

基礎数学 I – 概要

2007/07/02, 西岡¹

<http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/~nishioka/>

1 集合論と論理

I. 数学で日常的に使われる「集合論と論理」の記号を列挙する:

集合論の記号	意味	別の言い方
$\emptyset$	空集合	
$x \in A$	元 x は A に属する	
$x \notin A$	元 x は A に属さない	
$A \subset B$	A は B の部分集合	A は B に含まれる
$A \cup B$	A と B の合併	A もしくは B
$A \cap B$	A と B の共通部分	A かつ B
A^c	A の補集合	A に属さないもの全体
$A - B$	A と B の差集合	$A - B = A \cap B^c$

論理式の記号	意味	別の言い方
$P \vee Q$	P もしくは Q	
$P \wedge Q$	P かつ Q	
$P \Rightarrow Q$	P を仮定すると Q が成立	
$P \Leftrightarrow Q$	P と Q は同値	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
$\neg P$	P が成立しない	P の否定
$\forall y$	すべての y に対して, ...	任意の y に対して, ...
$\exists y$	ある y に対して, ...	ある y が存在して, ...

II. 古代ギリシャの哲学者ゼノンが提出したパラドクスに「クレタ島人のパラドクス」がある:

(1.1) あるクレタ島人 x が「すべてのクレタ島人は嘘つきだ」と言った.

ここで, ゼノンは“ x の言明 (1.1) の真偽”を問題にする.

- “ x の言明 (1.1) が真”と仮定する. $\Rightarrow$ “クレタ島人はすべて嘘つき”となる. $\Rightarrow x$ 自身もクレタ島人なので, “ x の言ったことは偽”となり, 前提の仮定と矛盾.
- “ x の言明 (1.1) が偽”と仮定する. $\Rightarrow$ “クレタ島人はすべて正直”となる. $\Rightarrow$ “ x の言明 (1.1) が偽”という前提の仮定と矛盾.

¹ nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp 2 号館 11 階 38 号室

つまり x の言明を真偽のどちらに仮定しても、矛盾が生じた.

III. 現代数学では論理構成のために、しばしば集合論を使う. 集合論を使って、このパラドクスを解決しよう. まず

(1.2) 集合 A を「嘘つきの全体」、集合 B を「クレタ島人の全体」

とすると、下の図が (1.1) の主張となる:

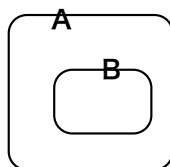


図 1.1: 主張 (1.1)

(i) “ $x \in A^c$ ”と仮定 $\Rightarrow$ (1.1) が真 $\Rightarrow$ 図 1.1 が成立 $\Rightarrow x \in B \subset A$ となり, “仮定 $x \in A^c$ ”と矛盾. この場合は、確かに矛盾が生ずる.

(ii) ゼノンの主張: “ $x \in A$ ”と仮定 $\Rightarrow$ (1.1) が偽 $\Rightarrow$ 図 1.1 を否定 $\Rightarrow$ 図 1.2 が成立

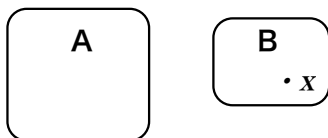


図 1.2: ゼノンの主張: 図 1.1 の否定

$\Rightarrow x \in A^c$ となり, “仮定 $x \in A$ ”と矛盾.

(iii) ところが、ゼノンの主張で「図 1.1 を否定 $\Rightarrow$ 図 1.2 が成立」は正しくなく、次の 2 つの図も図 1.1 の否定である. どちらの例でも $x \in A$ を許すので矛盾は生じない.



図 1.3: 図 1.1 の別の否定例

[興味をもつ人ために]

例 1.1. (i) A, B を (1.2) で定義した集合とする. ゼノンのパラドクスで現れた (1.1) は

$$(1.3) \quad \forall y \in B \Rightarrow y \in A$$

と数学の論理式で表現できる.

(ii) 「ある論理式の否定である論理式」を作る方法は

$\forall, \exists$ はそれぞれ $\exists, \forall$ に置き換え; 結論 Q を $\neg Q$ に置き換える

である.

