7

推　定

7-1　点推定

母集団の未知母数 θ を推定するために，この母集団からの大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ のある関数 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を作り，標本の実現値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ から求めた $T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で θ の値を推定することを**点推定**という．このとき，統計量 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を**推定量**，その実現値 $T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を**推定値**という．推定量 T としては，次の性質をもつものが望ましい．

不偏推定量　　$T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の期待値が θ に等しいとき，すなわち

$$E(T)=\theta$$

のとき，$T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を θ の**不偏推定量**といい，その実現値 $T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を θ の**不偏推定値**という．

一致推定量　　任意の正数 ε に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|T-\theta|>\varepsilon)=0$$

のとき，この $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を θ の**一致推定量**という．

有効推定量　　2 つの不偏推定量 T_1，T_2 に対して，それぞれの分散が

$$V(T_1)< V(T_2)$$

のとき，T_1 は T_2 に比べて**より有効な推定量**であるという．

すべての不偏推定量のなかで分散が最小な推定量を**有効推定量**という．

7-2　最尤推定量

最尤推定量　　実際に推定量を見つけ出す方法として**最尤推定法**がある．これは母集団の分布を $f(x\,;\theta)$ とするとき，この母集団から標本値 $x_1, x_2, \cdots,$

x_n が得られる確率

$$L(\theta)=f(x_1\,;\theta)f(x_2\,;\theta)\cdots f(x_n\,;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i\,;\theta)$$

を考え，この $L(\theta)$ を最大にする θ の値 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を θ の推定量とするもので，$L(\theta)$ を標本の**尤度関数**，$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を θ の**最尤推定量**という．

7-3 区間推定

信頼区間　未知母数 θ を1つの推定量で推定するのではなく，2つの統計量 T_1，T_2 を作り，一定の確率で θ が区間 (T_1, T_2) 内に含まれるというように，区間によって推定する方法を**区間推定**という．すなわち，θ が

$$P(T_1<\theta<T_2)=1-\alpha$$

のように表されるとき，区間 $(T_1(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ T_2(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ を θ の $100(1-\alpha)\%$ **信頼区間**といい，$100(1-\alpha)\%$ をこの区間の**信頼度**（または**信頼係数**）という．また，端点の T_1，T_2 を**信頼限界**という．よく使われるものに，90%，95%，99%信頼区間がある．

7-4 平均，分散および比率の信頼区間

平均 μ の信頼区間

（a）分散 σ^2 が既知の場合．

μ の $100(1-\alpha)\%$信頼区間：　$\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}$

（b）分散 σ^2 が未知の場合．

（i）μ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間(大標本)：

$$\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{u^2}{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{u^2}{n}}$$

（ii）μ の $100(1-\alpha)\%$信頼区間(小標本)：

$$\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{u^2}{n}}<\mu<\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{u^2}{n}}$$

ここで，u^2 は標本不偏分数で，$u^2=\dfrac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$．

2つの平均の差の信頼区間

（a）分散 ${\sigma_1}^2$，${\sigma_2}^2$ が既知の場合

$\mu_1-\mu_2$ の $100(1-\alpha)$%信頼区間：

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<\bar{x}_1-\bar{x}_2+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}$$

（b） 分散 ${\sigma_1}^2$, ${\sigma_2}^2$ が未知の場合.

（i） $\mu_1-\mu_2$ の $100(1-\alpha)$% 信頼区間(大標本)：

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{u_1}^2}{n_1}+\frac{{u_2}^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<\bar{x}_1-\bar{x}_2+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{u_1}^2}{n_1}+\frac{{u_2}^2}{n_2}}$$

（ii） $\mu_1-\mu_2$ の $100(1-\alpha)$%信頼区間(小標本；${\sigma_1}^2={\sigma_2}^2$)：

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\sqrt{\frac{(n_1-1){u_1}^2+(n_2-1){u_2}^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}<\mu_1-\mu_2$$

$$<\bar{x}_1-\bar{x}_2+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\sqrt{\frac{(n_1-1){u_1}^2+(n_2-1){u_2}^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

ここで，${u_1}^2$, ${u_2}^2$ は ${\sigma_1}^2$, ${\sigma_2}^2$ の標本不偏分散.

