

縦横比の数理

2007/04/23, 西岡 國雄

I. 手近にある長方形の形をしたものに対して、縦横比 r を測ってみます. すると、私の研究室にある物品では、次のような結果が得られました:

$r \simeq 1.41$ のグループ:	新聞紙, A4 用紙, B5 用紙, 文庫本, MacBook, Vaio-T
$r \simeq 1.62$ のグループ:	クレジットカード, 身分証, 新書, iPod, Marlboro の箱, おつまみのパッケージ.
上記以外のグループ:	CD ($r = 1.13$), ティッシュの箱 ($r = 2.13$), キーボード ($r = 3.66$), などなど

不思議なことに、多くのものが $r \simeq 1.41$ と $r \simeq 1.62$ のグループに属しています. 縦横比 $r \simeq 1.41$ と $r \simeq 1.62$ にはなにか特別な意味があるのでしょうか?

実は,

$$r = \sqrt{2} \simeq 1.41 \dots : \text{白銀比},$$
$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.62 \dots : \text{黄金比}$$

と呼ばれる特別な数字なのです. それでは、白銀比と黄金比の意味を考えてみましょう.

II. まず 白銀比 $r = \sqrt{2}$ を説明します.

縦 $\sqrt{2}$, 横 1 の用紙 P_1 を長辺の真ん中で二つ折りにします. すると 縦 1, 横 $\sqrt{2}/2$ の用紙 P_2 が得られます. それぞれ用紙の縦横比を調べると,

(i) 用紙 P_1 の 縦横比 $r = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$,

(ii) 用紙 P_2 の 縦横比 $r = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}$,

(iii) さらに、用紙 P_2 を長辺の真ん中で二つ折りにし、紙 P_3 を作ります. P_3 の 縦横比は $r = \frac{\sqrt{2}/2}{1/2} = \sqrt{2}$

つまり 白銀比 $r = \sqrt{2}$ の用紙を使うと、

- (1) ‘長辺の真ん中で二つ折りにする’ という作業を繰り返して
作られる用紙の縦横比は常に同じ

と言うことになります.

これは、紙の製造には大変都合のよい性質で、‘新聞紙, A4, B5, 文庫本 など’ 多くの用紙規格が 白銀比 $r = \sqrt{2}$ の縦横比を持つ理由です. 逆に、‘(1) の性質を持つ用紙の縦横比は 白銀比 $\sqrt{2}$ しかない’ ことも、簡単に判ります.

III. さて 黄金比 $r = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.62 \dots$ ですが、この比率は

線分を二つに分けるととき, もっとも美しく見える比率

として知られています. ミロのビーナス, レオナルド・ダビンチの絵画, ギザのピラミッド, パルテノン神殿などに取り入れられているだけでなく, 自然の中でも多数の事例を見つけることのできる比率です. (興味のある方は, 文献 [1, 2] などを見て下さい.)

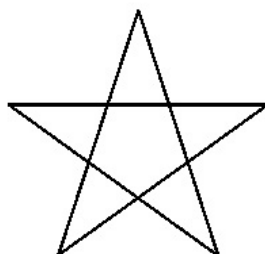
簡単に確かめられる例では, 次に述べるような人体や図形での例が, 幾つも知られています.

$$(i) \frac{\text{指先から肘までの長さ}}{\text{肘から肩までの長さ}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1.62 \dots,$$

$$(ii) \frac{\text{足底からへそまでの長さ}}{\text{へそから頭頂までの長さ}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1.62 \dots \quad (\text{立位で}),$$

(自分の体で調べて下さい. ‘ミロのビーナスはこの比率を持つ’ といわれていますが, 皆さんの場合はどうでしたか?)

- (iii) 五芒星: 日本の陰陽道, 修験道では ‘魔除けのシンボル’ です. 世界的にも pentagram と呼ばれる ‘魔除け’ あるいは逆に ‘悪魔のシンボル’ として, 紀元前から広く使われています. (この図形には, いろいろな所に黄金比が隠されています.)



IV. では

$$\text{黄金比} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1.62 \dots \text{はどうやって導かれるのか}$$

を説明しましょう.

