第 3 章

数列

現代数学では極限操作を多用するが, '極限' を習熟するために数列を導入しよう.

3.1 数列の収束と発散

順番をつけて数をならべたものを**数列** という:

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \qquad (\text{以後は } \{a_n\} \text{ と略記する})$$

数列 $\{a_n\}$ にたいしは, $n \to \infty$ のとき a_n がどう振る舞うか ('数列の漸近挙動' と呼ばれる) が興味の対象となる.

定義 3.1.1. (i) 「(†) : 数列 $\{a_n\}$ で n を限りなく大きくするとき, a_n がある数 α に近づく」. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と記し, '$\{a_n\}$ は α に収束する' という.

(ii) 収束しない数列は, '発散する' という. $\diamond$

[興味を持つ人のために]
実は, 上記 (†) の言い方は厳密さに欠けているので, 正当派の格調高い表現では次の論法を使う (所謂 ε - δ 論法で (1.2.2) の表現と同じ).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ にたいし, ある自然数 } N \text{ があり} \\ n \geq N \to |a_n - \alpha| \leq \varepsilon. \end{array} \right.$$

$\diamond$

次に, どんな数列が収束するか調べるため, 数列を分類する:

定義 3.1.2. (i) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

を満たしているとき, **単調増加** という. 逆に

$$a_0 \leq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

を満たしているとき, **単調減少**という.

(ii)　数列 $\{a_n\}$ にたいし, ある数 K があり

$$\text{すべての } n \text{ で}\quad |a_n| \leq K \tag{3.1.1}$$

であるとき, **有界な数列**という.　$\diamond$

命題 3.1.3. 数列 $\{a_n\}$ が単調増加もしくは単調減少であり, 有界. $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ は収束する.　$\diamond$

[命題 3.1.3 の略証]

簡単のため, $\{a_n\}$ は単調増加とする. 仮定より $\{a_n\}$ は有界だから, 定理 1.2.5 で $\sup\{a_n\}$ の存在が保証されている. すると 単調増加数列 $\{a_n\}$ は基本列となり, 命題 1.2.1 より収束することが保証される.　$\square$

3.2　簡単な数列の例

定義 3.2.1. (i)　d を実数とする.

$$a_n \equiv n\,d + a_0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.2.1}$$

を '等差数列' という. ここで d は '公差' , a_0 は '初項' と呼ばれる.

(ii)　r を実数とする.

$$a_n \equiv r^n\,a_0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.2.2}$$

を '等比数列' という. ここで r は '公比' , a_0 は '初項' と呼ばれる.　$\diamond$

命題 3.2.2. (i)　等差数列 (3.2.1) は $d > 0$ のとき単調増加, $d < 0$ のとき単調減少である.
　また $d \neq 0$ の等差数列は発散する.

(ii)　等比数列 (3.2.2) は

	$0 < r < 1$	$1 < r$
$a_0 > 0$	単調減少	単調増加
$a_0 < 0$	単調増加	単調減少

である.
　また等比数列は $|r| > 1$ のとき発散し, $|r| \leq 1$ のとき 0 に収束する.　$\diamond$

　もちろん, 等差もしくは等比以外の数列が多数存在する. しかしそれらの漸近挙動をしらべることは, 次節で述べる 数列 (3.3.4) のように 一般には易しくない. 一方, 次は例簡単に漸近挙動が判る例である.

例 3.2.3. (i)　$a_n \equiv 1/n$, $n = 1, 2, \cdots$:
$\Rightarrow$　$\{a_n\}$ は単調減少. また, すべての n にたいし $0 < a_n < 1$ となるので有界. つまり $\{a_n\}$ は収束し, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) $a_n \equiv 2^{1/n}$, $n = 1, 2, \cdots$:
$\Rightarrow \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n+1} == \dfrac{2^{(n+1)/n}}{2^{(n+1)/(n+1)}} = \frac{2^{1+1/n}}{2} = 2^{1/n} > 1$ となるので $\{a_n\}$ は単調減少. また, すべての n にたいし $1 < a_n \leq 2$ となるので有界. $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ は収束し, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. $\diamond$

3.3 重要な数列–ネイピア数 e と指数関数

重要な関数である '指数関数' や '自然対数' を導入するため, ネイピア数 e と呼ばれる '特別な無理数' を数列の極限として定義しよう. まず, その数列の意味を述べる.

