

基礎数学 I – 練習問題解答

2007/07/22 西岡

<http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/~nishioka/>

質問は オフィスアワー の外に,

- 07/23(月), 4 限 = 2 号館 11 階 38 号室,

- 07/23(月), 5 限 = 5 号館 6 階 5605 室

にて受け付けます. この時間以外に質問したい場合は, メール (nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp)
にて在室の時間を問い合わせてください.

1 集合論と論理

問題 1.1. $S \cap B \cap T$ の人数を X とすると,

$$50 = 40 + 30 + 20 - 15 - 15 - 15 + X \Rightarrow X = 5. \quad \square$$

問題 1.2. 数学的帰納法で証明する.

Step 1. $n = 1$ の場合, W を白石, B を黒石とすると

$$WBB, \quad BWB, \quad BBW$$

の配列がありえる. 上記, 左の 2 つの配列では右端の B が要件をみたす黒石, 3 番目の配列では左端の B が要件をみたす黒石である.

Step 2. $n = k$ で要件が成立しているとする.

さて $n = k + 1$ の場合に, 石の配列を $\triangle$ で表し, 左端から番号を付ける:

$$(1.1) \quad \begin{array}{cccccccc} \triangle & \triangle & \cdots & \triangle & \triangle & \triangle & \cdots & \triangle \\ 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & 2k+3 \end{array}$$

この (1.1) の配列を以下の 2 通りに分類し, 要件が成立することを確認する.

Case 1. 座標 1 の石が黒. $\Rightarrow$ 座標 1 の石が要件を満たす黒石.

Case 2. 座標 1 の石が白. $\Rightarrow$ 左から数えて最初の黒石が座標 j にあるとする. $2 \leq j \leq k+2$.
ここで (1.1) から「座標 1 の白石, 座標 j の黒石」を除いた配列を考える: (W) および (B)
で取り除いた石を表すと

$$(1.2) \quad \begin{array}{cccccccc} (W) & W & \cdots & W & (B) & \triangle & \cdots & \triangle \\ 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & 2k+3 \end{array}$$

となる. 配列 (1.2) では白石は k 個, 黒石は $k+1$ 個であるから, Step 2 の仮定より, 要件が成立する. つまり 座標 ℓ ($j+1 \leq \ell \leq 2k+3$) に黒石 X があり, 座標 $2, \dots, j-1, j+1, \dots, \ell-1$ にある石では白黒同数となる:

$$(1.3) \quad \begin{array}{cccccccccccc} (W) & W & \cdots & W & (B) & \triangle & \cdots & \triangle & X & \cdots & \triangle \\ 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & \ell-1 & \ell & \cdots & 2k+3 \end{array}$$

(W) および (B) の石を取り除いた位置にもどすと, $1, \dots, \ell - 1$ の位置にある石では白黒同数となり, $n = k + 1$ の場合に要件を満たす黒石 X の存在が示された.

なお (1.2) および (1.3) では $j \neq 2$ として図示したが, $j = 2$ の場合も同様である.

以上 Step 1 および Step 2 により, 数学的帰納法が成立した. $\square$

問題 1.3 (興味を持つ人に). (i) 任意の自然数 n にたいし, ある自然数 m が存在して 条件 $H(m, n)$ が成立する.

これを論理式で書くと,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N} \left(H(m, n) \text{ holds} \right)$$

となる. 否定文の作り方から,

$$\exists n \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N} \left(H(m, n) \text{ does not hold} \right)$$

つまり「どんな自然数 m にたいしても条件 $H(m, n)$ が成立しない自然数 n がある」.

(ii) 任意の正数 ε にたいし, ある自然数 N が存在して, N 以上の任意の自然数 n にたいし 条件 $H(\varepsilon, n)$ が成立する.

これを論理式で書くと,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} \left(\text{for } \forall n \geq N, H(\varepsilon, n) \text{ holds} \right),$$

となる. 否定文の作り方から,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N} \left(\text{for } \exists n \geq N, H(\varepsilon, n) \text{ does not hold} \right).$$

つまり「どんな $N \in \mathbf{N}$ にたいしても, 条件 $H(\varepsilon, n)$ が成立しない $n \geq N$ と $\varepsilon > 0$ がある」.

(iii) 任意の実数 x にたいし, 条件「 $H(x) \Rightarrow K(x)$ 」が成立する.