［注］ 大標本とは標本の大きさが約 30 以上のときをいう.

分散 σ^2 の信頼区間

σ^2 の $100(1-\alpha)$%信頼区間： $\dfrac{(n-1)u^2}{\chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}<\sigma^2<\dfrac{(n-1)u^2}{\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$

比率 p の信頼区間（大標本）

p の $100(1-\alpha)$%信頼区間： $\hat{p}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}<p<\hat{p}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

2 つの比率の差の信頼区間（大標本）

p_1-p_2 の $100(1-\alpha)$%信頼区間：

$$\hat{p}_1-\hat{p}_2-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}<p_1-p_2$$

$$<\hat{p}_1-\hat{p}_2+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

例　題

例題 1 **（平均と分散の不偏推定値）**

研究者は，ある母集団の平均と分散について推測をしたい．そのため母集団から無作為抽出によって，次の 10 個の標本を得た.

18, 25, 17, 20, 31, 28, 24, 23, 21, 24

このとき，（a） 平均 μ,（b） 分散 σ^2 の不偏推定値を求めよ.

解　まず，$\sum x_i = 18+25+\cdots+24=231$

$\sum x_i^2 = 18^2+25^2+\cdots+24^2=5505$

（a）　μ の不偏推定量は標本平均 $\overline{X}$ であるから，μ の不偏推定値は

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{10}\times 231 = \mathbf{23.1}$$

（b）　σ^2 の不偏推定量は標本不偏分散 U^2 であるから，σ^2 の不偏推定値は

$$u^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{10-1}\left\{5505 - \frac{1}{10}\times(231)^2\right\} \fallingdotseq \mathbf{18.77}$$

例題 2　（より有効な推定量）

平均 μ，分散 σ^2 の母集団からの大きさ 3 の無作為標本を X_1，X_2，X_3 とする．そのとき

（a）　$T_1 = X_1 + X_2 - X_3$

（b）　$T_2 = \frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$

（c）　$T_3 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$

はいずれも μ の不偏推定量で，3 つの中では T_3 が最小の分散をもつことを示せ．

解　X_1，X_2，X_3 は無作為標本であるから，それらは互いに独立で，元の母集団と同じ平均 μ，同じ分散 σ^2 をもつ．

$$E(X_i)=\mu, \qquad V(X_i)=E(X_i-\mu)^2=\sigma^2 \qquad (i=1, 2, 3)$$

したがって

（a）　$E(T_1)=E(X_1)+E(X_2)-E(X_3)=\mu+\mu-\mu=\mu$

$V(T_1)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)=\sigma^2+\sigma^2+\sigma^2=3\sigma^2$

（b）　$E(T_2)=\frac{1}{4}\{E(X_1)+2E(X_2)+E(X_3)\}=\frac{1}{4}\times 4\mu=\mu$

$V(T_2)=\frac{1}{4^2}\{V(X_1)+2^2V(X_2)+V(X_3)\}=\frac{1}{4^2}\times 6\sigma^2=\frac{3}{8}\sigma^2$

（c）　$E(T_3)=\frac{1}{3}\{E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)\}=\mu$

$V(T_3)=\frac{1}{3^2}\times 3\sigma^2=\frac{1}{3}\sigma^2$

これより

$$V(T_3) < V(T_2) < V(T_1)$$

ゆえに，T_3 は最小の分散をもつ．

例題 3　**（分散の不偏推定量）**

平均 μ，分散 σ^2 の母集団からの大きさ n の標本を，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ とするとき，

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

は，σ^2 の不偏推定量であることを示せ．

解　標本変量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で，その分布は母集団の分布と同じであるから，

$$E[X_i] = \mu, \quad E(X_i - \mu)^2 = \sigma^2 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\begin{aligned}
E(U^2) &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}E\left[\sum(X_i{}^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}E(\sum X_i{}^2 - 2\overline{X}\sum X_i + \sum \overline{X}^2) \\
&= \frac{1}{n-1}E(\sum X_i{}^2 - 2n\overline{X}^2 + n\overline{X}^2) \qquad \left(\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i \text{ より}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}E(\sum X_i{}^2 - n\overline{X}^2) \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i{}^2) - nE(\overline{X}^2)\right]
\end{aligned}$$

