

基礎数学 I – 練習問題

2007/07/06 西岡
<http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/~nishioka/>

1 集合論と論理

問題 1.1. 50人の学生にたいし、好きなスポーツ種目を調査した。 S をサッカー好き、 B を野球好き、 T をテニス好きとし、

$S \cup B \cup T$	S	B	T	$S \cap B$	$S \cap T$	$B \cap T$
50	40	30	20	15	15	15

であった。3種目とも好きなもの ($S \cap B \cap T$) は何人いるか。

問題 1.2. n を自然数とする。 n 個の白石と $n+1$ 個の黒石が横一列に並んでいる。この石の配列がどうであっても、次の条件を満たす黒石 x が少なくとも一つあることを示せ。

その x とそれより右にある全ての石を取り除くと、列に残った白石と黒石の数が同じになる。ただし、石が一つも残らない状態も同数とみなす。

問題 1.3 (興味を持つ人に)。以下の命題 (i)–(iii) にたいし、その否定を述べよ。

(ヒント：論理式の記号を使って命題を書き直し、その否定を作り、それを日本語に変換する。)

- (i) 任意の自然数 n にたいし、ある自然数 m が存在して 条件 $H(m, n)$ が成立する。
- (ii) 任意の正数 ε にたいし、ある自然数 N が存在して、 N 以上の任意の自然数 n にたいし 条件 $H(\varepsilon, n)$ が成立する。
- (iii) 任意の実数 x にたいし、して 条件 「 $H(x) \Rightarrow K(x)$ 」 が成立する。

3 数列

問題 3.1. 次の極限を求めよ：ただし x は実定数とする。

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

例題 3.2. 年利 r ($r > 0$) の複利で、 A 円を借入れた。途中で返済しない場合に、借入金の総額は以下の通りである：

1年後に $(1+r)A$ 円、2年後に $(1+r)^2 A$ 円、3年後に $(1+r)^3 A$ 円、…。

(i) 1年後に B 円 ($A > B > 0$) を返済した場合、返済直後の借入金残高は $(1+r)A - B$ 円になる。1年後に B 円返済し、2年後にも B 円返済した場合、2年後の返済直後の借入金残高 S_2 を求めよ。

(ii) 1年後に B 円、2年後以降も毎年 B 円返済したとき、 n 年後 ($n \geq 2$) の返済直後の借入金残高 S_n を求めよ。

[解答] (i) $S_2 = (1+r)\{(1+r)A - B\} - B = (1+r)^2 A - \{(1+r) + 1\} B.$

(ii) 前問と同じ考え方をして,

$$\begin{aligned} S_n &= (1+r)^n A - \{(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + 1\} B \\ (3.1) \quad &= (1+r)^n A - \frac{(1+r)^n - 1}{r} B. \quad \square \end{aligned}$$

4 基礎的な関数

4.1 分数関数

問題 4.1. 関数 $f(x) = \frac{1}{x+2} + 3$ のグラフは関数 $g(x) = \frac{1}{x}$ のグラフをどのように平行移動したものか.

問題 4.2. (i) n を自然数として, $f(x) = \frac{1}{x^n}$ の概形を描け.

(ii) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ の概形を描け.

(iii) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$ の概形を描け.

問題 4.3. 不等式 $\frac{5x-6}{x-2} \leq x+1$ をみたす x の範囲を求めよ.

問題 4.4. 関数 $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$ のグラフの概形を描け.

4.2 指数関数

問題 4.5. 次の関数のグラフを描け.

$$(i) f(x) = 3^x, \quad (ii) f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad (iii) f(x) = (\sqrt{2})^x.$$

問題 4.6. 次の方程式をみたす x の値を求めよ.

$$(i) 2^x = 32, \quad (ii) \sqrt{2} = 4^{x-1}, \quad (iii) 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} - 16 = 0.$$

問題 4.7. 次の等式 (i), (ii) を $\sqrt[m]{n}$ ($m, n > 0$) の形に, (iii), (iv) を a^r ($a > 0$) の形にかけ.

$$(i) a^{\frac{3}{7}} \quad (ii) a^{0.2} \quad (iii) \sqrt[5]{\frac{1}{a^3}} \quad (iv) \sqrt{a\sqrt{a}}.$$

問題 4.8. 次の式を計算せよ.

$$\begin{aligned} (i) (a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}) &\quad (ii) (a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - 1 + a^{-\frac{2}{3}}) \\ (iii) (a^x)^{y-z}(a^y)^{z-x}(a^z)^{x-y}. \end{aligned}$$