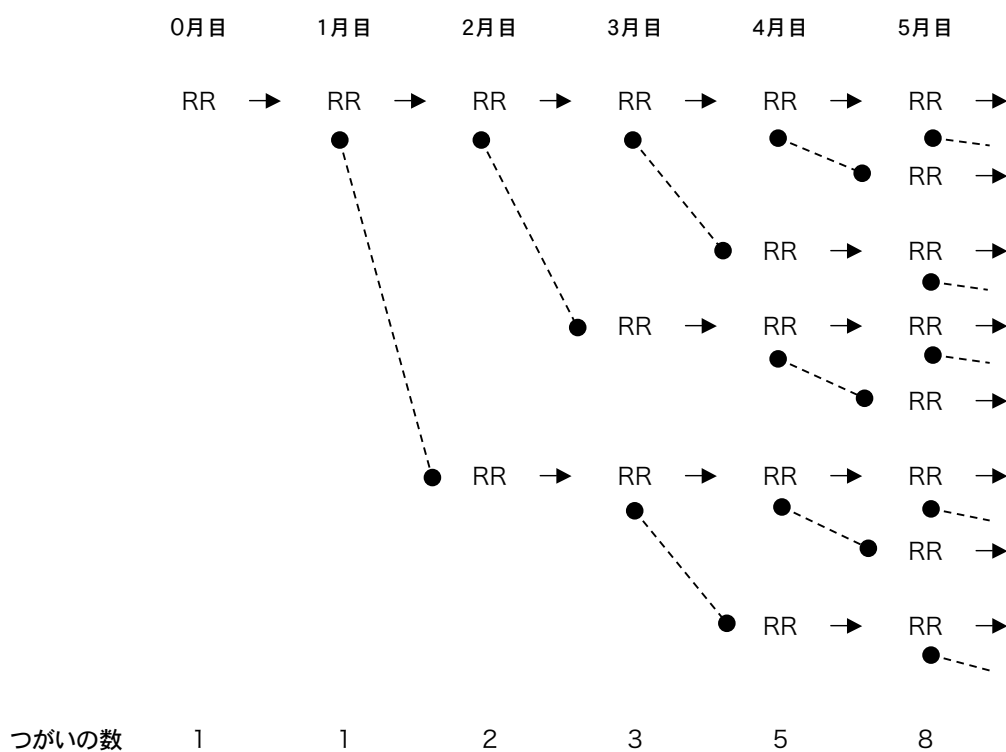
まず, 13 世紀のイタリアで提出された「兎の問題」を紹介します:

兎の問題. (i) 一つがいの兎が, 生まれてから 1ヶ月目以降, 毎月一つがいの子供を産む.

(ii) 産まれた一つがいの子供は, 生後 1ヶ月目以降, また毎月一つがいの子供を産む.

(iii) "RR" で一つがいの兎をあらわすと, 各月のつがいの数は下図のようになる.

兎の増え方



このとき, 1 年後のつがいの数はどうなるのか?

フィボナッチの解法 当時のイタリア人数学者 フィボナッチ は, 兎の問題を次のように解決しました: n 月目のつがいの数を F_n とすると, F_n は次式で表される.

$$(2) \quad \begin{aligned} F_0 &= 1, F_1 = 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

(漸化式 (2) で与えられる数列 $\{F_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ は, 現在, **フィボナッチ数列**と呼ばれています.)

この漸化式 (2) を使うと, それぞれの F_n の値が計算でき, $F_{12} = 233$ となる.

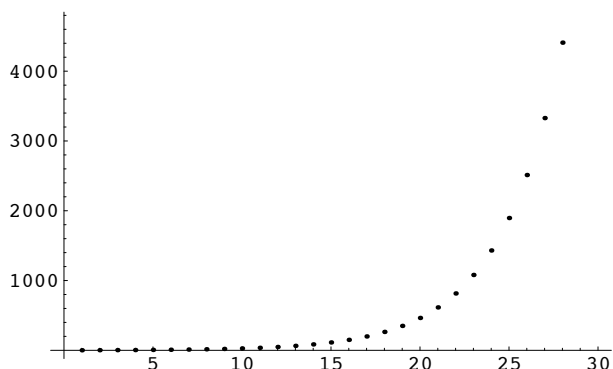
$$(3) \quad \begin{array}{cccccccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} & \cdots \\ \hline 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 144 & 233 & 377 & \cdots \end{array}$$

□

このフィボナッチ数列は, 整数列として数学的に興味深いだけでなく, 自然現象とも深く関わっていることが判明しています. さらに, フィボナッチ数列を利用した株式投資理論 (フィボナッチ・トリートメント) まで開発されています.

そのため, ‘フィボナッチ数列に関連する問題’ を専門に扱う「フィボナッチ協会」(<http://www.mathstat.dal.ca/Fibonacci/>) という団体が 1963 年に設立されたほどです. この協会は The Fibonacci Quarterly という雑誌を刊行し, 国際シンポジウムや研究集会を開催して, フィボナッチ数列の研究を推進しています.

