

# 基礎数学 I – 練習問題

2007/07/06 西岡

<http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/~nishioaka/>

## 1 集合論と論理

**問題 1.1.** 50 人の学生にたいし、好きなスポーツ種目を調査した.  $S$  をサッカー好き,  $B$  を野球好き,  $T$  をテニス好きとし,

$S \cup B \cup T$	$S$	$B$	$T$	$S \cap B$	$S \cap T$	$B \cap T$
50	40	30	20	15	15	15

であった. 3 種目とも好きなもの ( $S \cap B \cap T$ ) は何人いるか.

**問題 1.2.**  $n$  を自然数とする.  $n$  個の白石と  $n+1$  個の黒石が横一列に並んでいる. この石の配列がどうであっても, 次の条件を満たす黒石  $x$  が少なくとも一つあることを示せ.

その  $x$  とそれより右にある全ての石を取り除くと, 列に残った白石と黒石の数が同じになる. ただし, 石が一つも残らない状態も同数と見なす.

**問題 1.3** (興味を持つ人に). 以下の命題 (i)–(iii) にたいし, その否定を述べよ.  
(ヒント: 論理式の記号を使って命題を書き直し, その否定を作り, それを日本語に変換する.)

- (i) 任意の自然数  $n$  にたいし, ある自然数  $m$  が存在して 条件  $H(m, n)$  が成立する.
- (ii) 任意の正数  $\varepsilon$  にたいし, ある自然数  $N$  が存在して,  $N$  以上の任意の自然数  $n$  にたいし 条件  $H(\varepsilon, n)$  が成立する.
- (iii) 任意の実数  $x$  にたいし, して 条件「 $H(x) \Rightarrow K(x)$ 」が成立する.

## 3 数列

**問題 3.1.** 次の極限を求めよ: ただし  $x$  は実定数とする.

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

**例題 3.2.** 年利  $r$  ( $r > 0$ ) の複利で,  $A$  円を借入れた. 途中で返済しない場合に, 借入金の総額は以下の通りである:

1 年後に  $(1+r)A$  円, 2 年後に  $(1+r)^2 A$  円, 3 年後に  $(1+r)^3 A$  円,  $\dots$

- (i) 1 年後に  $B$  円 ( $A > B > 0$ ) を返済した場合, 返済直後での借入金残高は  $(1+r)A - B$  円になる. 1 年後に  $B$  円返済し, 2 年後にも  $B$  円返済した場合, 2 年後の返済直後での借入金残高  $S_2$  を求めよ.
- (ii) 1 年後に  $B$  円, 2 年後以降も毎年  $B$  円返済したとき,  $n$  年後 ( $n \geq 2$ ) の返済直後での借入金残高  $S_n$  を求めよ.

[解答] (i)  $S_2 = (1+r)\{(1+r)A - B\} - B = (1+r)^2A - \{(1+r) + 1\}B$ .

(ii) 前問と同じ考え方をして,

$$\begin{aligned} S_n &= (1+r)^n A - \{(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + 1\}B \\ (3.1) \quad &= (1+r)^n A - \frac{(1+r)^n - 1}{r} B. \quad \square \end{aligned}$$

## 4 基礎的な関数

### 4.1 分数関数

**問題 4.1.** 関数  $f(x) = \frac{1}{x+2} + 3$  のグラフは 関数  $g(x) = \frac{1}{x}$  のグラフをどのように平行移動したものか.

**問題 4.2.** (i)  $n$  を自然数として,  $f(x) = \frac{1}{x^n}$  の概形を描け.

(ii)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  の概形を描け.

(iii)  $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$  の概形を描け.

**問題 4.3.** 不等式  $\frac{5x-6}{x-2} \leq x+1$  をみたす  $x$  の範囲を求めよ.

**問題 4.4.** 関数  $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$  のグラフの概形を描け.

### 4.2 指数関数

**問題 4.5.** 次の関数のグラフを描け.

$$(i) f(x) = 3^x, \quad (ii) f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad (iii) f(x) = (\sqrt{2})^x.$$

**問題 4.6.** 次の方程式をみたす  $x$  の値を求めよ.

$$(i) 2^x = 32, \quad (ii) \sqrt{2} = 4^{x-1}, \quad (iii) 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} - 16 = 0.$$

**問題 4.7.** 次の等式 (i), (ii) を  $\sqrt[n]{n}$  ( $m, n > 0$ ) の形に, (iii), (iv) を  $a^r$  ( $a > 0$ ) の形にかけ.

$$(i) a^{\frac{3}{7}} \quad (ii) a^{0.2} \quad (iii) \sqrt[5]{\frac{1}{a^3}} \quad (iv) \sqrt{a\sqrt{a}}.$$