これを論理式で書くと,

$$\forall x \in \mathbf{R} \left(H(x) \Rightarrow K(x) \right)$$

となる. 否定文の作り方から,

$$\exists x \in \mathbf{R} \left(H(x) \nRightarrow K(x) \right)$$

つまり「 $(H(x) \Rightarrow K(x))$ が成立しない $x \in \mathbf{R}$ が存在する」.

3 数列

問題 3.1. (i)

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$$

ネイピア数 e の定義と簡単な極限計算より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 1$$

だから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

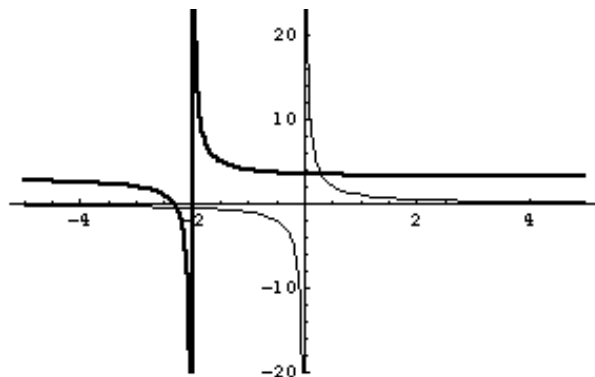
$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x. \quad \square$$

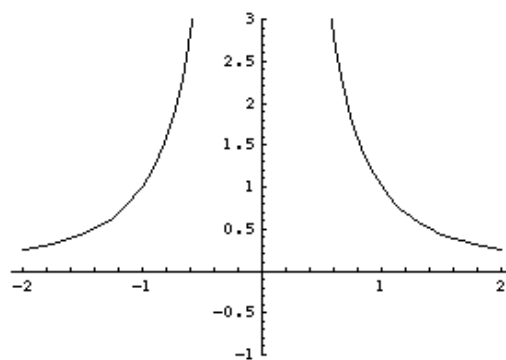
4 基礎的な関数

4.1 分数関数

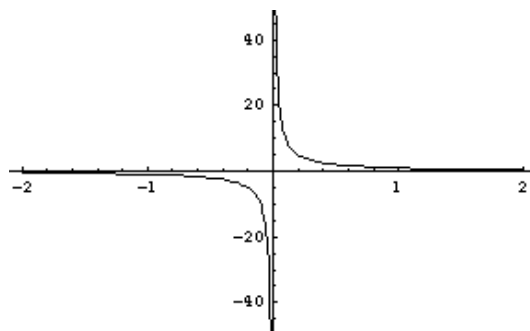
問題 4.1. $f(x)$ は $g(x)$ のグラフの中心を $(0, 0)$ から $(-2, 3)$ に平行移動したものである.



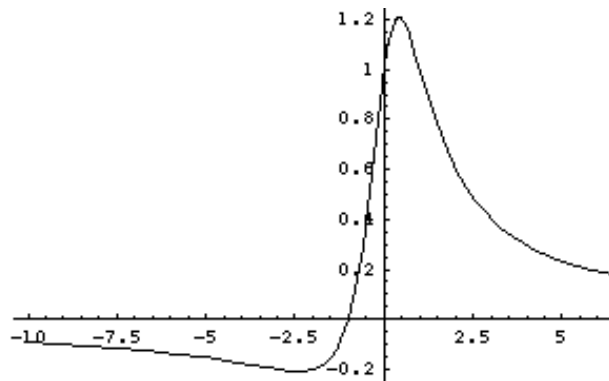
問題 4.2. (i) (i) Case 1. n が偶数の場合:



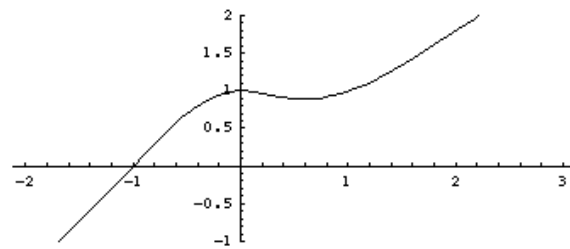
Case 2. n が奇数の場合:



(ii)



(iii)



問題 4.3. Case 1. $x > 2$ とする. このとき

$$5x - 6 \leq (x + 1)(x - 2) \Rightarrow 0 \leq x^2 - 6x + 4 = (x - 3)^2 - 5.$$

よって

$$x \geq 3 + \sqrt{5} \sim 5.23 \dots \quad \text{もしくは} \quad x \leq 3 - \sqrt{5} \sim 0.76 \dots$$

仮定が $x > 2$ だから, 結局 $x > 3 + \sqrt{5}$.