(iii) この (ii) を (1.3) の否定に適用すると,

$$(1.4) \quad \exists y \in B \Rightarrow \neg(y \in A)$$

「 $\neg(y \in A)$ 」は「 $y \notin A$ 」と同値だから, (1.3) ($\Leftrightarrow$ (1.1)) の否定 (1.4) は「 A に属さない $y \in B$ が一つでもある」となる. 図 1.2, 1.3 がこの条件を満たしている. $\diamond$

2 実数

現代数学の一つの特徴は, “無限を頻繁に扱う” 点にあり, “小さな無限”, “大きな無限”, “より大きな無限” など「無限の分類」もなされている. 本節では, “小さな無限=自然数” から “大きな無限=実数” をどうやって作るかの概要を述べる.

I. まず自然数 $\mathbf{N}$ とは,

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

のことである. $m, n \in \mathbf{N}$ にたいし

$$(2.1) \quad \text{四則演算: 和 } m+n, \text{ 差 } m-n, \text{ 積 } m \times n, \text{ 除 } \frac{m}{n}$$

を自由に使いたい.

(i) ところが (2.1) の “差 $m-n$ ” が一つの集合の中で完結するためには, 自然数の全体 $\mathbf{N}$ では不十分で,

$$\text{整数 } \mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

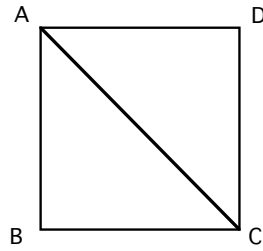
まで広げなければならない.

(ii) さらに (2.1) の “除 m/n ” が一つの集合の中で完結するためには, 整数の全体 $\mathbf{Z}$ でも不十分で,

$$\text{有理数 } \mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$$

まで広げる必要がある.

(iii) ところが, 一辺の長さ 1 の正方形 $ABCD$ の対角線 $\overline{AC}$ の長さ x は, 有理数 $\mathbf{Q}$ の範囲に留まらないことが証明できる (命題 2.1) ので, $\mathbf{Q}$ をさらに広げる必要がある (有理数の不完全性).



(iv) また $x^2 = 2$ という方程式を解こうとすると, 有理数 $\mathbf{Q}$ の中では解が見つからないことも証明できる (命題 2.1).

(v) また近代数学では, 頻繁に極限操作を行うが, $\sqrt{2} = 1.41421 \dots$ に収束する数列

$$a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, a_4 = 1.414, a_5 = 1.4142, \dots,$$

を考える場合も不都合がおこる.

(vi) $0.3333 \dots$ などの無限小数の存在はよく知られているが, すべての無限小数で四則演算が可能かどうかは自明ではない. 例えば末位の数字が判らない場合の乗法

$$1.73205 \dots \times 2.23607 \dots (= \sqrt{3} \times \sqrt{5})$$

はどうやって計算するのだろうか?

[興味をもつ人のために]

命題 2.1. 辺の長さが 1 である正方形 $ABCD$ の 対角線 $\overline{AC}$ の長さ x は有理数ではない. $\diamond$

[証明] まず ピタゴラスの定理 より

$$(2.2) \quad x^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

つぎに, もし x が有理数だとすると, ある 整数 k, j があり

$$(2.3) \quad x = \frac{j}{k}, \quad k \neq 0, \quad j, k \text{ は既約 (つまり 1 以外の公約数を持たないこと)}$$

と表される. ところで (2.2) より

$$\frac{j^2}{k^2} = x^2 = 2 \Rightarrow j^2 = 2 \cdot k^2 \Rightarrow j \text{ は偶数} \Rightarrow \text{ある整数 } q \text{ があり, } j = 2 \cdot q$$

すると

$$\begin{aligned} 2 \cdot k^2 = j^2 &= (2 \cdot q)^2 = 4 \cdot q^2 \Rightarrow k^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow k \text{ は偶数} \\ &\Rightarrow \text{ある整数 } r \text{ があり, } k = 2 \cdot r. \end{aligned}$$

結局

$$\frac{j}{k} = \frac{2 \cdot q}{2 \cdot r}$$

となり (2.3) で仮定した “既約” に反する. よって, (2.3) が間違っており, x は有理数ではない.

なお上記の議論により, “ $x^2 = 2$ の解が有理数でない” ことも示されている. $\square$

II. そこで私達は 前述 I, (v) の不具合を解消する (2.4) の方法で, 有理数 $\mathbf{Q}$ を拡大する. すると具合の良いこと, 前述 I, (iii) – (vi) の難点もすべて解消されることが証明できる².

(2.4) “有理数からなる数列”で「基本列」と呼ばれる性質 (2.5) を備えたものの
極限全体を考え, それを **実数 $\mathbf{R}$** とよぶ.