3.3.1 金利計算と等比数列

年利 r で A 円を借り入れる. 利子は複利で計算されるので, 借金の総額は

	0 年目	1 年目	2 年目	3 年目	$\cdots$	n 年目
総額	A	$A(1+r)$	$A(1+r)^2$	$A(1+r)^3$	$\cdots$	$A(1+r)^n$

と '公比 r の等比数列' になる.
とくに 1 年間の借り入れでは

$$A \quad \rightarrow \quad A(1+r) \tag{3.3.1}$$

である. ところが 年利 r ではなく, 毎月の利率 $r/12$ で利息計算をする場合に 1 年後の借り入れは,

$$A \quad \rightarrow \quad A(1+\frac{r}{12})^{12} \tag{3.3.2}$$

となるが, このとき次の問題が発生する:

練習問題 3.3.1. '年利 r で計算した (3.3.1)' と '月利 $r/12$ で計算した (3.3.2)' では, どちらの金額が大きいか?

[解答] (3.3.1) < (3.3.2). なぜなら, 定理 2.4.5 より

$$\begin{aligned}
&A\ (1+\frac{r}{12})^{12} = A\ \big\{{}_0C_0 + \ {}_{12}C_1\ (\frac{r}{12}) + \ {}_{12}C_2\ (\frac{r}{12})^2 + \cdots + \ {}_{12}C_{12}\ (\frac{r}{12})^{12}\big\} \\
&= A\ \big\{1 + 12\cdot\frac{r}{12} + \frac{12\cdot 11}{2!}\ (\frac{r}{12})^2 + \cdots + 1\cdot(\frac{r}{12})^{12}\big\} \\
&> A\ \big\{1 + 12\cdot\frac{r}{12}\big\} = A\ (1+r). \quad \square
\end{aligned}$$

3.3.2 ネイピア数

次に 問題 3.3.1 を発展させ, 「日利計算で 1 年後の借り入れ」を計算すると

$$\text{年利 } r \text{ の利息} \ < \ \text{月利 } \frac{r}{12} \text{ の利息} \ < \ \text{日利 } \frac{r}{365} \text{ の利息} \tag{3.3.3}$$

との不等式が成立している.

例 3.3.2. では

$$\text{時間毎の利率 } \frac{r}{365\times 24},\quad \text{分毎の利率 } \frac{r}{365\times 24\times 60},\quad \cdots$$

と利息の単位期間をどんどん細かくしていくと, 1 年後の借入金額はどうなるのだろうか? ◇

この 例 3.3.2 に解答するためには, いろいろな準備を必要とする[*1].
まず

$$\text{数列}\quad a_n \equiv (1+\frac{1}{n})^n,\quad n=1,2,\cdots \tag{3.3.4}$$

の漸近挙動を調べることを目標とする.

Step 1. 定理 2.4.5 で $x=1, y=1/n$ とおくと

$$\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{n})^n = \\
&= 1+ {}_nC_1\cdot(\frac{1}{n})+ {}_nC_2\,(\frac{1}{n})^2+\cdots+ {}_nC_j\,(\frac{1}{n})^j+\cdots+{}_nC_n\,(\frac{1}{n})^n = \\
&= 1+\frac{n!}{1!\,(n-1)!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\cdot(\frac{1}{n})^2+\cdots+ \\
&\qquad +\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\cdot(\frac{1}{n})^j+\cdots+\frac{n!}{n!\,0!}\cdot(\frac{1}{n})^n = \\
&= 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot(\frac{1}{n})^2+\cdots+ \\
&\quad +\frac{n\cdot(n-1)\,\cdots\,(n-j+1)}{j!}\cdot(\frac{1}{n})^j+\cdots+\frac{n\cdot(n-1)\,\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot(\frac{1}{n})^n = \\
&= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\cdot 1\cdot\big(1-\frac{1}{n}\big)+\cdots \\
&\quad +\frac{1}{j!}\cdot 1\cdot\big(1-\frac{1}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{n-j}{n}\big)+\cdots+ \\
&\qquad +\frac{1}{n!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-2}{n})\cdot(1-\frac{n-1}{n})
\end{aligned}$$