Case 2. $x < 2$ とする. このとき

$$5x - 6 \geq (x + 1)(x - 2) \Rightarrow 0 \geq x^2 - 6x + 4 = (x - 3)^2 - 5.$$

よって

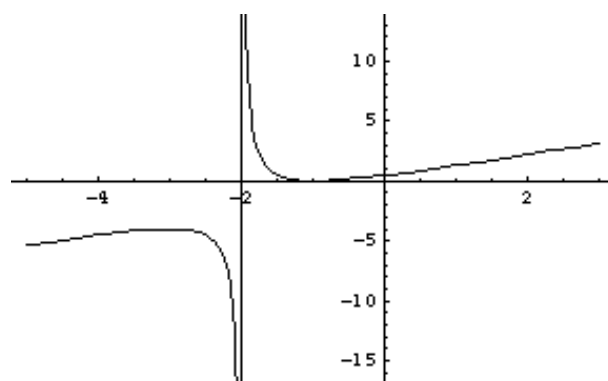
$$3 - \sqrt{5} \leq x \leq 3 + \sqrt{5}$$

仮定が $x < 2$ だから, 結局 $3 - \sqrt{5} \leq x < 2$.

つまり, Cases 1, 2 より

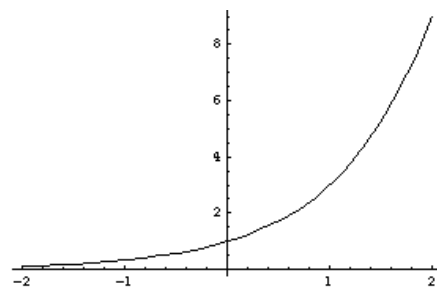
$$x \geq 3 + \sqrt{5} \quad \text{もしくは} \quad 3 - \sqrt{5} \leq x < 2. \quad \square$$

問題 4.4

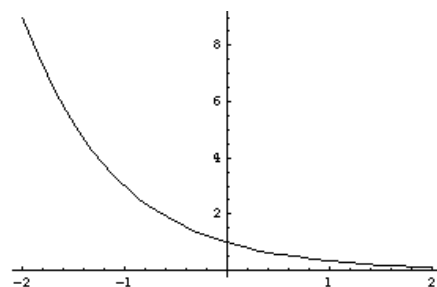


4.2 指数関数

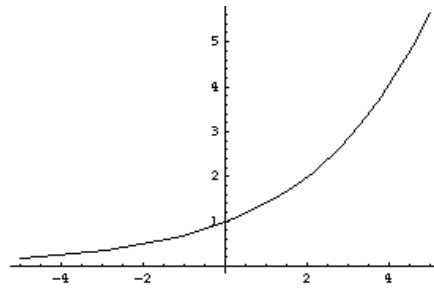
問題 4.5. (i)



(ii)



(iii)



問題 4.6. (i) $32 = 2^5$ だから $x = 5$.

(ii) $2^{1/2} = \sqrt{2} = 4^{x-1} = 2^{2(x-1)}$ だから, $x = 5/4$.

(iii) $2^x \equiv y$ とおくと,

$$y^2 - 3 \cdot 2 \cdot y - 16 = 0. \Rightarrow (y - 8)(y + 2) = 0.$$

$y = 2^x > 0$ に注意して, $y = 8$. つまり $x = 3$. $\square$

問題 4.7. (i) $a^{3/7} = \sqrt[7]{a^3}$. (ii) $a^{0.2} = a^{1/5} = \sqrt[5]{a}$. (iii) $\sqrt[5]{\frac{1}{a^3}} = a^{-3/5}$.

(iv) $\sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt{a^3}} = a^{3/4}$. $\square$

問題 4.8. (i) 簡単な計算で

$$(a^{1/4} - a^{-1/4})(a^{1/4} + a^{-1/4})(a^{1/2} + a^{-1/2}) = (a^{1/2} - a^{-1/2})(a^{1/2} + a^{-1/2}) = a - a^{-1}.$$

(ii) 実際に計算する:

$$(a^{1/3} + a^{-1/3})(a^{2/3} - 1 + a^{-2/3}) = a - a^{1/3} + a^{-1/3} + a^{1/3} - a^{-1/3} + a^{-1} = a + a^{-1}.$$

(iii) $(a^x)^{y-z} (a^y)^{z-x} (a^z)^{x-y} = a^{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)} = a^0 = 1$. $\square$

問題 4.9. (i) まず

$$9 = 3^2 = (x^{1/2} + x^{-1/2})^2 = x + 2 + x^{-1}$$

より $x + x^{-1} = 7$.

