数パーセントの差 – 破産問題

2007/09/28, 西岡 國雄[*1]

ランダム・ウォークの応用問題として, 「ギャンブラーの破産問題」が有名です. この問題は,'ギャンブルの最適戦略' だけでなく, '市場占有率の効果' や '企業規模と経営戦略' を考える上で重要なものです. それらの詳細は「確率論 I, II」で述べることにし, 今回は「基礎数学 II」で講義する数列の応用問題として扱います.

1 ギャンブラーの破産問題

ギャンブラー X 氏は次のルールで賭を行っています:

(a) X 氏は賭け金 1, つまり '勝てば $+1$, 負ければ -1 の損得' というゲームを繰り返す.
(b) 各々のゲームで, X 氏の勝つ確率は $p \quad (0 < p < 1)$.
(c) X 氏が目標金額 a を獲得するか, 所持金が 0 になる (=破産する) 時点で賭は終了する.

ここで私達の扱う問題は, 次の 'ギャンブラーの破産問題' です.

問題 1 (ギャンブラーの破産問題)**.** X 氏は所持金 $n \quad (0 < n < a)$ でゲームを開始した. X 氏が,

$$\text{目標金額 } a \text{ を獲得する前に破産する確率} \quad Q(n)$$

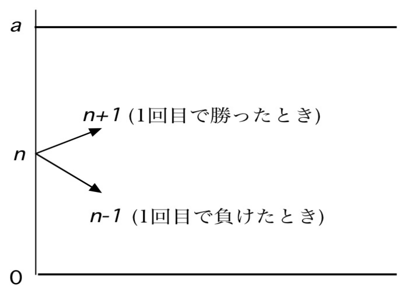
をもとめよ.

「確率論」からの考え方 詳しくは, 「確率論」で講義しますが, 問題 1 の解明法を大雑把に説明します.

$1 \leq n \leq a-1$ とする. まずゲームを 1 回行うと X 氏の所持金は,

$$\text{勝てば } n+1, \quad \text{負ければ } n-1$$

となる.



X 氏は 2 回目以降は「所持金 $n+1$ か $n-1$ の状態」から賭を続ける. ♠

この '「確率論」からの考え方' を数式化します.

[*1] 2 号館 21138 号室, nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp

2 回目以降は 確率 p で所持金 $n+1$, 確率 $1-p$ で所持金 $n-1$ の状態

から賭を続けるので,

(1) $$Q(n) = p\,Q(n+1) + (1-p)\,Q(n-1).$$

となります. 結局 問題 1 は, '(1) を満たす数列 $Q(n)$ を見つければ解ける' ことになりました.

1.1 $p = 1/2$ のとき

Step 1, まず $Q(n)$ は 公差 y, 初項 C の等差数列 (2) であると仮定し, (1) を満たしていることを確かめます:

(2) $$Q(n) = n\,y + C, \quad n = 0, 1, \cdots, a.$$

これを (1) の右辺に代入すると

$$\frac{1}{2}Q(n+1) + \frac{1}{2}Q(n-1) = \frac{1}{2}\big\{(n+1)y + C + (n-1) + C\big\} = n\,y + C = Q(n)$$

となり, (2) の等差数列が (1) を満たしていることが証明されました.

Step 2. つぎに (2) の y, C を決定しましょう.

(3) $n = 0$ なら X 氏は既に破産しているので, $Q(0) = 1$,

(4) $n = a$ なら X 氏は既に目標金額に達しているので, 賭は行わず $Q(a) = 0$,

であるから, これを (2) に代入して

$$1 = Q(0) = C, \qquad 0 = Q(a) = a\,y + C.$$

この連立方程式を解いて

(5) $$p = \frac{1}{2} \text{ の場合} \quad Q(n) = 1 - \frac{n}{a}, \quad n = 0, 1, \cdots, a. \quad \square$$

1.2 $p \neq 1/2$ の場合

Step 1. 適当な公比 x にたいし, (1) を満たす $Q(n)$ は次の等比数列 (6) と仮定します:

(6) $$Q(n) = x^n\,C, \quad n = 0, 1, \cdots, a.$$

さて, どんな数 x にたいして, (6) が (1) を満たしているかを計算してみましょう.

$$x^n\,C = Q(n) = p\,Q(n+1) + (1-p)\,Q(n-1) = p\,x^{n+1}\,C + (1-p)\,x^{n-1}\,C.$$

最初の項と最後の項で等号が成立しているので, 整理して

$$x = p\,x^2 + 1 - p.$$

となる. この等式をみたす x は

(7) $$x = 1,\ \frac{1-p}{p} \qquad \left(p \neq 1/2 \ \text{ だから } \frac{1-p}{p} \neq 1 \text{ に注意.}\right)$$
$$\left(\text{今後は, 記号の簡略化のため } \frac{1-p}{p} \equiv r \text{ とおく.}\right)$$

つまり $Q(n)$ の一般項は x を (7) とした等比数列の線形結合で

$$Q(n) = A + r^n B, \quad n = 0, 1, \cdots, a. \tag{8}$$

Step 2. さて (8) にたいして (3), (4) を考慮すると,

$$1 = Q(0) = A + B, \qquad 0 = Q(a) = A + r^a B$$

となります. この連立方程式を解いて

$$A = \frac{r^a}{r^a - 1}, \quad B = \frac{-1}{r^a - 1}.$$

が得られので,

$$p \neq \frac{1}{2} \text{ の場合} \quad Q(n) = \frac{r^a}{r^a - 1} - \frac{r^n}{r^a - 1} = \frac{r^a - r^n}{r^a - 1}, \quad n = 0, 1, \cdots, a. \quad \square \tag{9}$$

1.3 破産問題の解答

前項の計算より, 次の結論が得られました:

定理 2. X 氏は 目標金額 a, 所持金 n $(0 \leq n \leq a)$, 1 回あたりの賭け金 1 でゲームを開始した. 彼が破産する確率 $Q(n)$ は

$$Q(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{a}, & p = 1/2, \\[2ex] \dfrac{(1/p - 1)^n - (1/p - 1)^a}{1 - (1/p - 1)^a}, & p \neq 1/2. \end{cases} \tag{10}$$

♠

つぎに (10) で明らかになった $Q(n)$ と個々のゲームでの勝利確率 p との関係を調べるために,

- ◦ 目標金額 $a = 100$, 所持金 $n = 50$,
- ◦ 目標金額 $a = 1000$, 所持金 $n = 500$

の２つの場合に, 破産確率 $Q(n)$ を実際に計算してみます.

p	0.48	0.49	0.495	0.497	0.498	0.499	0.5
$a = 100$ のとき $Q(50)$	0.982	0.881	0.731	0.646	0.599	0.549	0.5

表 1

$p = 0.5$ のときの 破産確率は $Q(50) = 0.5$ ですが, $p = 0.48$ と 2% 不利なだけで $Q(50) = 0.982$ と激変します.

p	0.49	0.499	0.4995	0.4997	0.4999	0.5
$a = 1000$ のとき $Q(500)$	~ 1	0.881	0.731	0.646	0.549	0.5

表 2

表 2 ($a = 1000, n = 500$) の場合は, 表 1 の例より p の変化に敏感です. $p = 0.5$ のときの 破産確率 $Q(50) = 0.5$ から, $p = 0.499$ と 0.1% 不利なだけで $Q(500) = 0.881$ と激変します.

表 1 と 表 2 をグラフに描き, 重ねるとその差がよくわかります:

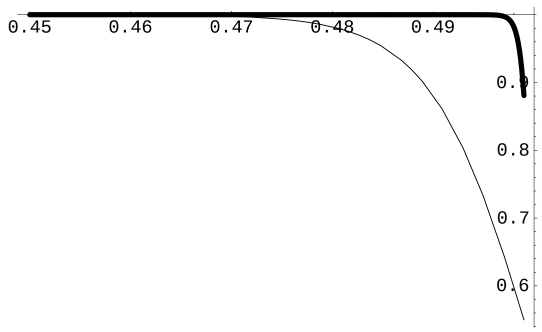


図 1　表 1, 表 2 のグラフ: 表 2 が太線である

以上の考察から, 次が判明しました.