となる. 結局, つぎの等式が得られた:

$$\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{n})^n \\
&= 2+\frac{1}{2!}\cdot\big(1-\frac{1}{n}\big)+\cdots+\frac{1}{j!}\cdot\big(1-\frac{1}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{n-j}{n}\big)+ \\
&\qquad +\cdots+\frac{1}{n!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-2}{n})\cdot(1-\frac{n-1}{n}).
\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

Step 2. 上の等式から (3.3.4) の数列 $\{a_n\}$ にたいして, 重要な性質を導びくことができる.

補題 3.3.3. 数列 (3.3.4) は単調増加, つまり $a_n < a_{n+1}$, $n=1,2,\cdots$. ◇

[*1] 後述の (3.3.7) で解答する.

[証明] まず, 次の不等式が成立していることに注意する:

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}, \quad \cdots, \\
&(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-j}{n})<(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-j}{n+1}), \quad \cdots \\
&(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-2}{n})\cdot(1-\frac{n-1}{n})<(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-2}{n+1})\cdot(1-\frac{n-1}{n+1}).
\end{aligned}
$$

これを (3.3.5) に適用して

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2+\frac{1}{2!}\cdot(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{j!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-j}{n})+ \\
&\qquad +\cdots+\frac{1}{n!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-2}{n})\cdot(1-\frac{n-1}{n}) \\
&< 2+\frac{1}{2!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})+\cdots+\frac{1}{j!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-j}{n+1})+ \\
&\qquad +\cdots+\frac{1}{n!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-2}{n+1})\cdot(1-\frac{n-1}{n+1}) \\
&< 2+\frac{1}{2!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})+\cdots+\frac{1}{j!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-j}{n+1})+ \\
&\quad +\cdots+\frac{1}{n!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-2}{n+1})\cdot(1-\frac{n-1}{n+1}) \\
&\quad +\frac{1}{(n+1)!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})\cdot(1-\frac{n}{n+1})=a_{n+1}. \quad \square
\end{aligned}
$$

補題 3.3.4. 任意の $n=1,2,\cdots$ にたいし $2\le a_n<3$. ◇

[証明] 自然数 m にたいする不等式

$$
m!=m\cdot(m-1)\cdots3\cdot2\cdot1\ge2\cdot2\cdots2=2^{m-1} \ \Rightarrow\ \frac{1}{m!}\le(\frac{1}{2})^{m-1}
$$

を (3.3.5) に使うと

$$
\begin{aligned}
a_n &\le 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{j!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{2})^{j-1}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1} \\
&= 1+\frac{1-(1/2)^n}{1/2}<1+\frac{1}{1/2}=3.
\end{aligned}
$$

$a_n\ge2$ は自明だから補題は証明された. □

Step 3. 上の 補題 3.3.4 と 定理 3.1.3 を組み合わせると, 次の結論が得られた.

定理 3.3.5. 数列 (3.3.4) は単調増加で有界だから, $\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在する. ◇

この極限値の具体的な値は, 理論では計算できないので, 次のように定義する.

定義 3.3.6 (e の定義)**.** $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$ とおき, **ネイピア数**[*2] とよぶ. なお e は無理数で, $e=2.71828\cdots$ である. ◇

[*2] しばしば「オイラー数」とも呼ばれる.

3.3.3　指数関数

いよいよ 例 3.3.2 に解答しよう. (3.3.3) を一般化し,

「年利 r を N 等分した利率 $\dfrac{r}{N}$ で A 円を 1 年間 (= N 期間) 借り入れる場合」

の借金総額

$$A\ (1+\frac{r}{N})^N \tag{3.3.6}$$

の極限を計算してみよう.