ここで，

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \qquad \Rightarrow \quad E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\frac{\sigma^2}{n} = V(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - \mu^2 \qquad \Rightarrow \quad E(\overline{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

これらを上の式に代入すれば

$$E(U^2) = \frac{1}{n-1}\left[n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right] = \sigma^2$$

ゆえに，U^2 は σ^2 の不偏推定量である．

例題 4　（有効推定量）

平均 μ，分散 σ^2 の母集団からとった2個の無作為標本を X_1，X_2 とするとき，aX_1+bX_2 が μ の不偏推定量で，かつ有効推定量となるような a，b の値を求めよ．

解　X_1，X_2 は無作為標本だから

$$E(X_1)=E(X_2)=\mu, \qquad V(X_1)=V(X_2)=\sigma^2$$

aX_1+bX_2 の期待値は

$$E(aX_1+bX_2)=aE(X_1)+bE(X_2)=(a+b)\mu$$

aX_1+bX_2 が不偏推定量であるためには，

$$E(aX_1+bX_2)=\mu \qquad \therefore \quad a+b=1$$

$$V(aX_1+bX_2)=a^2V(X_1)+b^2V(X_2) \qquad (X_1 \text{ と } X_2 \text{ は独立だから})$$
$$=(a^2+b^2)\sigma^2$$

$V(aX_1+bX_2)$ を最小にする a，b の値は

$$a^2+b^2=a^2+(1-a)^2$$
$$=2a^2-2a+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

より，$a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$，$b=1-a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$.

よって，標本平均 $\dfrac{X_1+X_2}{2}$ は μ の不偏で，かつ有効な推定量である．

例題 5　（標本数 n の決定）

ある特定銘柄の洗剤を使っている消費者の比率を推定したい．次の場合，少なくとも何個の標本が必要か．

（a）　母集団比率 p は 0.8 と 0.9 の範囲にあることがわかっていて，少なくとも 0.99 の確率で，標本比率 $\hat{p}$ と母集団比率 p との差を 0.02 以下にしたい場合．

（b）　母集団比率 p について何もわかっていなくて，少なくとも 0.95 の確率で標本比率 $\hat{p}$ と母集団比率 p との差を 0.03 以下にしたい場合．

解　（a）　標本数 n は大きくて，近似的に

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\sim N(0.1) \qquad (q=1-p)$$

が成り立つとすれば，

$$P(|Z|<2.576)=0.99$$

$$P\left(|\hat{p}-p|<2.576\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)=0.99$$

題意より，

$$P(|\hat{p}-p|<0.02)\geqq 0.99$$

であるから，求める n は

$$2.576\sqrt{\frac{pq}{n}}\leqq 0.02$$

$$\therefore \quad n\geqq\left(\frac{2.576}{0.02}\right)^2 pq$$

$pq=p(1-p)$ は，$0.8\leqq p\leqq 0.9$ では $p=0.8$ のとき最大となるから

$$n\geqq\left(\frac{2.576}{0.02}\right)^2\times 0.8\times 0.2\fallingdotseq 2654.3$$

よって，**2655 個以上**とればよい．

（b）（a）と同様に解けば，

$$n\geqq\left(\frac{1.96}{0.03}\right)^2 pq$$

$pq=p(1-p)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-p\right)^2$ は $0\leqq p\leqq 1$ では，$p=\frac{1}{2}$ のとき最大となるから

$$n\geqq\left(\frac{1.96}{0.03}\right)^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\fallingdotseq 1067.1$$

よって，**1068 個以上**とればよい．

例題 6　**（最尤推定量）**

密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}} & (x\geqq 0\,;\,\theta>0)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

で与えられる母集団からの大きさ n の無作為標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とするとき，

（a）θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ を求めよ．

（b）（a）で求めた $\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量であることを示せ．

解　(a)　尤度関数 $L(\theta)$ は

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta^2}X_i e^{-\frac{X_i}{\theta}}=\theta^{-2n}(X_1X_2\cdots X_n)e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i}$$

両辺の対数をとれば

$$\log L(\theta)=-2n\log\theta+\sum_{i=1}^{n}\log X_i-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