**問題 4.8.** 次の式を計算せよ.

$$\begin{aligned} (i) & (a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}) & (ii) & (a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - 1 + a^{-\frac{2}{3}}) \\ (iii) & (a^x)^{y-z}(a^y)^{z-x}(a^z)^{x-y}. \end{aligned}$$

**問題 4.9.**  $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$  のとき, 次の値を求めよ.

$$(1) x + x^{-1} \quad (2) x^2 + x^{-2} \quad (3) x^3 + x^{-3},$$

### 4.3 対数関数

**問題 4.10.** (i) 次の等式を同値な  $q = \log_a p$  の形に変換せよ.

$$(a) 3^{-2} = \frac{1}{9}, \quad (b) 8^{-\frac{2}{3}} = 0.25.$$

(ii) 次の等式を同値な  $p = a^q$  の形に変換せよ.

$$(a) \log_{16} \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}, \quad (b) \log_4 32 = \frac{5}{2}.$$

**問題 4.11.** 次の式を簡単にせよ.

$$\begin{aligned} (i) \log_2 \frac{2}{3} + 3 \log_2 3 - \log_2 9, & \quad (ii) \log_2 18 + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \log_2 \sqrt[3]{12}, \\ (iii) \log_3 2 \cdot \log_8 9, & \quad (iv) (\log_2 5 - \log_4 0.2)(\log_5 2 + \log_{25} 0.5), \end{aligned}$$

**問題 4.12.**  $a + b = 6$  ( $0 < a < b$ ),  $\log_a b + \log_b a = \frac{5}{2}$  のとき,  $a, b$  の値を求めよ.

**問題 4.13.** 次の対数関数のグラフをかけ.

$$(i) f(x) = \log_3(x-1) \quad (ii) f(x) = \log_2 4x \quad (iii) f(x) = -2 \log_2 x + 1$$

**問題 4.14.** 次の方程式および不等式を解け.

$$\begin{aligned} (i) (\log_4 x)^2 &= \log_2 8x & (ii) \log_2 x &= \log_x 2 & (iii) -2^{\log_2 x} + 4^{\log_2 x} &= 2 \\ (iv) \log_2(x-3) + \log_2(x+5) &< 2 \log_4(3x+5) \\ (v) \log_2(x-1) + 2 \log_4(x+3) &\geq \log_2 5 \end{aligned}$$

**問題 4.15.** 次のものを大小の順に並べよ.

$$\begin{aligned} (i) 1 < a < b < a^2 \text{ のとき, } 2, \log_a b, \log_b a, \log_{ab} a^2 \\ (ii) a^2 < b < a < 1 \text{ のとき, } \log_a b, \log_b a, \log_a \frac{a}{b}, \log_b \frac{b}{a}, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**例題 4.16.** 年利  $r$  で  $A$  円を借り入れた. 借り入れてから 1 年後に  $B$  円, 2 年後以降も毎年  $B$  円返済して,  $n$  年後に完済したい. この  $n$  を求めよ.

[解答] (3.1) より  $n$  年後の返済残高  $S_n$  は

$$S_n = (1+r)^n A - \frac{(1+r)^n - 1}{r} B$$

である.  $n$  年後に完済だから,  $S_n = 0$  となっている.  $X \equiv (1+r)^n$  とおいて,

$$0 = X A - \frac{X-1}{r} B \Rightarrow X = \frac{B}{B-rA}.$$

両辺の対数をとる,

$$n \log(1+r) = \log X = \log B - \log(B-rA)$$

となるので,

$$n = \frac{1}{\log(1+r)} \{ \log B - \log(B-rA) \}.$$

ちなみに, 年利 0.04 (4 %) で 1000 万借り入れた場合, 毎月の返済額と完済までの必要年の関係は以下の通り:

毎月の返済額	5 万円	6 万円	7 万円	8 万円	9 万円	10 万円
完済年	28 年後	20.7 年後	16.5 年後	13.7 年後	11.8 年後	10.3 年後

## 5 関数の連続性と微分

**問題 5.1.** 次の関数は連続関数かどうかを判定せよ.

$$(i) \quad f(x) \equiv \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2, \end{cases} \quad (ii) \quad g(x) \equiv \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

**問題 5.2.** 次の関数は  $x = 0$  で微分可能か否かを判定せよ.

$$(i) \quad f(x) \equiv |x|, \quad (ii) \quad g(x) \equiv |x| x^2.$$

**問題 5.3.** 次の関数を微分せよ.

$$(i) \quad (x+1)(x+2)(x+3), \quad (ii) \quad (x^2+1)^3, \quad (iii) \quad \log(x+1) \quad (x > -1).$$

**問題 5.4.** 次の関数を微分せよ.

$$(i) \quad 2^x, \quad (ii) \quad e^{-x^2}, \quad (iii) \quad \log \sqrt{x^2+1}, \quad (iv) \quad x^x \quad (x > 0).$$

以上