直感では理解しにくいだが, これが **実数 $\mathbf{R}$** (数直線上の全ての点の集合) である.

こうやって得られた 実数 $\mathbf{R}$ は次のような良い性質を備えている.

命題 2.2 (実数の性質). (i) $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow a + b, a - b, a \times b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ なら $a/b \in \mathbf{R}$.

(ii) $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow a < b, a = b, a > b$ のどれかが成立³.

(iii) $a, b \in \mathbf{R}, a < b \Rightarrow a < c < b$ となる $c \in \mathbf{R}$ が存在する⁴.

(iv) 実数列 $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$ が (2.5) を満たせば, 必ず $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbf{R}$ が存在する⁵. $\diamond$

[興味をもつ人のために]

注意 2.3. (実数でも有理数でも) 数列 $\{a_n\}$ が **基本列** とは,

(2.5) 任意の $\varepsilon > 0$ にたいし, ある自然数 N があり, $m, n \geq N \rightarrow |a_m - a_n| \leq \varepsilon$

をみたすことである. $\diamond$

注意 2.4. 実数 $\mathbf{R}$ をさらに拡大して, 命題 2.2 の性質を備えたものが得られるだろうか?

$\Rightarrow$ 実は, 得られないことが証明されている. つまり 実数 $\mathbf{R}$ は, 頻繁に極限操作を行う現代数学の出発点として丁度よい物と言える. $\diamond$

3 数列

極限操作に慣れるため, 簡単な数列を導入しよう.

I. 数列

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (以後は $\{a_n\}$ と略記する)

にたいし, $n \rightarrow \infty$ のとき a_n がどう振る舞うかが興味の対象となる.

(i) 「 $(\dagger)$: 数列 $\{a_n\}$ で n を限りなく大きくするとき, a_n がある数 α に近づく」. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

と記し, “ $\{a_n\}$ は α に収束する” という.

² この“拡大の方法”とか, “それで不具合が解消される”ことなど論ずることが, 「実数論」である. またどちらも無限個だが, 「実数の個数 $>$ 有理数の個数」となることが証明できる.

³ この性質を“線形順序性”という.

⁴ この性質を“稠密性”という.

⁵ この性質を“実数の完備性”という. 有理数全体 $\mathbf{Q}$ は完備性を備えていない.

[興味を持つ人のために] 実は, (†) の言い方は厳密さに欠けているので, “正当派の格調高い表現” では次の論法を使う (所謂 $\varepsilon - \delta$ 論法で (2.5) の表現と同じ).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ にたいし, ある自然数 } N \text{ があり} \\ n \geq N \rightarrow |a_n - \alpha| \leq \varepsilon. \end{array} \right)$$

(ii) 収束しない数列は, “発散する” という.

II. どんな数列が収束するか調べるため, 数列を分類する:

定義 3.1. (i) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

を満たしているとき, **単調増加** という. 逆に

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

を満たしているとき, **単調減少** という.

(ii) 数列 $\{a_n\}$ にたいし, ある数 K があり

$$(3.1) \quad \text{すべての } n \text{ で } |a_n| \leq K$$

であるとき, **有界な数列** という. $\diamond$

命題 3.2. 数列 $\{a_n\}$ が単調増加もしくは単調減少であり, 有界. $\Rightarrow \{a_n\}$ は収束する. $\diamond$

[興味をもつ人のために: 命題 3.2 の略証]

簡単のため, $\{a_n\}$ は単調増加とする. まず 命題 2.2(実数の性質) から次の定理が導かれる:

定理 3.3 (ワイエルシュトラウス). 数列 $\{a_n\}$ が (3.1) の性質をもつ. $\Rightarrow$

(i) “すべての n にたいし $a_n \leq L$ となる実数 L ” のなかで一番小さいものが存在する. 今後, それを $\sup_n a_n$ と書く.