よって,

$$\frac{d\log L(\theta)}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}X_i=0$$

$$\therefore\quad \hat{\theta}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overline{\boldsymbol{X}}$$

(b)　$E(\hat{\theta})=\frac{1}{2}E(\overline{X})=\frac{1}{2}E(X)$　　(6章の定理5より)

$$\begin{aligned}E(X)&=\frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx\\&=\frac{1}{\theta^2}\left\{\left[-x^2\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\right]_0^\infty+2\theta\int_0^\infty xe^{-\frac{x}{\theta}}dx\right\}\quad\text{(部分積分より)}\\&=\frac{1}{\theta^2}(0+2\theta\cdot\theta^2)\quad\left(\because\int_0^\infty\frac{xe^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^2}dx=1\right)\\&=2\theta\end{aligned}$$

よって,

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

ゆえに, θ の最尤推定量 $\frac{1}{2}\overline{X}$ は θ の不偏推定量でもある.

例題 7　(平均の信頼区間(大標本))

ある学校の生徒40人を無作為に選び, 1週間にテレビを何時間視るかを聞いた. 40人の平均は18.2時間, 標準偏差5.4時間であった. この学校の生徒のテレビ平均視聴時間 μ に対する

(a)　95%信頼区間,

(b)　98%信頼区間

を求めよ.

解　(a)　$n=40$ は大標本であるから, μ の95%信頼区間は

$$\bar{x}-1.96\frac{u}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+1.96\frac{u}{\sqrt{n}}$$

に

$$n=40, \quad \bar{x}=18.2, \quad u=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,s=\sqrt{\frac{40}{39}}\times 5.4=5.5$$

を代入して

$$18.2-1.96\times\frac{5.5}{\sqrt{40}}<\mu<18.2+1.96\times\frac{5.5}{\sqrt{40}}$$

$$\mathbf{16.5<\mu<19.9}$$

（b）98%の場合も同様にして

$$\bar{x}-2.33\frac{u}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+2.33\frac{u}{\sqrt{n}}$$

$$18.2-2.33\times\frac{5.5}{\sqrt{40}}<\mu<18.2+2.33\times\frac{5.5}{\sqrt{40}}$$

$$\mathbf{16.2<\mu<20.2}$$

例題 8　**（平均の信頼区間（小標本））**

ベアリングの製造機械がある．この機械が作る9個のベアリングの直径（mm）を測定して，

7.01, 7.03, 6.96, 6.91, 6.96, 7.06, 7.02, 6.94, 6.93

を得た．直径は正規分布に従うと仮定して，ベアリングの平均直径 μ に対する

（a）90%信頼区間，

（b）99%信頼区間

を求めよ．

解　データから和と2乗和を求めると

$$\sum x_i=62.82, \qquad \sum x_i^2=438.5$$

ゆえに

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i=6.98$$

$$u^2=\frac{1}{n-1}\left\{\sum x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right\}=0.00265$$

$$\therefore \quad u=\sqrt{0.00265}\fallingdotseq 0.05$$

（a）μ の90%の信頼区間は，

$$\bar{x}-t_{0.05}(8)\frac{u}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+t_{0.05}(8)\frac{u}{\sqrt{n}}$$

$n=9$, $\bar{x}=6.98$, $u=0.05$, $t_{0.05}(8)=1.86$ を代入すれば

$$6.98-1.86\times\frac{0.05}{\sqrt{9}}<\mu<6.98+1.86\times\frac{0.05}{\sqrt{9}}$$

$$\mathbf{6.95<\mu<7.01}$$

（b） 同様にして，$t_{0.005}(8)=3.355$ より，μ の 99%の信頼区間は

$$6.98-3.355\times\frac{0.05}{\sqrt{9}}<\mu<6.98+3.355\times\frac{0.05}{\sqrt{9}}$$

$$\mathbf{6.92<\mu<7.04}$$

例題 9 (2つの平均の差の信頼区間(大標本))

銘柄 A の電球 80 個の寿命 (時間) のデータから，平均 1070，分散 472 が得られた．一方，銘柄 B の 60 個の電球の寿命のデータから，平均 1042，分散 366 を得た．2 つの銘柄の電球の平均寿命時間の差の 90%信頼区間を求めよ．