$N \equiv r\,M$ とおくと

$$(3.3.6) = A\ (1+\frac{r}{rM})^{Mr} = A\ \Big\{(1+\frac{1}{M})^M\Big\}^r$$

となる. $r>0$ は定数なので, $N\to\infty$ のとき $M\to\infty$ となる. すると 定義 3.3.6 より

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} A\ (1+\frac{r}{N})^N &= \lim_{M\to\infty} A\ \Big\{(1+\frac{1}{M})^M\Big\}^r \\ &= A\ \Big\{\lim_{M\to\infty}(1+\frac{1}{M})^M\Big\}^r = A\ e^r.\end{aligned}$$

つまり

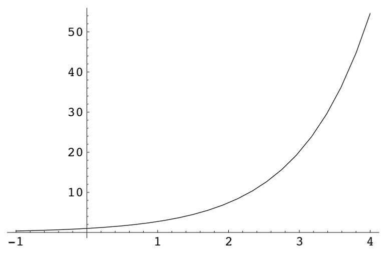
(3.3.7)　[例 3.3.2 への解答]　$N\to\infty$ としたときの
借入金額の極限は $A\ e^r$ に収束し, 無限大にはならない.　□

との結論が得られた.

なお, この解答中に登場した e^r は特別に重要なので, 次の名称を与える.

定義 3.3.7 (重要). $f(r)\equiv e^r$ を r の関数と見なし, **指数関数**とよぶ. なお今後は, e^r の代わりに, $f(r)=\exp\{r\}$ の表現をしばしば使う.　◇

指数関数 $f(r)=e^r$ のグラフは下図の通りである.



この指数関数を使うと金利計算が大幅に簡略化され, しかも (3.3.6) での計算方法との誤差も大変小さい. 実際, 利率 $r=0.05$ および $r=0.2$ (消費者金融並みの高利!) で 1 年間借り入れた時, 両者の値を比較すると, ‘日割りでの利息計算’ や ‘時間割での利息計算’ では差が殆どない.

注意 3.3.8. (3.3.5) を得るのと同様の方法により, 以下の等式が導かれる.

$$(1+\frac{r}{n})^n = 1+\frac{r}{1!}+\frac{r^2}{2!}\cdot\big(1-\frac{1}{n}\big)+\cdots+\frac{r^j}{j!}\cdot\big(1-\frac{1}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{n-j}{n}\big)+ \\ +\cdots+\frac{r^n}{n!}\cdot\big(1-\frac{1}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{n-2}{n}\big)\cdot\big(1-\frac{n-1}{n}\big). \tag{3.3.8}$$

つぎに $0<r<1$ として, 補題 3.3.4 と同じ計算を行い,

$$1+r \le (1+\frac{r}{n})^n \le 1+r+\frac{r^2}{2}+\cdots+\frac{r^n}{2^{n-1}} \le 1+\frac{r}{1-(r/2)}.$$

ここで $n\to\infty$ として

$$1+r \le e^r \le 1+\frac{r}{1-(r/2)}, \quad 0<r<1 \tag{3.3.9}$$

が成立することが示された.

この不等式は，指数関数 $f(r)\equiv\exp\{r\}$ の微分を考えるときに必要となる.　◇

練習問題 3.3.9. 次の極限を求めよ.

$$\text{(i)}\quad \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n}, \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}.$$

3.4　フィボナッチ数列と黄金比

13 世紀のイタリヤで, 「兎の問題」が提出された:

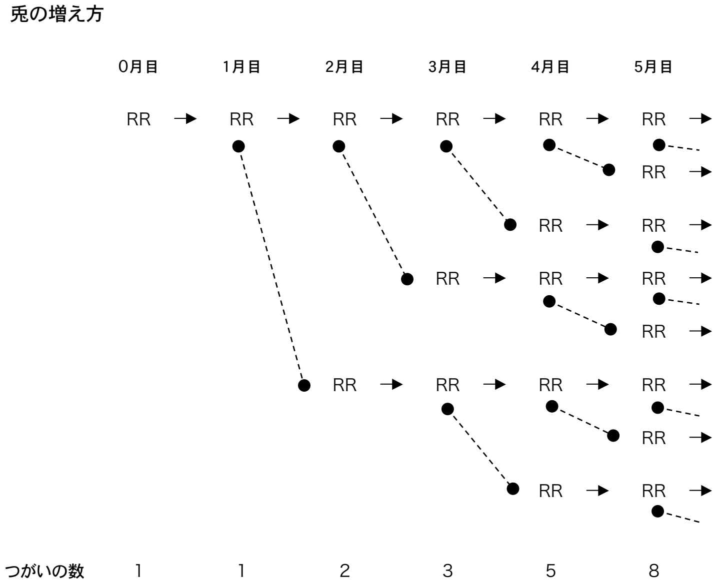
練習問題 3.4.1 (兎の問題)**.** 一つがいの兎は次の法則で増えていく:

(i) 一つがいの兎は, 生まれてから 1 ヶ月目以降, 毎月一つがいの子供を産む.
(ii) 産まれた一つがいの子供は, 生後 1 ヶ月目以降, また毎月一つがいの子供を産む.

このとき, 1 年後に何つがいの兎がいるのか?

3.4.1　フィボナッチの解答

当時のイタリア人数学者 フィボナッチ は, 兎の問題を次のように解決した： ”RR” で一つがいの兎をあらわすと, 各月のつがいの数は下図のようになる.



つまり, n 月目のつがいの数を F_n とすると, F_n は次の漸化式で表される.

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2. \tag{3.4.1}$$

この漸化式 (3.4.1) を使うと, それぞれの F_n の値が計算でき, $F_{12} = 233$ となる.

(3.4.2)

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	$\cdots$
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	$\cdots$

□

定義 3.4.2. 漸化式 (3.4.1) で与えられる数列 $\{F_n,\ n = 0, 1, \cdots\}$ は, 現在, **フィボナッチ数列**と呼ばれている.　◇

注意 3.4.3. フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ は, 整数列として数学的に興味深いだけでなく, '木の枝の付き方' や 'ヒマワリの種の並び方' など幾つもの自然現象がこの数列に従う事が判明した[*3].

そのため, 'フィボナッチ数列に関連する問題' を専門に扱う「フィボナッチ協会」[*4]という団体が 1963 年に設立されたほどである. この協会は 「The Fibonacci Quarterly」という雑誌を刊行し, 国際シンポジウムや研究集会を開催して, フィボナッチ数列の研究を推進している.

3.4.2 フィボナッチ数列の一般項

漸化式 (3.4.1) から フィボナッチ数列の一般項を求めよう.

[*3] さらには, フィボナッチ数列を利用した株式投資理論 (フィボナッチ・トリートメント) まで開発されている.

[*4] http://www.mathstat.dal.ca/Fibonacci/

いま, ある数 C, x があり, フィボナッチ数列 $\{F_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ の一般項が

$$F_n = C\,x^n \tag{3.4.3}$$

と書けているとする. (3.4.3) を (3.4.1) に代入して,

$$\begin{aligned} Cx^n &= C\,x^{n-1} + C\,x^{n-2} \\ \Leftrightarrow\ \ x^2 &= x + 1 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

という 2 次式がえられるので, x はこの 2 次式を満たしていなければならない. すなわち

$$\alpha \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta \equiv \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

の 2 実根が (3.4.4) の解なので, A, B を任意の実数とするとき

$$\begin{aligned} S_n &\equiv A\,\alpha^n, \quad n = 0, 1, \cdots \\ T_n &\equiv B\,\beta^n, \quad n = 0, 1, \cdots \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

の両方の数列が 漸化式 (3.4.1) を満たしている.

ところが, 別の数列も 漸化式 (3.4.1) を満たしていることを示そう.