(ii) “すべての n にたいし $a_n \geq M$ となる実数 M ” のなかで一番大きいものが存在する. 今後, それを $\inf_n a_n$ と書く. $\diamond$

すると 単調増加数列 $\{a_n\}$ は基本列となり, 命題 2.2 より収束することが保証される. $\square$

例 3.4. (i) $a_n \equiv 1/n, n = 1, 2, \cdots$ とする. $\Rightarrow \{a_n\}$ は単調減少. また, すべての n にたいし $0 < a_n < 1$ となるので有界. $\Rightarrow \{a_n\}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(ii) $a_n \equiv 2^{1/n}, n = 1, 2, \cdots$ とする. $\Rightarrow$

$$(3.2) \quad \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^{n+1} = \frac{2^{(n+1)/n}}{2^{(n+1)/(n+1)}} = \frac{2^{1+1/n}}{2} = 2^{1/n} > 1$$

となるので $\{a_n\}$ は単調減少. また, すべての n にたいし $1 < a_n \leq 2$ となるので有界. $\Rightarrow \{a_n\}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. $\diamond$

例 3.5 (ネイピア数). $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n = 1, 2, \dots$ とする. $\Rightarrow \{a_n\}$ は単調増加で有界だから, 収束する.

この極限値の具体的な値を与える事はできないので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

とおく. 実際に計算すると,

$$(3.3) \quad e = 2.7182 \dots$$

であるが, この e は**ネイピア数**と呼ばれ, 重要な数である⁶. $\diamond$

例 3.6 (指数関数). (i) $0 < r < 1$ を定数とする. 数列 $b_n \equiv (1 + \frac{r}{n})^n$, $n = 1, 2, \dots$, は単調増加かつ有界で

$$(3.4) \quad 1 + r \leq b_n < 1 + \frac{r}{1 - r/2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(ii) $\{b_n\}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e^r$ (r の関数とみなし, **指数関数**と呼ぶ. 次節 I を参照のこと). $\diamond$

III. 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和

$$S_n \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

を**級数の部分和**という. $\{S_n\}$ を数列とみなして

(i) “ n を限りなく大きくするとき, S_n がある数 S に近づく”⁷とする. このとき,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = S$$

と記し, “級数 S_n は S に収束する”という.

(ii) 収束しない級数は, “発散する”という.

例 3.7. (i) 等差数列 $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n = 1, 2, \dots$, にたいし

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_n = n a_1 + \frac{n(n-1)d}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

となる. $a_1 = 0, d = 0$ 以外には, 級数 S_n は発散する.

(ii) 等比数列

$$a_n = a_1 r^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (r \neq 1)$$

⁶ この例 3.5 の詳しい説明は, Web に掲載されている「金利計算とネイピア数」を見よ.

⁷ 数列の場合と同様, 厳密な言い方には $\varepsilon - \delta$ 論法を使う.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = S \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ にたいし, ある自然数 } N \text{ があり} \\ n \geq N \rightarrow |\sum_{k=1}^n a_n - S| \leq \varepsilon. \end{array} \right)$$

にたいし,

$$T_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}.$$

これより

- (a) $|r| < 1 \Rightarrow$ 級数 T_n は $\frac{a_1}{1-r}$ に収束.
 (b) $|r| > 1 \Rightarrow$ 級数 T_n は発散.

- (iii) 数列 $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, にたいし, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である.
 ところがその級数は発散する:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty. \quad \diamond$$

4 基礎的な関数

走り幅跳びの世界記録の変遷は以下の通りである:

1874 年 7.05m レーン	1883 年 7.06m ダビン	1895 年 7.09m フォード	1901 年 7.61m オコナー	1923 年 7.69m ガーディン	1924 年 7.76m ル・ジェンダー
1925 年 7.89m ヒュバード	1928 年 7.93m ケイター	1931 年 7.98m 南部中平	1935 年 8.13m オーエンス	1960 年 8.21m ボストン	1961 年 8.28m ボストン
1962 年 8.31m テルオバニヤン	1964 年 8.34m ボストン	1965 年 8.35m ボストン	1968 年 8.90m ビーモン	1991 年 8.95m パウエル	2007 年 ← ←

この表をただで、走り幅跳びの動向を判断するのは難しいが, “記録を年の関数とみて”
 グラフを作成すれば, この様になる.



このグラフを利用すれば, 走り幅跳びの競技特性/動向の分析がより容易に行える:

- (i) 3つの長い記録停滞期 (1895-1923=22 年間, 1935-1960=25 年間, 1968-1991=23 年間) があり, 記録停滞期の前後に記録急進期がある.