さて, n が大きくなるとき, F_n は急速に増えることが, (3) の表から予測できます. 実際, コンピューターを使うと, その様子をはっきりと図示することができます:



では, フィボナッチ数列はどれくらいの速さで大きくなっているのでしょうか? 漸化式 (2) から派生する 2 次方程式を解くことにより, フィボナッチ数列の一般項が得られ,

$$(4) \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき } \frac{F_n}{F_{n-1}} \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1.62 \cdots = \text{黄金比}$$

となることが証明できます. 簡単な計算から, $n \geq 6$ では, ‘ F_n/F_{n-1} と黄金比との誤差’ が 0.5 % 以下になることが判り,

$$F_n \cong 13 \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-6} = 13 \times (1.62 \cdots)^{n-6}, \quad n \geq 6$$

と見なすことができますから, ‘黄金比が自然な増加率’ と言えるでしょう.

V. ところで, ‘常に批判精神を忘れない’ というのが, 数学者の研究スタイルですが, 「兎の問題」にたいする フィボナッチの解法 (2) を眺めていると, どうしても次の不満が生じてきます:

兎には寿命があるはずだから, ‘つがいの兎がいつまでも子供を産み続ける’ という フィボナッチの解法 (2) は実態に即していない.

そこで フィボナッチの解法 (2) を修正し,

Case 1: 5 月目に, つがいの兎は死ぬ. つまり 4 回だけ子供を産める,

Case 2: 12 月目に, つがいの兎は死ぬ. つまり 11 回だけ子供を産める,

の二つの場合にどうなるかを調べてみましょう.

(A) Case 1: 「5 月目に, つがいの兎は死ぬ」場合.

このとき n 月目のつがいの数 H_n は次の漸化式で与えられます:

$$(5) \quad \begin{aligned} H_n &= F_n, \quad n = 0, 1, \cdots, 4, \\ H_n &= H_{n-1} + H_{n-2} - H_{n-5}, \quad n \geq 5. \end{aligned}$$

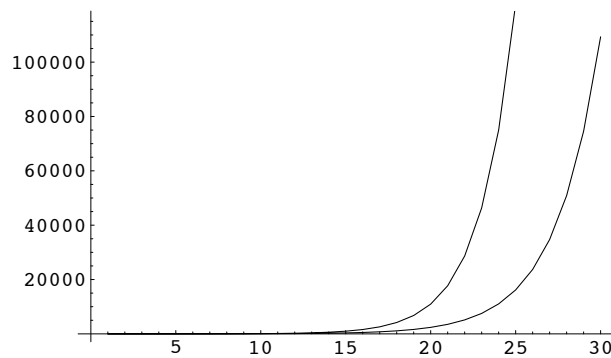
フィボナッチ数列 (2) の場合と同様の方法で, n が大きくなるとき 数列 $\{H_n, n = 1, 2, \dots\}$ も大きくなることが証明でき,

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } \frac{H_n}{H_{n-1}} \rightarrow 1.465 \dots$$

(1.465... は, 白銀比 $\sqrt{2}$ と 3.5 % しか異なる)

という計算が成立します. 別の言い方をすると,

数列 (5) の ‘5 月目に死ぬ兎’ での増加率は フィボナッチ数列とは大きく異なり, 白銀比にほぼ等しい. – 数列 (5) とフィボナッチ数列 (2) (図で上の曲線) との比較を下に示します.



(B) Case 2: 「12 月目に, つがいの兎は死ぬ」 場合.

このとき n 月目のつがいの数 K_n は次の漸化式で与えられます:

$$(6) \quad \begin{aligned} K_n &= F_n, \quad n = 0, 1, \dots, 11, \\ K_n &= K_{n-1} + K_{n-2} - K_{n-12}, \quad n \geq 12. \end{aligned}$$

前と同様に, n が大きくなると 数列 $\{K_n, n = 1, 2, \dots\}$ も大きくなることが判り,

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } \frac{K_n}{K_{n-1}} \rightarrow 1.614 \dots$$

(1.614... は, 黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と 0.3 % しか異なる)

という結果が証明できます. 結局, 次の結論が得られました:

数列 (6) の ‘12 月目に死ぬ兎’ での増加率は黄金比にほぼ等しく, ‘12 月目に死ぬ’ としても ‘ずっと生きる (= フィボナッチ数列)’ としても, 結果はほとんど変わらない. □

[1] 佐藤 修一, 自然にひそむ数学 – 自然と数学の不思議な関係, 講談社, 1998; ISBN-10: 406257201X.

[2] 橋本 和夫, 白石 亘, 黄金デザイン, 治郎吉商店, 2004; ISBN-10: 499022700X.