq 0.5$$
$$n \log 0.9974 \leqq \log 0.5$$
$$n \geqq 266.24$$

よって，**267 回以上.**

例題 9　（**樹形図と確率**）

4 個の白球と 6 個の赤球を含む箱から，非復元抽出で 1 個ずつ無作為に 3 個をとるとき，同じ色の球が続けて出ない確率を求めよ．

解　白球を W，赤球を R で表し，次の樹形図を作る．



同じ色の球が続けて出ない場合は＊印のついた (W, R, W) と (R, W, R) の場合で，これらは互いに排反であるから，求める確率は

$$P\{(\mathrm{W, R, W}) \cup (\mathrm{R, W, R})\}$$
$$= P\{(\mathrm{W, R, W})\} + P\{(\mathrm{R, W, R})\}$$
$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \mathbf{\frac{4}{15}}$$

例題 10 （ベイズの定理）

3つの袋をA, B, Cとする．各袋は10個の球を含み，Aは白球3個と赤球7個，Bは白球5個と赤球5個，Cは白球7個と赤球3個を含む．いま，1つの袋をランダムに選び，選ばれた袋から1球をとり出したら白球が出た．この球がA, B, Cのそれぞれから出たという確率を求めよ．

解 白球がとり出されるという事象を W とすると，与えられた情報より

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$$

$$P(W|A)=\frac{3}{10},\quad P(W|B)=\frac{5}{10},\quad P(W|C)=\frac{7}{10}$$

よって，ベイズの定理から

$$P(A|W)=\frac{P(A)P(W|A)}{P(A)P(W|A)+P(B)P(W|B)+P(C)P(W|C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

$$P(B|W)=\frac{P(B)P(W|B)}{P(A)P(W|A)+P(B)P(W|B)+P(C)P(W|C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{5}{10}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$$P(C|W)=1-P(A|W)-P(B|W)$$

$$=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{7}{15}}$$

2章の問題

2.1 （a） $P(A\cup B)=\frac{7}{8}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(\overline{A})=\frac{5}{8}$ のとき，

（i） $P(A)$,（ii） $P(\overline{B})$,（iii） $P(A\cap\overline{B})$

を求めよ．

（b） $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$ のとき，

（i） $P(A|B)$,（ii） $P(B|A)$,（iii） $P(A\cup B)$,（iv） $P(\overline{A}|B)$

を求めよ．

2.2 2つの袋AとBがある．Aは2個の赤球と8個の白球を含み，Bは3個の赤球と7個の白球を含む．サイコロを投げ，1または2の目が出たらAから1球をとり出し，1, 2以外の目が出たら，Bから1球をとり出す．サイコロの投げで，1または2の目が出る事象をX，赤球がとり出される事象をYとするとき，次の確率を求めよ．

(a) $P(X)$,　(b) $P(Y)$,　(c) $P(X\cap Y)$,　(d) $P(Y|X)$,
(e) $P(\overline{X}\cap Y)$

2.3 第1の箱はa個の赤球とb個の青球とc個の白球を含み，第2の箱は，p個の赤球とq個の青球とr個の白球を含む．いま，硬貨を投げ，おもてが出たら第1の箱から，うらが出たら第2の箱から，非復元抽出で2個の球を無作為にとり出す．どちらの箱も40個の球を含むとき，とり出した2個が同じ色である確率は

$$\frac{1}{3120}(a^2+b^2+c^2+p^2+q^2+r^2)-\frac{1}{39}$$

となることを示せ．

2.4 あるゲームをA, B, Cの3人で競う．AがBに勝つ確率は0.60で，BがCに勝つ確率は0.40で，CがAに勝つ確率は0.55である．“クジ”で不戦勝を決めて勝負を競うとき，このゲームでAが優勝する確率はいくらか．

2.5 3人の競技者A, B, Cが5個の白球と5個の黒球の入った“ツボ”から1度に1個ずつ非復元抽出で球がなくなるまで順次球をとり出す．最初に白球をとり出したものを勝ちとし，ゲームはA→B→Cの順で行うとき，A, B, Cがこのゲームにそれぞれ勝つ確率を求めよ．

2.6 (a) 52枚のトランプ札から非復元抽出で3枚をランダムにとるとき，次の確率を求めよ．

(i) 3枚とも同じ種類である．

(ii) 3枚とも同じ数である．

(iii) 3枚が同じ種類か同じ数のいずれかである．

(b) 3個のサイコロを投げる．そのとき，出た目の和が

(i) 8または9になる，

(ii) 完全平方になる

確率を求めよ．

2.7　赤球3個と白球4個を含む袋から2個の球を無作為にとり出し，得られた球の色をみた後，それらを袋にもどす．次に，再度2個の球をとり出し，球の色をみる．そのとき，次の確率を求めよ．

（a）　最初のとり出しで赤球が2個出て，次のとり出しで白球が2個出る．

（b）　とり出された4個の球が赤球2個と白球2個よりなる．

（c）　とり出された球が4個とも同じ色である．

2.8　ある円の内部でランダムに1点を選ぶとき，その点が円周までの距離より円の中心までの距離の方に近い確率は $\dfrac{1}{4}$ であることを示せ．

（a）　この円内で何個かの点を逐次選ぶとき，4番目の点がはじめて円周より円の中心に近い方に入る確率を求めよ．

（b）　円周より円の中心に近い点をはじめて得る確率を0.90以上にするには，少なくとも何個の点を選ばねばならないか．

2.9　ある養鶏場にはA，B 2品種のめんどりが飼われている．ここで産み落される卵の80%は品種Aによるものである．品種Aのめんどりが産む卵の大きさはサイズ1が30%，サイズ2が45%，サイズ3が25%である．品種Bのめんどりの場合，これらの比率はそれぞれ35%，40%，25%である．卵の色(褐色と白色)は両品種とも大きさとは無関係であり，品種Aの40%と品種Bの30%は褐色である．このとき，次の確率を求めよ．

（a）　品種Bのめんどりの産んだ卵がサイズ1で褐色である．

（b）　産み落された卵がサイズ1で白色である．

（c）　白色の卵がサイズ1である．

2.10　ある病気に対する成人の罹患率は1%であることが知られている．この病気の発見に有効と見られる検査法が開発された．この病気にかかっている成人患者の90%はこの検査法に陽性反応を示し，病気にかかっていない成人は0.5%が同じ陽性反応を示した．無作為に選ばれたある成人がこの検査法で陽性反応を示したとき，この人が本当にその病気にかかっている確率を求めよ．