問題 4.9. $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ のとき, 次の値を求めよ.

$$(1) x + x^{-1} \quad (2) x^2 + x^{-2} \quad (3) x^3 + x^{-3},$$

4.3 対数関数

問題 4.10. (i) 次の等式を同値な $q = \log_a p$ の形に変換せよ.

$$(a) 3^{-2} = \frac{1}{9}, \quad (b) 8^{-\frac{2}{3}} = 0.25.$$

(ii) 次の等式を同値な $p = a^q$ の形に変換せよ.

$$(a) \log_{16} \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}, \quad (b) \log_4 32 = \frac{5}{2}.$$

問題 4.11. 次の式を簡単にせよ.

$$\begin{array}{ll} (i) \log_2 \frac{2}{3} + 3 \log_2 3 - \log_2 9, & (ii) \log_2 18 + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \log_2 \sqrt[3]{12}, \\ (iii) \log_3 2 \cdot \log_8 9, & (iv) (\log_2 5 - \log_4 0.2)(\log_5 2 + \log_{25} 0.5), \end{array}$$

問題 4.12. $a + b = 6$ ($0 < a < b$), $\log_a b + \log_b a = \frac{5}{2}$ のとき, a, b の値を求めよ.

問題 4.13. 次の対数関数のグラフをかけ.

$$(i) f(x) = \log_3(x-1) \quad (ii) f(x) = \log_2 4x \quad (iii) f(x) = -2 \log_2 x + 1$$

問題 4.14. 次の方程式および不等式を解け.

$$\begin{array}{lll} (i) (\log_4 x)^2 = \log_2 8x & (ii) \log_2 x = \log_x 2 & (iii) -2^{\log_2 x} + 4^{\log_2 x} = 2 \\ (iv) \log_2(x-3) + \log_2(x+5) < 2 \log_4(3x+5) & & \\ (v) \log_2(x-1) + 2 \log_4(x+3) \geq \log_2 5 & & \end{array}$$

問題 4.15. 次のものを大小の順に並べよ.

$$\begin{array}{ll} (i) 1 < a < b < a^2 \text{ のとき}, 2, \log_a b, \log_b a, \log_{ab} a^2 \\ (ii) a^2 < b < a < 1 \text{ のとき}, \log_a b, \log_b a, \log_a \frac{a}{b}, \log_b \frac{b}{a}, \frac{1}{2} \end{array}$$

例題 4.16. 年利 r で A 円を借り入れた. 借り入れてから 1 年後に B 円, 2 年後以降も毎年 B 円返済して, n 年後に完済したい. この n を求めよ.

[解答] (3.1) より n 年後の返済残高 S_n は

$$S_n = (1+r)^n A - \frac{(1+r)^n - 1}{r} B$$

である. n 年後に完済だから, $S_n = 0$ となっている. $X \equiv (1+r)^n$ とおいて,

$$0 = X A - \frac{X-1}{r} B \Rightarrow X = \frac{B}{B-rA}.$$

両辺の対数をとり,

$$n \log(1+r) = \log X = \log B - \log(B-rA)$$

となるので,

$$n = \frac{1}{\log(1+r)} \{ \log B - \log(B-rA) \}.$$

ちなみに, 年利 0.04 (4 %) で 1000 万借り入れた場合, 每月の返済額と完済までの必要年の関係は以下の通り:

毎月の返済額	5 万円	6 万円	7 万円	8 万円	9 万円	10 万円
完済年	28 年後	20.7 年後	16.5 年後	13.7 年後	11.8 年後	10.3 年後

5 関数の連続性と微分

問題 5.1. 次の関数は連続関数かどうかを判定せよ.

$$(i) \quad f(x) \equiv \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2, \end{cases} \quad (ii) \quad g(x) \equiv \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

問題 5.2. 次の関数は $x = 0$ で微分可能か否か判定せよ.

$$(i) \quad f(x) \equiv |x|, \quad (ii) \quad g(x) \equiv |x| x^2.$$

問題 5.3. 次の関数を微分せよ.

$$(i) \quad (x + 1)(x + 2)(x + 3), \quad (ii) \quad (x^2 + 1)^3, \quad (iii) \quad \log(x + 1) \quad (x > -1).$$

問題 5.4. 次の関数を微分せよ.

$$(i) \quad 2^x, \quad (ii) \quad e^{-x^2}, \quad (iii) \quad \log \sqrt{x^2 + 1}, \quad (iv) \quad x^x \quad (x > 0).$$

以上