金利計算とネイピア数

2007/06/08,　西岡 國雄[1]

1　2 項定理

n を自然数とする. n 個のものを左から順番に並べる方法は

$n! \equiv n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1;$　n の**階乗 (factorial)** と呼ぶ,
(ただし $0! \equiv 1$ と約束する)

通りある. すると全体が n 個のものから k 個を取り出す方法は

$$ {}_nC_n \equiv \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad k = 0, 1, \cdots, n \tag{1}$$

通りあり, ${}_nC_n$ は **2 項係数**と呼ばれる[2].

補題 1. 2 項係数は次の性質を持つ.

$$ {}_nC_0 = 1 = {}_nC_n, \tag{2}$$

$$ {}_nC_n = {}_nC_{n-k}, \tag{3}$$

$$ {}_nC_n + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1}. \quad \diamond \tag{4}$$

[証明]　(2) と (3) は定義式 (1) からすぐに判る. (4) を示す.

$$\begin{aligned}
{}_nC_n + {}_nC_{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\Big(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(k+1)\,(n-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,\big(n-k\big)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,\big(n+1-(k+1)\big)!} = {}_{n+1}C_{k+1}. \quad \square
\end{aligned}$$

さて 2 項係数 (1) は多項式 $(x+y)^n$ の展開に応用できる.

定理 2 (2 項定理). 実数 x, y と自然数 n にたいし, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_n \; x^{n-k}\, y^n \\
&= x^n + {}_nC_1\; x^{n-1}\, y + {}_nC_2\; x^{n-2}\, y^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}\; x\, y^{n-1} + {}_nC_n\; y^n. \quad \diamond
\end{aligned} \tag{5}$$

---

[1] 2 号館 11 階 21138 号室,　nishioka@tmacc.chuo-u.ac.jp
http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/〜nishioka

[2] この名称は「2 項定理」に由来する. また, 2 項係数を表す記号として, 数学専門書では

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

がしばしば使われる.

[証明] (興味を持つ人のための項目で飛ばしても良い)

数学的帰納法を使う.

Step 1. まず, “ $n=1$ の場合に, (5) が成立する ” ことを示す.

(2) だから,

$$(5)\text{ の左辺} = \sum_{k=0}^{1} {}_1C_n x^{1-k}\, y^n = {}_1C_0\; x\, y^0 + {}_1C_1\; x^0\, y = x + y = (5)\text{ の右辺}$$

となり, たしかに $n=1$ で (5) は成立している.

Step 2. つぎに “ $n=r$ で (5) が成立 $\Rightarrow$ $n=r+1$ でも (5) が成立 ” を示す.

$$\begin{aligned}
&(x+y)^{r+1} = (x+y)\cdot(x+y)^r \quad [n=r\text{ で (5) が成立との仮定を使い}]\\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{r} {}_rC_n\; x^{r-k}\, y^n = \sum_{k=0}^{r} {}_rC_n\; \left(x^{r+1-k}\, y^n + x^{r-k}\, y^{k+1}\right) =\\
&= {}_rC_0\; \left(x^{r+1} + x^r\, y\right) + {}_rC_1\; \left(x^r\, y + x^{r-1}\, y^2\right) + {}_rC_2\; \left(x^{r-1}\, y^2 + x^{r-2}\, y^3\right)\\
&\qquad + \cdots + {}_rC_j\; \left(x^{r-j+1}\, y^{r-j} + x^{r-j}\, y^{j+1}\right) + {}_rC_{j+1}\; \left(x^{r-j}\, y^{j+1} + x^{r-j-1}\, y^{j+2}\right)\\
&\qquad + \cdots + {}_rC_{r-1}\; \left(x^2\, y^{r-1} + x\, y^r\right) + {}_rC_r\; \left(x\, y^r + y^{r+1}\right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6)\qquad &= {}_rC_0\; x^{r+1} + \left({}_rC_0 + {}_rC_1\right)x^r\, y + \left({}_rC_1 + {}_rC_2\right)x^{r-1}\, y^2\\
&\qquad + \cdots + \left({}_rC_j + {}_rC_{j+1}\right)x^{r-j}\, y^{j+1} + \cdots + \left({}_rC_{r-1} + {}_rC_r\right)x\, y^r + {}_rC_r\; y^{r+1}.
\end{aligned}$$

ここで (4) を使うと

$$\begin{aligned}
&{}_rC_0 = 1 = {}_{r+1}C_0, \quad {}_rC_0 + {}_rC_1 = {}_{r+1}C_1, \quad {}_rC_1 + {}_rC_2 = {}_{r+1}C_2,\ \cdots,\\
&{}_rC_j + {}_rC_{j+1} = {}_{r+1}C_{j+1},\ \cdots,\ {}_rC_{r-1} + {}_rC_r = {}_{r+1}C_r, \quad {}_rC_r = 1 = {}_{r+1}C_{r+1}
\end{aligned}$$