(ii)

$$49 = 7^2 = (x + x^{-1})^2 = x^2 + 2 + x^{-2}$$

だから $x^2 + x^{-2} = 49 - 2 = 47$.

(iii)

$$329 = 7 \cdot 47 = (x + x^{-1})(x^2 + x^{-2}) = x^3 + x^{-1} + x^1 + x^{-3} = x^3 + x^{-3} + 7$$

だから, $x^3 + x^{-3} = 322$. $\square$

4.3 対数関数

問題 4.10. (i) (a) 底を 3 とする対数関数を考えると $-2 = \log_3 1/9$.

(b) 底を 8 とする対数関数をとる: $-2/3 = \log_8 0.25 = \log_8 1/4$.

(ii) (a) 対数関数の定義より $1/2 = 16^{-1/4}$.

(b) 同様に, $32 = 4^{5/2}$. $\square$

問題 4.11. (i) $\log_2 \frac{2}{3} + 3 \log_2 3 - \log_2 9 = \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 3^3 - \log_2 9 = \log_2 (\frac{2}{3} \cdot 27 \cdot \frac{1}{9}) = \log_2 2 = 1$.

(ii) $\log_2 18 + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \log_2 \sqrt[3]{12} = \log_2 18 + \log_2 \frac{1}{\sqrt{3}} - \log_2 (12^{1/3})^{3/2}$
 $= \log_2 (18 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}) = \log_2 \frac{18}{\sqrt{36}} = \log_2 3$.

(iii) $\log_3 2 \cdot \log_8 9 = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 8} = \log_3 2 \cdot \frac{2}{\log_3 2^3} = \frac{2}{3}$.

(iv) $\log_2 5 - \log_4 0.2 = \log_2 5 - \log_4 1/5 = \log_2 5 - \frac{\log_2 1/5}{\log_2 4} = \log_2 5 + \frac{1}{2} \log_2 5 = \frac{3}{2} \log_2 5$.
また

$$\log_5 2 + \log_{25} 0.5 = \log_5 2 + \log_{25} 1/2 = \log_2 5 + \frac{\log_5 1/2}{\log_5 25} = \log_5 2 - \frac{1}{2} \log_5 2 = \frac{1}{2} \log_5 2.$$

よって

$$(\log_2 5 - \log_4 0.2)(\log_5 2 + \log_{25} 0.5) = \frac{3}{2} \log_2 5 \cdot \frac{1}{2} \log_5 2 = \frac{3}{4} \log_2 5 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = \frac{3}{4}. \quad \square$$

問題 4.12.

$$\frac{5}{2} = \log_a b + \log_b a = \log_a b + \frac{\log_a a}{\log_a b} = \log_a b + \frac{1}{\log_a b}$$

ここで $x \equiv \log_a b$ とおくと

$$\frac{5}{2}x = x^2 + 1 \Rightarrow (2x-1)(x-2) = 0.$$

つまり $\log_a b = x = 2$ もしくは $\log_a b = x = 1/2$.

Case 1. $\log_a b = x = 2$ の場合 $\Rightarrow b = a^2$.

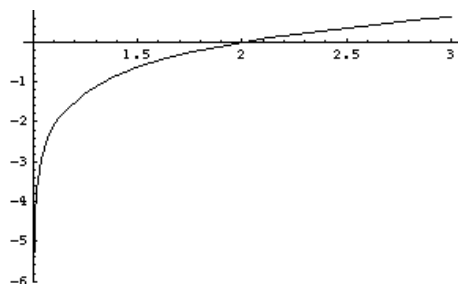
$a + b = 6$ だから

$$a^2 + a = 6 \Rightarrow (a+3)(a-2) = 0 \Rightarrow a = 2, \quad b = 6 - a = 4.$$

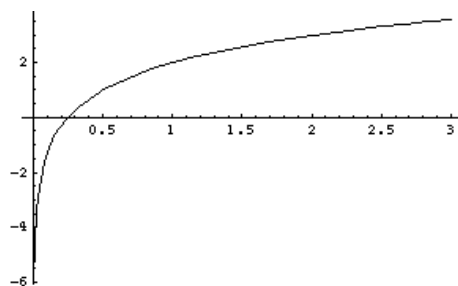
Case 2. $\log_a b = x = 1/2$ の場合 $\Rightarrow b^2 = a$.