- (ii) 記録更新の難しい競技だ (記録停滞期が長く, 130 年間で記録保持者はたったの 14 人).
- (iii) 現在は記録停滞期で, 8.95m が人類能力の限界かもしれない. 次期北京オリンピックの優勝記録は 8.80m 位だろう. ...

このように, 関数を導入することにより, 数学の社会への応用が飛躍的に広がった.
まず関数の厳密な定義を与える.

定義 4.1. 実数のある部分集合 $D_f \subset \mathbf{R}$ に属する数 x にたいし, ある数 $f(x)$ が**唯一つ**対応するとき, その対応を **関数** と呼ぶ. また D_f を“関数 f の**定義域**”とよぶ. 一方, 関数の値の動く範囲 $R_f \equiv \{f(x) : x \in D_f\}$ を**値域** と呼ぶ.

注意 4.2. 数列 $\{a_n\}$ も関数である. この場合, 定義域 D は自然数 $\mathbf{N}$ となっている. ◇

I. よく使われる関数を列挙する:

- (i) 1 次関数: $a \neq 0, b$ を定数とする. $f(x) \equiv ax + b, x \in \mathbf{R}$.
- (ii) 2 次関数: $a \neq 0, b, c$ を定数とする. $f(x) = ax^2 + bx + c, x \in \mathbf{R}$.
- (iii) 3 次多項式: $a_0, a_1, a_2, a_3 \neq 0$ を定数とする.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad x \in \mathbf{R}.$$

===

$f(x) = 2x^2 - 1$ と $f(x) = x^3 - 2x^2 - \frac{x}{2} + 1$ (太線) のグラフを下に記す:

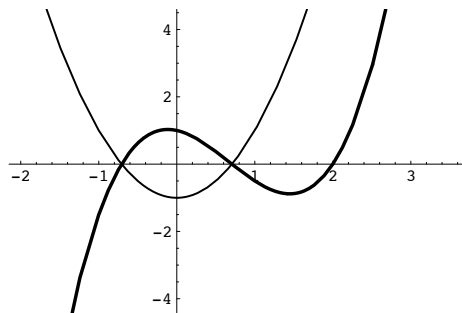


図 4.1: 2 次関数と 3 次関数

===

- (iv) n 次多項式: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$ を定数とする.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- (v) 分数関数: $f(x) = a_1x + a_2 + \frac{a_3}{x + a_4}, \quad x \neq -a_4$.

===

$f(x) = 10x + \frac{1}{x} + 1$ のグラフを下に記す:

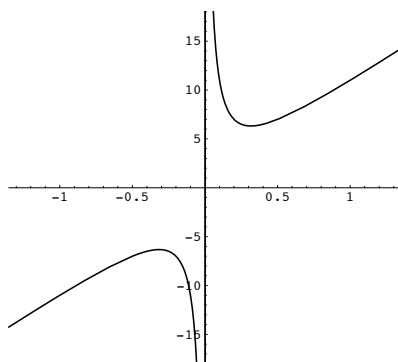


図 4.2: 分数関数

===

(vi) 指数関数: $f(x) \equiv e^x$, $x \in \mathbf{R}$. (しばしば $f(x) = \exp\{x\}$ とも書く.)

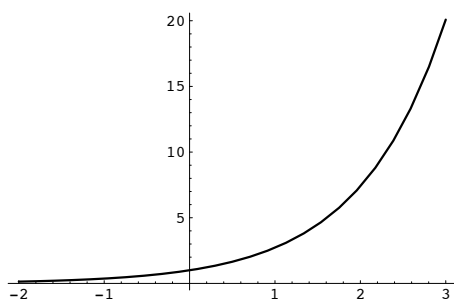


図 4.3: 指数関数

指数関数はいろいろな現象を記述するのに適した関数である.

(a) [携帯電話の契約数] 実例として, 国内の携帯電話契約数を指数関数

$$f(x) = 13 e^{ax}, \quad a = 0.48246$$

で近似する. 実際の数と比べてみるとほぼ正確に近似出来ていることが判る.

	1984	'85	'86	'87	'88	'89
x	0	1	2	3	4	5
実際の契約数 ($\times 1000$ 件)	13	22	33	56	92	147
$f(x)$	13	21	34	55	90	146

(b) [HIV 患者数] 次に, 国内で報告された HIV 患者数の推移を指数関数

$$g(x) = 14 e^{bx}, \quad b = 0.36$$

で近似する. 実際の数と比べてみると, この場合もほぼ正確に近似出来ていることが判る.