となる. (6) から続けて

$$\begin{aligned}
&(x+y)^{r+1} = (6) = {}_{r+1}C_0\; x^{r+1} + {}_{r+1}C_1\; x^r\, y + {}_{r+1}C_2\; x^{r-1}\, y^2\\
&\qquad + \cdots + {}_{r+1}C_{j+1}\; x^{r+1-j}\, y^{r-j} + \cdots {}_{r+1}C_r\; x\, y^r + {}_{r+1}C_{r+1}\; y^{r+1}\\
&= \sum_{k=0}^{r+1} {}_{r+1}C_n\; x^{r+1-k}\, y^n.
\end{aligned}$$

よって $n=r+1$ で (5) が成立することが示され, 数学的帰納法が完結した. □

2 ネイピア数

年利 r で A 円を借り入れる. 利子は複利で計算されるので, 借金の総額は

	0 年目	1 年目	2 年目	3 年目	$\cdots$	n 年目
総額	A	$A(1+r)$	$A(1+r)^2$	$A(1+r)^3$	$\cdots$	$A(1+r)^n$

と “ 公比 r の等比数列 ” になる.

とくに 1 年間の借り入れでは

$$(7) \qquad A \quad \to \quad A(1+r)$$

である. ところが 年利 r ではなく, 毎月の利率 $r/12$ で利息計算をする場合は,

$$(8) \qquad A \quad \to \quad A(1+\frac{r}{12})^{12}$$

となるが, このとき次の問題が発生する:

問題 3. “年利 r で計算した (7)” と “月利 $r/12$ で計算した (8)” では, どちらの金額が大きいか?

[解答] (7) < (8). なぜなら, 定理 2 より

$$\begin{aligned}
&A\ (1+\frac{r}{12})^{12} = A\ \{{}_0C_0 + {}_{12}C_1\ (\frac{r}{12}) + {}_{12}C_2\ (\frac{r}{12})^2 + \cdots + {}_{12}C_{12}\ (\frac{r}{12})^{12}\} \\
&= A\ \{1 + 12\cdot\frac{r}{12} + \frac{12\cdot 11}{2!}\ (\frac{r}{12})^2 + \cdots + 1\cdot(\frac{r}{12})^{12}\} \\
&> A\ \{1 + 12\cdot\frac{r}{12}\} = A\ (1+r). \quad \square
\end{aligned}$$

実は, 同じ 1 年間の借り入れでも

$$(9) \qquad \text{年利 } r \text{ の利息} \ < \ \text{月利 } \frac{r}{12} \text{ の利息} \ < \ \text{日利 } \frac{r}{365} \text{ の利息}$$

との不等式が成立している. この事情を一般化して考えるために,

$$(10) \qquad \text{数列} \quad a_n \equiv (1+\frac{1}{n})^n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

の性質を調べてみよう. 定理 2 で $x = 1, y = 1/n$ とおくと

$$\begin{aligned}
&a_n = (1+\frac{1}{n})^n = \\
&= 1 + {}_nC_1\cdot(\frac{1}{n}) + {}_nC_2\ (\frac{1}{n})^2 + \cdots + {}_nC_j\ (\frac{1}{n})^j + \cdots + {}_nC_n\ (\frac{1}{n})^n = \\
&= 1 + \frac{n!}{1!\ (n-1)!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n!}{2!\ (n-2)!}\cdot(\frac{1}{n})^2 + \cdots + \\
&\qquad + \frac{n!}{j!\ (n-j)!}\cdot(\frac{1}{n})^j + \cdots + \frac{n!}{n!\ 0!}\cdot(\frac{1}{n})^n = \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot(\frac{1}{n})^2 + \cdots + \\
&\quad + \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}\cdot(\frac{1}{n})^j + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot(\frac{1}{n})^n = \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\cdot 1\cdot\bigl(1-\frac{1}{n}\bigr) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{j!}\cdot 1\cdot\bigl(1-\frac{1}{n}\bigr)\cdots\bigl(1-\frac{n-j}{n}\bigr) + \cdots + \\
&\qquad + \frac{1}{n!}\cdot 1\cdot\bigl(1-\frac{1}{n}\bigr)\cdots\bigl(1-\frac{n-2}{n}\bigr)\cdot\bigl(1-\frac{n-1}{n}\bigr)
\end{aligned}$$

となる. 結局, つぎの等式が得られた:

$$
\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{n})^n \\
&= 2 + \frac{1}{2!}\cdot(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{j!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-j}{n}) + \\
&\qquad + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-2}{n})\cdot(1-\frac{n-1}{n}).
\end{aligned} \tag{11}
$$

この等式から 数列 $\{a_n, n=1,2,\cdots\}$ の重要な性質を導びくことができる.