系 3.　(i) 破産確率 $Q(n)$ は, 各々の勝利確率 p の僅かな大小によって劇的に変化する*2

(ii) また, その変化は, 目標金額が高い (=行われるゲームの回数が多い) ほど著しくなる. ♠

2　賭の戦略

定理 2, 系 3 から '賭けの最適戦略' を探してみましょう.

2.1　半額の賭け金

問題 1 では賭け金は 1 でしたが, ここでは賭け金を半額にした場合の破産問題を考えましょう.

問題 4. 賭け金を 問題 1 の半分, つまり勝てば 1/2, 負ければ $-1/2$ としたとき, X 氏の破産確率 $Q^*(n)$ を求めよ.

問題 4 への考え方. 賭け金を半分にするということは,

$$\text{最初の所持金} \ \to \ \text{倍}, \quad \text{目標金額} \ \to \ \text{倍}$$

にすることと同じである. ♠

問題 4 の解答　この '考え方' に従うと, 定理 2 で

$$n \ \to \ 2n, \quad a \ \to \ 2a.$$

*2 市場での商品競争力が, 各々のゲームでの勝利確率 p に充るとします. すると '商品競争力の僅かな差で企業の生き残る確率 (破産確率 $Q(n)$) が大きく変動する' との結論が導かれました.

と置換することにより, 簡単に $Q^*(n)$ が求められます. 実際, $p \neq 1/2$ の場合

$$Q^*(n) = \frac{(1/p-1)^{2n} - (1/p-1)^{2a}}{1-(1/p-1)^{2a}}. \tag{11}$$

となりました. □

つぎに (11) の因数分解を行い, $Q(n)$ と $Q^*(n)$ との大小を比較します.

$$\begin{aligned} Q^*(n) &= \frac{\left[(1/p-1)^n - (1/p-1)^a\right]\left[(1/p-1)^n + (1/p-1)^a\right]}{\left[1-(1/p-1)^a\right]\left[1+(1/p-1)^a\right]} \\ &= Q(n)\ \frac{(1/p-1)^n + (1/p-1)^a}{1+(1/p-1)^a}. \end{aligned} \tag{12}$$

ここで $p < 1/2$ ならば $1/p - 1 > 1$ だから

$$\frac{(1/p-1)^n + (1/p-1)^a}{1+(1/p-1)^a} > 1$$

となります. 以上をまとめると,

定理 5.

$$0 < p < \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ Q^*(n) > Q(n). \quad \spadesuit$$

2.2 一般化と賭の最適戦略

前項の議論は賭け金を $1/3, 1/4, \cdots$ とするときも成立します. そして '$Q(n)$ が n, a について連続' という事実を使うと, 次の一般化した結論が得られます.

定理 6. (i) 各々のゲームでの勝利確率 p が 1/2 より小さいギャンブラーは, 一回当たりの賭け金を多くするほど破産する確率が小さくなる.

(ii) 各々のゲームでの勝利確率 p が 1/2 より大きいギャンブラーは, 一回当たりの賭け金を少なくするほど破産する確率が小さくなる. ♠

では実際に

賭け方によって破産確率がどれぐらい変化するか

を調べてみます.

賭け金を $1/k$ 倍にしたときの破産確率 $Q^{(1/k)}(n)$ は

$$Q^{(1/k)}(n) \equiv \frac{(1/p-1)^{kn} - (1/p-1)^{ka}}{1-(1/p-1)^{ka}}$$

となます. そこで, 賭け金 1 のときの破産確率 $Q(n)$ との比 $R^{(1/k)}$ を

$$R^{(1/k)} \equiv \frac{Q^{(1/k)}(n)}{Q(n)}$$

とおき,

(13) 目標金額 $a = 100$, 所持金 $n = 50$, 個々のゲームでの勝利確率 $p = 0.497$

として $R^{(1/k)}$ を計算します.