	1988	'89	'90	'91	'92	'93	'94	'95	'96
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
実際の患者数	14	21	31	38	51	86	136	169	234
$g(x)$	14	20	29	41	59	85	121	174	249

II. 2つの関数 $f: D_f \rightarrow R_f$ と $g: D_g \rightarrow R_g$ が $R_f \subset D_g$ の関係にあるとき, 新しい関数

$$\text{合成関数} \quad g \circ f(x) = g(f(x)) : D_f \rightarrow R_g$$

を作ることが出来る.

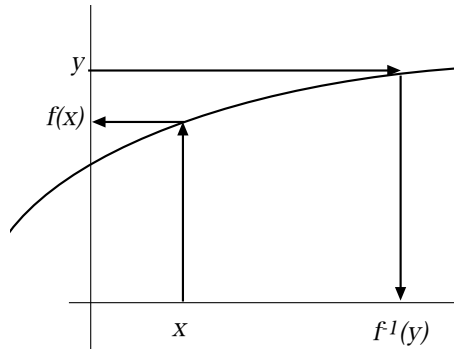
例 4.3. (i) $f(x) \equiv x^2$ は定義域 $D_f = \mathbf{R}$, 値域 $R_f = \{x : x \geq 0\}$, $g(x) \equiv \sqrt{x}$ は定義域 $D_g = \{x : x \geq 0\}$, 値域 $R_g = \{x : x \geq 0\}$ である.

このとき $R_f \subset D_g$ となり, 合成関数

$$g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x| : D_f \rightarrow D_g$$

が得られる. $\diamond$

III. 関数 f の定義域を D_f , 値域を R_f とする.



このとき, ある部分集合 $E \subset R_f$ があり, $y \in E$ にたいしては常に

$$f(x) = y$$

となる $x \in D_f$ が唯一つ存在するとき, この x を $f^{-1}(y)$ と書き,

$$f^{-1}(y), \quad y \in E$$

を f の逆関数と呼ぶ. 当然

$$(4.1) \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

が成立している.

例 4.4 (対数関数–重要). 指数関数 $f(x) = e^x$ を考える. この逆関数 $f^{-1}(y)$ は $y > 0$ にたいして定義されている. x, y を入れ替えたこの逆関数を

$$f^{-1}(x) = \log x, \quad x > 0,$$

と記述し, “対数関数” と呼ぶ. 次の図で 太線は $f(x) = \log x$, 破線は $g(x) = x$, 細線が $h(x) = e^x$ のグラフである. ◇

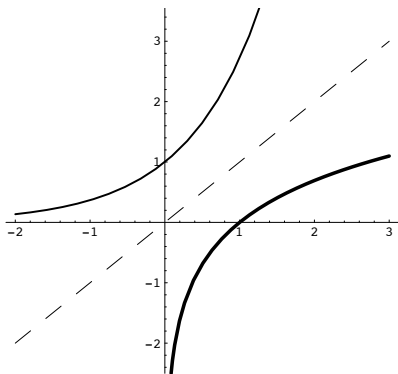


図 4.4: 対数関数 (太線) と指数関数

注意 4.5. $a > 0$ にたいし

$$\log_a x \equiv \frac{\log x}{\log a}, \quad x > 0$$

と表記し, “ a を底とする対数” と呼ぶが, とくに $a = 10$ の対数 $\log_{10} x$ を “常用対数” と言う.

この言い方に従えば, 例 4.4 で定義した $\log x$ は “ e を底とする対数” と呼ぶべきだが, 単に “対数” と呼ぶ. しかし, 区別を明言する必要があるときには, $\log x$ を “自然対数” と呼ぶ場合もある. ◇

命題 4.6 (対数関数の計算法則). $a, b > 0$ とする.

$$(i) \quad \log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x. \quad (ii) \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0.$$

$$(iii) \quad \log_a x^y = y \log_a x, \quad x > 0. \quad (iv) \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad x > 0. \quad \diamond$$

5 関数の連続性と微分

定義域 D 内部の点 x_0 にたいし,

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in D} f(x) = a$$

であるとき, “関数 f は x_0 で **極限** a をもつ” という. (ここで $f(x_0)$ の値と a にはなんの関係も無いことを注意せよ.)