補題 4. 数列 (10) は単調増加, つまり $a_n < a_{n+1}$, $n=1,2,\cdots$.　$\diamond$

[証明]　まず, 次の不等式が成立していることに注意する:

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1}, \quad \cdots, \\
&(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-j}{n}) < (1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-j}{n+1}), \quad \cdots \\
&(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-2}{n})\cdot(1-\frac{n-1}{n}) < (1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-2}{n+1})\cdot(1-\frac{n-1}{n+1}).
\end{aligned}
$$

これを (11) に適用して

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2 + \frac{1}{2!}\cdot(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{j!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-j}{n}) + \\
&\qquad + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-2}{n})\cdot(1-\frac{n-1}{n}) \\
&< 2 + \frac{1}{2!}\cdot(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{j!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-j}{n+1}) + \\
&\qquad + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-2}{n+1})\cdot(1-\frac{n-1}{n+1}) \\
&< 2 + \frac{1}{2!}\cdot(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{j!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-j}{n+1}) + \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-2}{n+1})\cdot(1-\frac{n-1}{n+1}) \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})\cdot(1-\frac{n}{n+1}) = a_{n+1}. \quad \square
\end{aligned}
$$

補題 5. 任意の $n=1,2,\cdots$ にたいし　$2 \le a_n < 3$.　$\diamond$

[証明]　自然数 m にたいする不等式

$$
m! = m\cdot(m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 > 2\cdot 2\cdots 2 = 2^{m-1}
$$

を (11) に使うと

$$
\begin{aligned}
a_n &\le 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{j!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \cdots + (\frac{1}{2})^{j-1} + \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1} \\
&= 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1/2} < 1 + \frac{1}{1/2} = 3.
\end{aligned}
$$

$a_n \ge 2$ は自明だから補題の証明を終える.　$\square$

定理 6. 数列 (10) は単調増加で 3 以下だから, $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する[3]. $\diamond$

この極限値の具体的な値は理論では計算できないので, 次のように定義する.

定義 7 (e の定義)**.** $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$ とおき, **ネイピア数**[4] とよぶ. なお e は無理数で, $e = 2.71828\cdots$ である. $\diamond$

3 金利の計算法

最後に (9) を一般化し,

年利 r を N 等分した利率 r/N で A 円を 1 年間 (= N 期間) 借り入れる

場合の借金総額

$$A\,(1+\frac{r}{N})^N \tag{12}$$

の極限を計算してみよう.

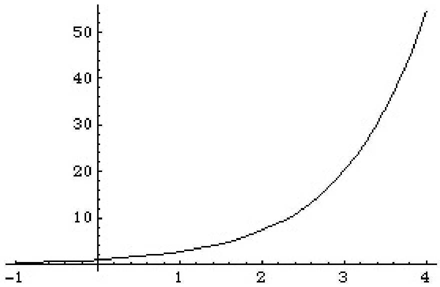
$N \equiv r\,M$ とおくと

$$(12) = A\,(1+\frac{r}{rM})^{Mr} = A\,\big\{(1+\frac{1}{M})^M\big\}^r$$

となる. $r>0$ は定数なので, $N\to\infty$ のとき $M\to\infty$ となる. すると 定義 7 より

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} A\,(1+\frac{r}{N})^N &= \lim_{M\to\infty} A\,\big\{(1+\frac{1}{M})^M\big\}^r \\ &= A\,\big\{\lim_{M\to\infty}(1+\frac{1}{M})^M\big\}^r = A\,e^r.\end{aligned}$$

定義 8 (重要). $f(r)\equiv e^r$ を r の関数と見なし, **指数関数**とよぶ.



$f(r) = e^r$

この指数関数を使うと金利計算が大幅に簡略化され, しかも (12) での計算方法との誤差も大変小さい.

実際, 利率 $r=0.05$ および $r=0.2$ (消費者金融並みの高利) で 1 年間借り入れた時, 両者の値を比較すると, ”日割りでの利息計算” や “時間割での利息計算” では差が殆どない.

[3] ”正当派の格調高い表現” では「実数の完備性により, 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は収束する」という.
[4] オイラー数とも呼ばれる.

	$r=0.05$		$r=0.2$	
	$N=365$ (日割りでの利息)	$N=365\times 24$ (時間割での利息)	$N=365$ (日割りでの利息)	$N=365\times 24$ (時間割での利息)
$f(r)=e^r$	$1.05127\cdots$		$1.2214\cdots$	
$(1+\frac{r}{N})^N$	$1.05127\cdots$	$1.05127\cdots$	$1.22134\cdots$	$1.2214\cdots$

注意 9. (11) を得るのと同様の方法により, 以下の等式が導かれる.

$$(1+\frac{r}{n})^n = 1+\frac{r}{1!}+\frac{r^2}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{r^j}{j!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-j}{n}\right)+ \\ +\cdots+\frac{r^n}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{13}$$

つぎに $0<r<1$ として, 補題 5 と同じ計算を行い,

$$1+r\le(1+\frac{r}{n})^n\le 1+r+\frac{r^2}{2}+\cdots+\frac{r^n}{2^{n-1}}\le 1+\frac{r}{1-(r/2)}.$$

ここで $n\to\infty$ として

$$1+r\le e^r\le 1+\frac{r}{1-(r/2)},\quad 0<r<1 \tag{14}$$

が成立することが示された.

この不等式は，指数関数 $f(r)\equiv e^r$ の微分を考えるときに必要となる． $\diamond$

以上