解 電球 A, B の真の寿命をそれぞれ μ_A, μ_B とする．

与えられた情報から

$$n_A=80, \quad \bar{x}_A=1070, \quad s_A^2=472$$

$$n_B=60, \quad \bar{x}_B=1042, \quad s_B^2=366$$

$1-\alpha=0.90$, $\alpha=0.10$ より，

$$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.05}=1.645$$

n_A, n_B は十分大きいから，

$$u_A^2 \fallingdotseq s_A^2, \quad u_B^2 \fallingdotseq s_B^2$$

よって，大標本による平均の差の信頼区間の公式より

$$1070-1042-1.645\sqrt{\frac{472}{80}+\frac{366}{60}}<\mu_A-\mu_B<1072-1042+1.645\sqrt{\frac{472}{80}+\frac{366}{60}}$$

$$\mathbf{22.30<\mu_A-\mu_B<33.70}$$

例題 10 (分散の信頼区間)

平均 0，分散 σ^2 の正規母集団から大きさ 10 の標本を抽出して，次の結果を得た．母分散 σ^2 の 95%信頼区間を求めよ．

0.067	2.066	3.192	0.515	2.194
−0.727	−0.547	−3.537	−1.613	1.582

解　公式より，σ^2 の $100(1-\alpha)\%$信頼区間は

$$\frac{(n-1)u^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)u^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$$

与えられたデータから

$$\sum_{i=1}^{10} x_1=3.192, \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i{}^2=37.983$$

よって，

$$9u^2=\sum x_i{}^2-\frac{(\sum x_i)^2}{10}$$

$$=37.983-\frac{3.192^2}{10}=36.964$$

χ^2 分布表より，

$$\chi^2_{0.025}(9)=19.02, \qquad \chi^2_{0.975}(9)=2.70$$

であるから，σ^2 の 95%信頼区間は

$$\frac{36.964}{19.02}<\sigma^2<\frac{36.964}{2.70}$$

$$\therefore \quad \mathbf{1.94}<\sigma^2<\mathbf{13.69}$$

例題 11　（比率の信頼区間）

300 人の喫煙者に，ふだんすっているタバコの銘柄を質問したところ，72 人が銘柄 X を答えた．全喫煙者のうち，銘柄 X の常用者の比率の 95% 信頼区間を求めよ．

解　銘柄 X の常用者の比率を p とする．

題意より，$n=300$，$x=72$ だから，

$$\hat{p}=\frac{x}{n}=\frac{72}{300}=0.24$$

$z_{0.025}=1.96$ だから，p の 95%信頼区間は，

$$0.24-1.96\sqrt{\frac{0.24\times0.76}{300}}<p<0.24+1.96\sqrt{\frac{0.24\times0.76}{300}}$$

$$\mathbf{0.19}<p<\mathbf{0.29}$$

例題 12 (2つの比率の差の信頼区間)

ハウス内での園芸実験で，品種Aの種子100個と，品種Bの種子150個をまき，同一条件下で実験を行った．3週間後，品種Aは85個が発芽し，品種Bは114個が発芽した．両品種の発芽率の差に対する95%信頼区間を求めよ．

解　品種A，Bの母集団発芽率をそれぞれ p_1，p_2 とする．

与えられた情報から，

$$n_1=100, \quad x_1=85, \quad \hat{p}_1=\frac{85}{100}=0.85$$

$$n_2=150, \quad x_2=114, \quad \hat{p}_2=\frac{114}{150}=0.76$$

$$\alpha=0.05, \quad z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.645$$

よって，p_1-p_2 の95%信頼区間は，

$$0.85-0.76-1.96\sqrt{\frac{0.85\times0.15}{100}+\frac{0.76\times0.24}{150}}<p_1-p_2$$

$$<0.85-0.76+1.96\sqrt{\frac{0.85\times0.15}{100}+\frac{0.76\times0.24}{150}}$$

$$\mathbf{-0.008}<p_1-p_2<\mathbf{0.188}$$

7章の問題

7.1　ある有名予備校主催の模擬試験を受けた某中学校の生徒200人の得点は次のようであった．

階級値	4.5	14.5	24.5	34.5	44.5	55.5	64.5	74.5	84.5	94.5
度　数	3	11	18	24	41	43	30	15	10	5