定義 5.1 (関数の連続性). (i) 関数 f が x_0 で極限值 a をもち、しかも $f(x_0) = a$ のとき、“ f は $x = x_0$ で **連続**”という.

(ii) D の全ての点 x で連続な関数を“ D で **連続な関数**”という.

[興味をもつ人のために:1] 連続の定義を ε - δ 論法を使って厳密に述べてみよう:

“関数 f は $x = x_0$ で連続”とは、任意の $\varepsilon > 0$ にたいし、ある $\delta > 0$ があり、

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

となる事である.

[興味をもつ人のために:2] 連続関数はいろいろ都合の良い性質を備えている:

定理 5.2. 有限な閉区間 $[a, b]$ で連続な関数には、最大値と最小値がある. $\diamond$

例 5.3 (反例). $f(x) = 1/x$ は閉区間 $[-1, +1]$ で連続ではない (分数関数のグラフ図 4.2 を見よ). そのため $[-1, 1]$ では最大値も最小値も持たない. 実際、

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty. \quad \diamond$$

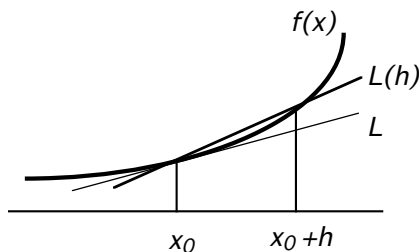
定理 5.4 (中間値の定理). 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) < f(b)$ を満たしている. このとき $a < c < b$ である任意の c にたいし、 $f(x) = c$ となる $x \in (a, b)$ が存在する. $\diamond$

関数 $f(x)$ にたいし、ある点 x_0 で

$$(5.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

が存在するとき、“ f は x_0 で **微分可能**”と言い、 $(5.1) = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ と記述する.

また $f'(x_0)$ を x_0 の関数と見たとき、“ f の **導関数**”と呼ぶ.



注意 5.5. x が x_0 から $x_0 + h$ まで変化するとき、

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

は直線 $L(h)$ の傾きとなる. $h \rightarrow 0$ なら、直線 $L(h)$ は

点 $x = x_0$ における曲線 $f(x)$ の接線 L

に近づくので、 $L(h)$ の傾きは“接線の傾き $= f'(x_0)$ ”に近づく. $\diamond$

注意 5.6. 微分可能な関数と連続関数とのギャップは大きく、至る所で微分が出来ないが連続な関数が存在する. $\diamond$

命題 5.7 (微分の公式). a, b を定数とする.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{d}{dx} (a f(x) + b) &= a f'(x). & \text{(ii)} \quad \frac{d}{dx} (f(x) g(x)) &= f'(x) g(x) + f(x) g'(x). \\ \text{(iii)} \quad \frac{d}{dx} g \circ f(x) &= g' \circ f(x) \cdot f'(x). & \text{(iv)} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}. \quad \diamond \end{aligned}$$

例 5.8. 微分の例. a, b, c は () 内の条件を満たす定数とする.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{d}{dx} c &= 0. & \text{(ii)} \quad \frac{d}{dx} x^a &= a x^{a-1}, \quad (a \neq 0). \\ \text{(iii)} \quad \frac{d}{dx} e^{ax} &= a e^{ax}. & \text{(iv)} \quad \frac{d}{dx} b^{ax} &= (a \log b) b^{ax}, \quad (b > 0). \\ \text{(v)} \quad \frac{d}{dx} \log |x|^a &= \frac{a}{x}, \quad (a \neq 0). \quad \diamond \end{aligned}$$

例 5.9 (微分と速度). 空気抵抗を無視すると、 t 秒後の落下距離 $u(t)$ は

$$u(t) = 4.9 \cdot t^2 \text{ m}$$

である. これより 20m の落下に必要な時間 T は

$$20 = 4.9 \cdot T^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{20}{4.9}} = 2.020 \dots \sim 2 \text{ 秒}$$

そのときの着地速度は

$$u' \left(\sqrt{\frac{20}{4.9}} \right) = 4.9 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{20}{4.9}} = 19.799 \dots \sim 20 \text{ m/sec} = 72 \text{ km/h}.$$

衝突速度が 72km/h だから 20m の高さから飛び降りるのは止めた方がよい. $\diamond$