賭け金を $1/k$ 倍	1/10	1/8	1/6	1/4	1/2	1
$R^{(1/k)}$	1.55	1.54	1.51	1.42	1.19	1

表 3

この表から,'1 回当たりの賭け金を少なくし, 賭の回数を増やす' ほど, 破産確率が大きくなることが判ります. 一方, 同じ (13) の条件下で, 賭け金を k 倍にすると

賭け金を k 倍	1	2	4	6	8	10
$R^{(k)}$	1	0.89	0.83	0.81	0.80	0.79

表 4

となり, '1 回当たりの賭け金を多くし, 賭の回数を減らす' ほど, 破産確率が小さくなることが判明します.

2.3 数値のグラフ化

表 3, 4 をグラフにすると,

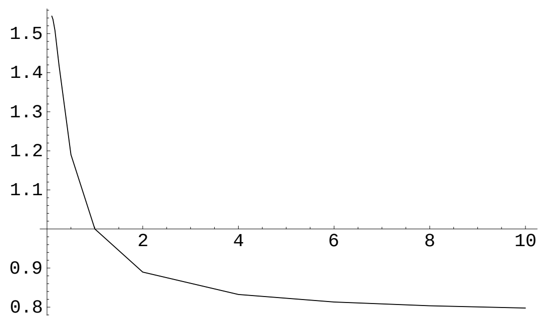


図 2 等間隔座標のグラフ

となります. ところが, この 図 2 では, 表 3 のデータは $1/10, 1/8, \cdots, 1$ の位置にプロットされます. つまり表 3 のデータは全て 区間 $(1/10, 1]$ に圧縮されているので, グラフの特徴が掴みにくい. そこで, x 軸だけを

$$\text{対数関数}\ \log m, \quad m = \frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2}, 1, 2, \cdots, 10$$

とした「半対数座標のグラフ」を作成してみましょう[*3]:

[*3] 対数関数の応用の一つに, 「半対数座標のグラフ」「両対数座標のグラフ」などがあります.

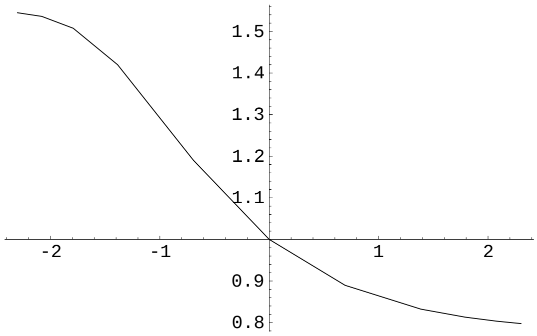


図 3　半対数座標のグラフ

すると, x 軸より左側でグラフの傾斜が大きくなることが読み取れます. これは

> $p < 1/2$ の場合, '賭け金を少なくする' 作戦の効果 (=破産確率が大きくなる危険性) は, '賭け金を大きくする' 作戦の効果より影響が大きい

事を意味しています[*4].

さて最近「異性の気を引くための贈り物作戦が猿でも観察された」との報道がありました. そこで最後に, クリスマス, 誕生日, バレンタインディー等々といろいろ贈り物をする (しなければいけない?) 場合の最適戦略を考察します.

定理 6 の主張に従えば, 成功確率が最も高い戦略は次の通りです:

系 7. もし自分がもてない方だと思うならば, ここぞと言う機会に全資産をかけて高価な贈り物をする. もてる方だ思うならば, 安くても良いからこまめに贈り物をする. ♠

以上

---

*4 「状況が不利な場合には, 大胆な戦略を取らないと大変に危険」ということでしょう.