前と同じ計算で $b = 2$, $a = 4$ となるが, $a < b$ に反するので解無し. $\square$

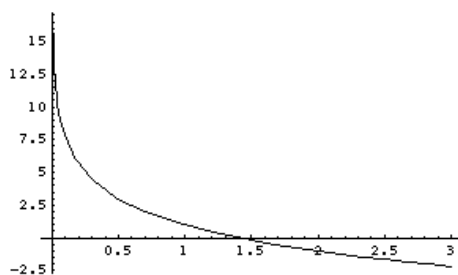
問題 4.13. (i)



(ii) $f(x) = \log_2 4x = \log_2 x + \log_2 4 = \log_2 x + 2.$



(iii)



問題 4.14. (i) $\log_2 x = a$ とおくと

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{a}{2}. \quad \log_2 8x = \log_2 x + \log_2 8 = a + 3.$$

よって

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a + 3 \Rightarrow a^2 - 4a - 12 = 0 \Rightarrow (a - 6)(a + 2) = 0$$

これより $a = 6, -2$ だから $x = 2^a = 64, 1/4.$

(ii) $\log_2 x = a$ とおくと

$$a = \log_x 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{1}{a}.$$

これより $a^2 = 1$ だから, $a = \pm 1.$ よって $x = 2^a = 2, 1/2.$

(iii) まず

$$2^{\log_2 x} = x, \quad 4^{\log_2 x} = (2^2)^{\log_2 x} = 2^{2 \log_2 x} = 2^{\log_2 x^2} = x^2$$

に注意する. すると

$$-x + x^2 = 2 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x > 0 \text{ だから } x = 2.$$

(iv) つぎの不等式が得られる:

$$\log_2(x-3)(x+5) < 2 \log_4(3x+5) = 2 \frac{\log_2(3x+5)}{\log_2 4} = \log_2(3x+5).$$

これより

$$3x+5 > (x-3)(x+5) \Rightarrow 0 > x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4) \Rightarrow -4 < x < 5.$$

$\log(\quad)$ の $(\quad)$ は正でなければいけないから, $x > 3$, $x > -5$, $x > -5/3$ を満たしている. よって, $3 < x < 5$.

$$(v) \log_4(x+3) = \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(x+3)}{2} \text{ だから}$$

$$\log_2 5 \leq \log_2(x-1) + \log_2(x+3) = \log_2(x-1)(x+3).$$

これより

$$5 \leq (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow (x+4)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \text{ もしくは } x \leq -4.$$

$\log(\quad)$ の $(\quad)$ は正であるから, $1 < x$ も満たしている. よって, $x \geq 2$. $\square$

問題 4.15. (i) $X \equiv \log_a b$ とおく. $1 < a$ だから, $f(x) \equiv \log_a x$ は増加関数. $a < b < a^2$ より

$$(4.1) \quad 1 = \log_a a < X = \log_a b < \log_a a^2 = 2.$$

つぎに,

$$\begin{aligned} \log_b a &= \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{X}, \\ \log_{ab} a^2 &= \frac{\log_a a^2}{\log_a ab} = \frac{2}{\log_a a + \log_a b} = \frac{2}{1 + \log_a b} = \frac{2}{1 + X}. \end{aligned}$$

ここで, (4.1) を考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \log_b a &= \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{X} < 1, \\ \frac{2}{3} < \log_{ab} a^2 &= \frac{2}{1 + \log_a b} = \frac{2}{1 + X} < 1, \\ \frac{1}{X} - \frac{2}{1 + X} &= \frac{1 + X - 2X}{X(1 + X)} = \frac{1 - X}{X(1 + X)} < 0. \end{aligned}$$

結局,

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{X} < \frac{2}{1 + X} < 1 < X < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \log_b a < \log_{ab} a^2 < 1 < \log_a b < 2.$$

(ii)¹ やはり $X \equiv \log_a b$ とおく. $0 < a^2 < b < a < 1$ だから, $g(x) \equiv \log_a x$ は減少関数で

$$(4.2) \quad 1 = \log_a a < \log_a b = X < \log_a a^2 = 2.$$

つぎに,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \log_b a &= \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{X} < 1, \\ 0 < \log_a \frac{b}{a} &= X - 1 < 1, \\ 0 < \log_b \frac{b}{a} &= \log_b b - \log_b a = 1 - \frac{1}{X} = \frac{X-1}{X} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

