確率論 II – 練習問題解答

2007/07/23 西岡
http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/∼nishioka/

質問は

- 07/25(水), 16 時–17 時 = 2 号館 11 階 38 号室,

にて受け付けます. この時間以外に質問したい場合は, メール (nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp) にて在室の時間を問い合わせてください.

1 確率空間と確率変数

問題 1.1. (i) 表を 1, 裏を 0 で表し,

$$w_1 \equiv (1,1,1,1), \quad w_2 \equiv (1,1,1,0), \quad w_3 \equiv (1,1,0,1), \quad w_4 \equiv (1,0,1,1)$$
$$\cdots, w_{15} \equiv (0,0,0,1), \quad w_{16} \equiv (0,0,0,0)$$

とおく. すると 確率空間 $(\Omega, \mathbf{P})$ は

$$\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_{16}\}, \qquad \mathbf{P}[w_k] = \frac{1}{16}, \quad k = 1, 2, \cdots, 16.$$

(ii) $\mathbf{P}[X = k] = {}_4C_k \cdot \frac{1}{16}, \ k = 0, \cdots, 4.$

(iii) $\mathbf{E}[X] = 2.$

(iv) $\mathbf{V}[X] = 1. \quad \square$

問題 1.2. (i) $\mathbf{E}[X] = 1$ だから

$$1 = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2.$$

また全ての確率を足すと 1 になるので,

$$1 = \frac{1}{6} + p_1 + p_2.$$

この連立方程式を解くと, $p_1 = 4/6, \ p_2 = 1/6.$

(ii)

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \big(\mathbf{E}[X]\big)^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{4}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} - 1^2 = \frac{1}{3}. \quad \square$$

問題 1.3. (i)

$$1 = \sum_{k=1}^{10} \mathbf{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{10} c\,k = c\,\frac{10 \cdot 11}{2} = 55c$$

これより, $c = 1/55.$

(ii)

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=1}^{10} k \cdot ck = \frac{1}{55} \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{1}{55} \cdot 385 = 7.$$

(iii)

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \big(\mathbf{E}[X]\big)^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2\ ck - 7^2 = \frac{3025}{55} - 49 = 6. \quad \square$$

問題 1.4.

$$\text{求める確率} = {}_6C_4\ (\frac{1}{6})^2\ (\frac{5}{6})^4 = \frac{3125}{15552} \simeq 0.2009\ldots. \quad \square$$

問題 1.5. (i) $\mathbf{P}[1 - X = 0] = p, \quad \mathbf{P}[1 - X = 1] = 1 - p.$

(ii) $\mathbf{P}[n - Y = k] = {}_nC_{n-k}\ p^{n-k}\ (1-p)^k = {}_nC_k\ p^{n-k}\ (1-p)^k.$

(iii) $\mathbf{E}[2^X] = 2^1 \cdot \mathbf{P}[X = 1] + 2^0 \cdot \mathbf{P}[X = 0] = 2p + 1(1 - p) = 1 + p.$

(iv) X と Y は独立だから

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}[X = Y] = \mathbf{P}[X = 0, Y = 0] + \mathbf{P}[X = 1, Y = 1] \\
&= \mathbf{P}[X = 0] \cdot \mathbf{P}[Y = 0] + \mathbf{P}[X = 1] \cdot \mathbf{P}[Y = 0] \\
&= (1-p) \cdot {}_nC_0\ p^0(1-p)^n + p \cdot {}_nC_1\ p^1(1-p)^{n-1} \\
&= (1-p)^{n+1} + n\,p^2\,(1-p)^{n-1} = (1-p)^{n-1}\big\{(n+1)\,p^2 - 2p + 1\big\}.
\end{aligned}$$

(v) X と Y は独立だから

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}[X + Y = 3] = \mathbf{P}[X = 0, Y = 3] + \mathbf{P}[X = 1, Y = 2] \\
&= \mathbf{P}[X = 0] \cdot \mathbf{P}[Y = 3] + \mathbf{P}[X = 1] \cdot \mathbf{P}[Y = 2] \\
&= p \cdot {}_nC_3\ p^3(1-p)^{n-3} + (1-p) \cdot {}_nC_2\ p^2(1-p)^{n-2} \\
&= \big\{\frac{1}{6}n\,(n-1)\,(n-2) + \frac{1}{2}n\,(n-1)\big\}\,p^3\,(1-p)^{n-2} = \frac{1}{6}\,n\,(n^2-1)p^3\,(1-p)^{n-2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}[XY = 0] = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}[X = 0, Y = k] + \mathbf{P}[X = 1, Y = 0] \\
&= \mathbf{P}[X = 0] \cdot \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}[Y = k] + \mathbf{P}[X = 1] \cdot \mathbf{P}[Y = 0] \\
&= (1-p) \cdot 1 + p \cdot {}_nC_0\ p^0(1-p)^n = (1-p) + p\,(1-p)^n.
\end{aligned}$$

(vi) まず $\mathbf{E}[X] = p$, $\mathbf{E}[Y] = np$. よって $\mathbf{E}[X + Y] = p + np = (1 + n)p$.
つぎに, $\mathbf{V}[X] = p(1-p)$, $\mathbf{V}[Y] = n\,p(1-p)$. X と Y は独立だから

$$\mathbf{V}[X + Y] = p(1-p) + n\,p(1-p) = (n+1)\,p\,(1-p). \quad \square$$

2 極限定理

2.1 ポアッソンの小数法則

問題 2.2. (i) $\quad \mathbf{P}[X=k] = {}_{50}C_k\,(\frac{1}{100})^k\,(\frac{99}{100})^{50-k}, \quad k=0,1,\cdots,50.$

(ii) 成功確率 1/100 のベルヌイ試行を 50 回繰り返すので, $\mathbf{E}[X] = 50 \times (1/100) = 1/2$.