補題 3.4.4. (3.4.5) で定義された数列 $\{S_n\}$, $\{T_n\}$ にたいし

$$U_n \equiv S_n + T_n = A\,\alpha^n + B\,\beta^n, \quad n = 0, 1, \cdots \tag{3.4.6}$$

とおく. このとき 数列 $\{U_n\}$ も 漸化式 (3.4.1) を満たしている. ◇

[証明] α, β が共に (3.4.4) の解であることを注意する:

$$\begin{aligned} &U_{n-1} + U_{n-2} = A\,(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}) + B\,(\beta^{n-1} + \beta^{n-2}) \\ &= A\,(\alpha+1)\,\alpha^{n-2} + B\,(\beta+1)\,\beta^{n-2} = A\,\alpha^2\,\alpha^{n-2} + B\,\beta^2\,\beta^{n-2} \\ &= U_n \end{aligned}$$

となり, 確かに (3.4.1) を満たしている. □

定理 3.4.5. フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ の一般項は以下の通り:

$$F_n = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}\,\alpha^n + -\frac{\beta}{\sqrt{5}}\,\beta^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big\{\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{n+1} - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{n+1}\Big\}. \tag{3.4.7}$$ ◇

[証明] $F_n = U_n$ とおき, $F_0 = 1, F_1 = 1$ となるように A, B を決めればよい. つまり

$$1 = F_0 = A + B, \quad 1 = F_1 = A\,\alpha + B\,\beta$$

の連立方程式を解くと,

$$A = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}, \quad B = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}$$

となり, 定理の結論が得られた. □

3.4.3　黄金比

まず フィボナッチ数列 (3.4.7) の漸近挙動を調べてみよう:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618\cdots > 1, \quad |\beta| = \Big|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big| = 0.618\cdots < 1$$

だから,

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \infty$$

となることが簡単に判る. では フィボナッチ数列 の増加率 F_n/F_{n-1} は $n \to \infty$ でどうなるのだろうか?

これも $\big|\beta\big| < 1$ だから, (3.4.7) の第 2 項は急速に減衰してしまうことを注意すると,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}/\sqrt{5}}{\alpha^n/\sqrt{5}} = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{3.4.8}$$

が導かれる.

定義 3.4.6. フィボナッチ数列 の増加率 F_n/F_{n-1} の $n \to \infty$ での極限

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.62\cdots$$

を '黄金比 golden ratio' と呼ぶ.　◇

この比率は

線分を二つに分けるとき, もっとも美しく見える比率

として知られており, カードや名刺の縦横比は黄金比である. さらにミロのビーナス, レオナルド・ダビンチの絵画, ギザのピラミッド, パルテノン神殿などに取り入れられているだけでなく, 自然の中でも多数の事例を見つけることのできる比率である[*5].

簡単に確かめられる例では, 次に述べるような人体や図形での例が知られている.

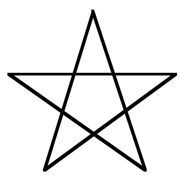


図 3.4.1　五芒星

(i) 五芒星: この図形には, いろいろな所に黄金比が隠されている. 日本の陰陽道, 修験道では「魔除けのシンボル」である. 世界的にも pentagram と呼ばれる「魔除け」, あるいは逆に「悪魔のシンボル」として, 紀元前から描かれている.

[*5] 興味のある人は, 文献 [1, 2] などを参照のこと.

(ii)　人体で　$\dfrac{\text{指先から肘までの長さ}}{\text{肘から肩までの長さ}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,

(iii)　人体を立位で計ったとき,　$\dfrac{\text{足底からへそまでの長さ}}{\text{へそから頭頂までの長さ}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(「ミロのビーナスはこの比率を持つ」といわれている.)

3.5　級数

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和

$$S_n \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

を**級数の部分和**という. $\{S_n\}$ を数列とみなして

(i)　"n を限りなく大きくするとき, S_n がある数 S に近づく"[*6]とする. このとき,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = S$$

と記し, "級数 S_n は S に収束する" という.

(ii)　収束しない級数は, "発散する" という.

