

確率論 II – 練習問題

2007/07/17 西岡

<http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/~nishioka/>

1 確率空間と確率変数

問題 1.1. 公正なコインを 4 回投げる.

- (i) そのときの標本空間 $(\Omega, \mathbf{P})$ を構成せよ.
- (ii) 表が出る回数を X とおく. $k = 0, 1, \dots, 4$ にたいし, $\mathbf{P}[X = k]$ を求めよ.
- (iii) X の平均 $\mathbf{E}[X]$ を求めよ.
- (iv) X の分散 $\mathbf{V}[X]$ を求めよ.

問題 1.2. 確率変数 X は次表の様な分布をもち, 平均 $\mathbf{E}[X] = 1$ である.

X の値	0	1	2
確率	$1/6$	p_1	p_2

- (i) p_1 と p_2 の値を求めよ.
- (ii) X の分散 $\mathbf{V}[X]$ を求めよ.

問題 1.3. $k = 1, 2, \dots, 10$ にたいし, つぎが成立している:

$$\mathbf{P}[X = k] = c k, \quad \mathbf{P}[X = 1] + \mathbf{P}[X = 2] + \dots + \mathbf{P}[X = 10] = 1.$$

- (i) 定数 c を求めよ.
- (ii) X の平均 $\mathbf{E}[X]$ を求めよ.
- (iii) X の分散 $\mathbf{V}[X]$ を求めよ.

問題 1.4. 公正なサイコロを 6 回投げる. 4 の目が丁度 2 回出る確率を求めよ.

問題 1.5. 確率変数 X は成功確率 $0 < p < 1$ のベルヌイ試行,

$$\mathbf{P}[X = 1] = p, \quad \mathbf{P}[X = 0] = 1 - p,$$

確率変数 Y は 2 項分布,

$$\mathbf{P}[Y = k] = {}_n C_k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

とする.

- (i) $1 - X$ の分布を求めよ.
- (ii) $n - Y$ の分布を求めよ.
- (iii) $\mathbf{E}[2^X]$ を計算せよ.
- (iv) X と Y は独立とする. $\mathbf{P}[X = Y]$ を計算せよ.
- (v) X と Y は独立とする. $\mathbf{P}[X + Y = 3]$ および $\mathbf{P}[XY = 0]$ を計算せよ.
- (vi) X と Y は独立とする. $X + Y$ の平均 $\mathbf{E}[X + Y]$ および 分散 $\mathbf{V}[X + Y]$ を求めよ.

2 極限定理

2.1 ポアッソンの小数法則

例題 2.1. 不良品の発生率 3 % の製品群 A がある.

- (i) A から 100 個の製品を取り出す. このとき不良品が 2 個以下である確率を求めよ.
(ii) A から 200 個の製品を取り出す. このとき不良品が 4 個以下である確率を求めよ.

[解答] (i) 100 個取り出したときの不良品の数を X とする. X は 成功確率 $3/100$ のベルヌイ試行を 100 回繰り返す時の成功回数だから,

$$(2.1) \quad \mathbf{P}[X = k] = {}_{100}C_k \left(\frac{3}{100}\right)^k \left(1 - \frac{3}{100}\right)^{100-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 100$$

この (2.1) 右辺の計算は面倒なのでポアッソン分布で近似する:

$$\mathbf{E}[X] = 100 \times \frac{3}{100} = 3$$

だから, $\mathbf{P}[X = k] \simeq \frac{3^k}{k!} e^{-3}$ となるので,

$$\mathbf{P}[X \leq 2] = \left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!}\right) e^{-3} = 0.4231 \dots$$

(ii) 200 個取り出したときの不良品の数を Y とする. (i) と同様に Y は 成功確率 $3/100$ のベルヌイ試行を 200 回繰り返す時の成功回数だから,

$$\mathbf{E}[Y] = 200 \times \frac{3}{100} = 6$$

Y の分布をポアッソン近似して, $\mathbf{P}[Y = k] \simeq \frac{6^k}{k!} e^{-6}$. これより,

$$\mathbf{P}[Y \leq 4] = \left(1 + \frac{6}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!}\right) e^{-6} = 0.285 \dots \quad \square$$

問題 2.2. アタリが出る確率が $1/100$ という籤を 50 回引く. アタリが出る回数を X とする.

(i) X の分布

$$\mathbf{P}[X = k], \quad k = 0, 1, \dots, 50$$

を記せ.

(ii) X の平均 $\mathbf{E}[X]$ を求めよ.

(iii) 「ポアッソンの小数法則」を用いて, X の分布をポアッソン分布で近似せよ.

(iv) 「ポアッソンの小数法則」を用いて, つぎの値を計算せよ:

$$\mathbf{P}[X = k], \quad k = 0, 1, 2, 3$$

ただし, $e^{-1/2} = 0.6$ とする.

問題 2.3. パチンコで「玉が 1 回 “当たりの穴” に入ったときに, さらに “大当たり” になる」確率は $1/1000$ とする.

(i) 「 m 個の玉が “当たり穴” に入ったときに, k 回大当たりになる確率」を $Q(m, k)$ とする. $Q(m, k)$ を記せ.