(a)　この試験を受けた全受験生の得点の平均と分散を推定せよ．

(b)　平均に対する95%信頼限界を求めよ．

(c)　$P(|\bar{x}-\mu|<2)=0.95$ を満たす最小の n の値を求めよ．

7.2　平均 μ，分散1の母集団からの大きさ n の無作為標本によって，μ^2 を推定したい．標本平均 $\overline{X}$ の2乗は，μ^2 の不偏推定量にならないことを示し，μ^2 の不偏推定量を導け．

7.3 確率変数 X の密度関数は

$$f(x)=2x/\theta^2 \qquad (0<x<\theta)$$

で，いま X について5個の観測値

$$0.6,\ 1.5,\ 0.8,\ 1.1,\ 1.3$$

が得られた．このとき，

(a) θ, (b) θ^2

の不偏推定値を求めよ．

7.4 確率密度関数

$$f(x\,;\theta)=(1+\theta)x^{\theta} \qquad (0<x<1\,;\theta>-1)$$

を分布にもつ母集団からの，大きさ n の標本にもとずく θ の最尤推定量を求めよ．

7.5 新車100台について，ガソリン1 ℓ 当たり走行キロ数を，コースで測定した．この結果から，1 ℓ 当たり平均走行キロ数の95%信頼限界を求めよ．

走行キロ数	台数
17.50～17.99	2
18.00～18.49	5
18.50～18.99	8
19.00～19.49	13
19.50～19.99	19
20.00～20.49	25
20.50～20.99	15
21.00～21.49	7
21.50～21.99	5
22.00～22.49	0
22.50～22.99	1
計	100

7.6 平均 μ，分散 σ^2 の正規母集団からの大きさ12の無作為標本より，

$$\sum_{i=1}^{12} x_i=72, \qquad \sum_{i=1}^{12} x_i{}^2=1620$$

を得た．

(a) μ と σ^2 の不偏推定値を求めよ．

(b) μ と σ^2 の95%信頼区間を求めよ．

7.7　天秤で，ある物の重さを繰返し測定するときの測定値は，その物の真の重さに等しい平均と標準偏差 0.5 mg の正規分布に従う．

A の 10 回の測定値の平均は 8.6 mg で，B の 15 回の測定値の平均は 6.8 mg であった．測定値は正規分布に従うと仮定して，A と B の真の重さの差に対する 95％信頼区間を求めよ．

7.8　ある機械は，粉末製品を x_1 g ずつとって容器に詰める．過去の経験から，x_1 は平均 $\mu_1=30$ g，標準偏差 $\sigma_1=0.4$ g の正規分布に従う．容器の重さ x_2 は，平均 $\mu_2=5.0$ g，標準偏差 $\sigma_2=0.3$ g の正規分布に従う．容器こみの製品 1 個当りの重さ x に対する 95％信頼区間を求めよ．また，この製品 10 個を 1 箱に詰めるとき，空箱 1 個の重さ x_3 は $\mu_3=35.0$ g，$\sigma_3=1.0$ g の正規分布に従うとして，1 箱の重さ y に対する 95％信頼区間を求めよ．

7.9　生徒が 1800 人の中学校で，無作為に選んだ 40 人の生徒のうち 14 人がめがねをかけていた．

（a）　この学校で，めがねをかけている生徒の比率，

（b）　この学校で，めがねをかけている生徒の数

の 95％信頼限界を求めよ．

7.10　ある政策に対する世論調査で，男子有権者は 1000 人中 750 人が賛成と答え，女子有権者は 800 人中 520 人が賛成と答えた．母集団における男子有権者と女子有権者の賛成率の差に対する 95％信頼区間を求めよ．

7.11　螢光管の寿命時間は，指数分布

$$f(x\,;\theta)=\theta e^{-\theta x} \qquad (x \geqq 0)$$

に従う．5 個のデータ

5.83, 12.99, 16.28, 2.88, 1.83

が与えられたとき，θ の最尤推定値を求めよ．