それぞれの大小関係を調べる: $1 < X < 2$ も考えて,

$$\begin{aligned} (X-1) - \frac{1}{X} &= \frac{X^2 - X - 1}{X} \\ &= \frac{(X-1/2)^2 - 3/4}{X} \begin{cases} \leq 0 & 1 < X \leq (\sqrt{5}+1)/2 \sim 1.618 \dots \\ > 0 & (\sqrt{5}+1)/2 < X < 2, \end{cases} \\ \frac{1}{X} - \frac{X-1}{X} &= \frac{2-X}{X} > 0, \\ (X-1) - \frac{X-1}{X} &= \frac{X^2 - 2X + 1}{X} = \frac{(X-1)^2}{X} > 0. \end{aligned}$$

結局,

Case 1. $1 < X \leq 3/2 \Leftrightarrow a^{3/2} \leq b < a$ の場合:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{X-1}{X} < X-1 &\leq \frac{1}{2} < \frac{1}{X} < 1 < X \leq \frac{3}{2} \\ \Rightarrow 0 < \log_b \frac{b}{a} < \log_a \frac{b}{a} &\leq \frac{1}{2} < \log_b a < 1 < \log_a b \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Case 2. $3/2 < X \leq (\sqrt{5}+1)/2 \Leftrightarrow a^{(1+\sqrt{5})/2} \leq b < a^{3/2}$ の場合:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{X-1}{X} < \frac{1}{2} < X-1 &\leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \leq \frac{1}{X} < 1 < \frac{3}{2} < X \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \Rightarrow 0 < \log_b \frac{b}{a} < \frac{1}{2} < \log_a \frac{b}{a} &\leq \log_b a < 1 < \frac{3}{2} < \log_a b \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \end{aligned}$$

Case 3. $(\sqrt{5}+1)/2 < X < 2 \Leftrightarrow a^2 < b < a^{(\sqrt{5}+1)/2}$ の場合:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{X-1}{X} < \frac{1}{2} < \frac{1}{X} < X-1 < 1 < \frac{\sqrt{5}+1}{2} < X < 2 \\ \Rightarrow 0 < \log_b \frac{b}{a} < \frac{1}{2} < \log_b a < \log_a \frac{b}{a} < 1 < \frac{\sqrt{5}+1}{2} < \log_a b < 2. \quad \square \end{aligned}$$

5 関数の連続性と微分

問題 5.1. (i) $x = 2$ での連続性だけが問題になる. $f(x) = x + 2 \quad (x \neq 2), \quad f(2) = 4$ となるので, 連続.

¹ 場合分けが煩雑! 設問のミス. 大小比較に $\log_a(b/a)$ を入れるべきではなかった.

(ii) $x = 0$ での連続性が問題になる.

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} g(x) = -1, \quad g(0) = 0$$

と右極限, 左極限, $g(0)$ がすべて異なり, 連続ではない. $\square$

問題 5.2. (i)

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = 1. \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1.$$

左と右からの微分が異なるので, 微分不可能.

(ii)

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^3}{h} = 0. \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h^3}{h} = 0.$$

左と右からの微分が一致し, 微分可能. $\square$

問題 5.3.

$$(i) \quad \frac{d}{dx}(x+1)(x+2)(x+3) = (x+1)(x+2) + (x+1)(x+3) + (x+2)(x+3) \\ = 3x^2 + 12x + 11,$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dx}(x^2+1)^3 = 6x(x^2+1)^2,$$

$$(iii) \quad \frac{d}{dx} \log(x+1) = \frac{1}{x+1} \quad (x > -1). \quad \square$$

問題 5.4.

$$(i) \quad \frac{d}{dx} 2^x = \frac{d}{dx} e^{x \log 2} = \log 2 \cdot e^{x \log 2} = \log 2 \cdot 2^x,$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dx} e^{-x^2} = -2x \cdot e^{-x^2},$$

$$(iii) \quad \frac{d}{dx} \log \sqrt{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1},$$

$$(iv) \quad \frac{d}{dx} x^x = \frac{d}{dx} e^{x \log x} = (\log x + 1) e^{x \log x} = (\log x + 1) x^x \quad (x > 0). \quad \square$$

以上