(ii) 「ポアッソンの小数法則」を用いて, $Q(500, 0)$ および $Q(1200, 0)$ を計算せよ. ただし, $e^{-1/2} = 0.6$, $e^{-1.2} = 0.3$ とせよ.

2.2 大数の法則と中心極限定理

例題 2.4. コイン投げに使うコインが公正かどうかを実験し、

(2.2) 1000 回コインを投げ、表が出た回数=550, 裏が出た回数=450

との結果を得た.

(i) このコインの表が出る確率 p を推定せよ.

(ii) このコインの表が出る確率を (i) で推定した p として, 1000 回のコイン投げで表の出る回数が 520 回以上で 580 回以下となる確率を求めよ.

(iii) このコインの表が出る確率を $1/2$ として, 1000 回のコイン投げで表の出る回数が 550 回以上となる確率を求めよ.

[解答] 確率変数 $X_k, k = 1, 2, \dots, n,$ を

$$X_k \equiv \begin{cases} 1 & k \text{ 回目のコイン投げが表} \\ 0 & k \text{ 回目のコイン投げが裏} \end{cases}$$

とし, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ とする.

(i) 大数の強法則より, 確率 1 で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = p$$

なので, $0.55 = S_{1000}/1000 \simeq p$ と推定する.

(ii) S_n は成功確率 p のベルヌイ試行を n 回繰り返すことだから,

$$\mathbf{E}[S_n] = np, \quad \mathbf{V}[S_n] = np(1-p).$$

S_n の正規化 $\widehat{S}_n$ は

$$\widehat{S}_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

中心極限定理より, $p = 0.55$ として

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[520 \leq S_{1000} \leq 580] &= \mathbf{P}\left[\frac{520 - 1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}} \leq \widehat{S}_{1000} \leq \frac{580 - 1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}}\right] \\ &= \int_{-30/\sqrt{247.5}}^{30/\sqrt{247.5}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = 0.944. \end{aligned}$$

(iii) 今度は $p = 1/2$ として S_{1000} を正規化する.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[S_{1000} \geq 550] &= \mathbf{P}\left[\widehat{S}_{1000} \geq \frac{550 - 1000/2}{\sqrt{1000/4}} = 3.162 \dots\right] \\ &= \int_{3.162}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \simeq 0. \end{aligned}$$

以上 (ii) と (iii) より, このコインの表が出る確率は $1/2$ ではなく 0.55 である. $\square$

[興味を持つ人のために] (2.2) から 無作為標本 $X_1, X_2, \dots, X_{1000}$ の標本平均 $\bar{X}$ と標本分散 s^2 を計算する:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{1000} (1 \times 550 + 0 \times 450) = 0.55, \\ s^2 &= \frac{1}{1000} ((1 - 0.55)^2 \times 550 + (0 - 0.55)^2 \times 450) = 0.2475. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

問題 2.5. 4 択問題 100 問にランダムに解答する. 得点が 10 点以下となる確率を求めよ. ただし

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = 0.041$$

とせよ.

例題 2.6. $X_1, X_2, \dots, X_n$ を正規分布 $N(m, 3^2)$ に従う母集団からの無作為標本とする. 平均 m を信頼区間 95 % で求めたい. 信頼区間の幅を 2 以下にしたいとき, データの数 n をいくらに以上にすればよいか. ただし,

$$\int_{-1.96}^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = 0.95$$

とせよ.

[解答] 正規分布の性質より標本平均

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

は正規分布 $N(m, \frac{3^2}{n})$ に従う. よって

$$\hat{a} \equiv \frac{a - m}{\sqrt{3^2/n}}, \quad \hat{b} \equiv \frac{b - m}{\sqrt{3^2/n}}$$

とおくと,

$$\mathbf{P}[a < \bar{X} < b] = \mathbf{P}[\hat{a} < \frac{\bar{X} - m}{\sqrt{3^2/n}} \leq \hat{b}] = \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$$

となる. $\hat{a} = -1.96$, $\hat{b} = 1.96$ とし, 確率の中の不等式を変形して,

$$\begin{aligned} 0.95 &= \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \mathbf{P}[\hat{a} < \frac{\bar{X} - m}{\sqrt{3^2/n}} < \hat{b}] \\ &= \mathbf{P}[\bar{X} - \frac{3\hat{b}}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} - \frac{3\hat{a}}{\sqrt{n}}] = \mathbf{P}[\bar{X} - \frac{5.88}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + \frac{5.88}{\sqrt{n}}]. \end{aligned}$$

つまり $2 \times 5.88/\sqrt{n} < 2$ だから, $n = 35 > (5.88)^2$ 以上の標本が必要である. $\square$

問題 2.7. ある工場で生産しているボルトの長さは正規分布 $N(m, 1)$ に従う確率変数である. ボルトの抜き取り調査を行い,

長さ	9.9cm	10 cm	10.3 cm
本数	2 本	8 本	6 本

という結果を得た. この工場で製造されるボルトの平均長 m について, 信頼度 95% の信頼区間を求めよ.