(iii) 平均 1/2 のポアッソン分布で X は近似できる:

$$\mathbf{P}[X=k] \simeq \frac{(1/2)^k}{k!}\,e^{-1/2}, \quad k=0,1,2,\cdots. \tag{2.1}$$

(iv) (2.1) と $e^{-1/2} = 0.6$ を使うと

$$\mathbf{P}[X=k] = \frac{(1/2)^k}{k!}\cdot 0.6, \quad k=0,1,2,3$$

となり

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}[X=k]$	0.6	0.3	0.075	0.0125

□

問題 2.3. (i) 成功確率 1/1000 のベルヌイ試行を m 回繰り返すことだから,

$$Q(m,k) = {}_mC_k\,(\frac{1}{1000})^k\,(\frac{999}{1000})^{m-k}, \quad k=0,1,\cdots,m.$$

(ii) 成功確率 1/1000 のベルヌイ試行を m 回繰り返すと平均成功回数は $m/1000$. $e^{-1/2} = 0.6$, $e^{-1.2} = 0.3$ とすると,

$$Q(500,0) \simeq \frac{(500/1000)^0}{0!}\,e^{-500/1000} = e^{-1/2} = 0.6,$$
$$Q(1200,0) \simeq \frac{(1200/1000)^0}{0!}\,e^{-1200/1000} = e^{-1.2} = 0.3. \quad \square$$

2.2 大数の法則と中心極限定理

問題 2.5. 4 択問題 100 問にランダムに解答することは, 成功確率 1/4 のベルヌイ試行を 100 回繰り返すことである. X で正答の数を表すと,

$$\mathbf{E}[X] = 100\cdot\frac{1}{4} = 25, \qquad \mathbf{V}[X] = 100\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{25\cdot 3}{4}.$$

X の正規化 $\widehat{X}$ は

$$\widehat{X} = \frac{X-\mathbf{E}[X]}{\sqrt{\mathbf{V}[X]}} = \frac{X-25}{5\sqrt{3}/2}$$

だから, 中心極限定理を使って

$$\mathbf{P}[X\le 10] = \mathbf{P}[\widehat{X} \le \frac{10-25}{5\sqrt{3}/2}] = \mathbf{P}[\widehat{X} \le -2\sqrt{3}] \simeq \int_{-\infty}^{-2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}\,dx$$

数表もしくはコンピューターを使うと

$$\int_{-\infty}^{-2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{x^2}{2}\}\, dx = 0.00026\cdots$$

となるので, 上記の確率は殆ど 0 である. □

問題 2.7 (範囲外)**.** この工場で生産しているボルトの長さが正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数とすると, n 個の標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

は 正規分布 $N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ に従う. よって

$$\widehat{a} \equiv \frac{a-m}{\sqrt{\sigma^2/n}}, \quad \widehat{b} \equiv \frac{b-m}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

とおくと,

$$\mathbf{P}[a < \overline{X} < b] = \mathbf{P}[\widehat{a} < \frac{\overline{X}-m}{\sqrt{\sigma^2/n}} < \widehat{b}] = \int_{\widehat{a}}^{\widehat{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{x^2}{2}\}\, dx$$

となる. $\widehat{a} = -1.96$, $\widehat{b} = 1.96$ とし, 確率の中の不等式を変形して,

$$\begin{aligned} 0.95 &= \int_{\widehat{a}}^{\widehat{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{x^2}{2}\}\, dx = \mathbf{P}[\widehat{a} < \frac{\overline{X}-m}{\sqrt{\sigma^2/n}} < \widehat{b}] \\ &= \mathbf{P}[\overline{X} - \widehat{b}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} < m < \overline{X} - \widehat{a}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}] \end{aligned} \tag{2.2}$$

ボルトの抜き取り調査では,

長さ	9.9cm	10 cm	10.3 cm
本数	2 本	8 本	6 本

という結果を得たので,

$$\overline{X} = \frac{9.9 \times 2 + 10 \times 8 + 10.3 \times 6}{16} = 10.1,$$

$n = 16$, $\sigma^2 = 1$ を (2.2) の [ ] 内に代入し,

$$\overline{X} - \widehat{b}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 10.1 - 1.96 \cdot \frac{1}{4} = 9.61, \quad \overline{X} - \widehat{a}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 10.1 + 1.96 \cdot \frac{1}{4} = 10.59.$$

この工場で製造されるボルトの平均長 m について, 信頼度 95% の信頼区間は

$$9.61 < m < 10.59$$

である. □