例 3.5.1. (i)　等差数列　$a_n = a_1 + (n-1)\,d, \quad n = 1, 2, \cdots,$　にたいし

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = n\,a_1 + \frac{n(n-1)\,d}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

となる. $a_1 = 0, d = 0$ 以外には, 級数 S_n は発散する.

(ii)　等比数列

$$a_n = a_1\ r^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots \qquad (r \neq 1)$$

にたいし,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \frac{a_1\,(1-r^n)}{1-r}.$$

これより

(a)　$|r| < 1 \Rightarrow$　級数 T_n は $\dfrac{a_1}{1-r}$ に収束.

(b)　$|r| > 1 \Rightarrow$　級数 T_n は発散.

(iii)　数列 $a_n = 1/n, \quad n = 1, 2, \cdots,$　にたいし, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$　である.

---

*6　数列の場合と同様, 厳密な言い方には ε - δ 論法を使う.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = S \ \Leftrightarrow \ \left(\begin{array}{c} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ にたいし, ある自然数 } N \text{ があり} \\ n \geq N \to |\sum_{k=1}^{n} a_n - S| \leq \varepsilon. \end{array} \right.$$

ところがその級数は発散する:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty. \quad \diamond$$

3.6　練習問題の解答

練習問題 3.3.9 (i)　変形する:

$$(1 - \frac{1}{n})^{-n} = (\frac{n-1}{n})^{-n} = (\frac{n}{n-1})^{n} = (1 + \frac{1}{n-1})^{n} \qquad (m \equiv n-1 \text{ とおく})$$
$$= (1 + \frac{1}{m})^{m+1} = (1 + \frac{1}{m})^{m} \cdot (1 + \frac{1}{m}).$$

$m \to \infty$ のとき $(1 + \frac{1}{m})^{m} \to e,\quad (1 + \frac{1}{m}) \to 1$ だから $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^{-n} = e.$

(ii)　前問の結果をつかうと,

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{(1 - \frac{1}{n})^{-n}\right\}^{-1} = \left\{\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^{-n}\right\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \quad \square$$

第 4 章

関数

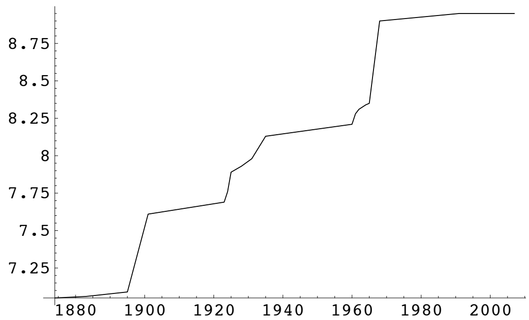
数学の応用は, '関数' という概念が導入されてから大幅に広がった. つまり関数とは, ある要因とその結果との関係を厳密に記述することだからである.

一例として, 「走り幅跳び世界記録」の変遷を取り上げてみよう.

例 4.0.1. 走り幅跳びの世界記録の変遷は以下の通りである:

1874 年	1883 年	1895 年	1901 年	1923 年	1924 年
7.05m	7.06m	7.09m	7.61m	7.69m	7.76m
レーン	ダビン	フォード	オコナー	ガーディン	ル・ジェンダー
1925 年	1928 年	1931 年	1935 年	1960 年	1961 年
7.89m	7.93m	7.98m	8.13m	8.21m	8.28m
ヒュバード	ケイター	南部中平	オーエンス	ボストン	ボストン
1962 年	1964 年	1965 年	1968 年	1991 年	2007 年
8.31m	8.34m	8.35m	8.90m	8.95m	←
テルオバニヤン	ボストン	ボストン	ビーモン	パウエル	←

この表を見ただけで, 走り幅跳びの動向を判断するのは難しいが, **"記録を年の関数とみて"** グラフを作成すれば, この様になる.



このグラフを利用すれば, 走り幅跳びの競技特性/動向の分析がより容易に行える: 例えば

(i) 3 つの長い記録停滞期 (1895-1923=22 年間, 1935-1960=25 年間, 1968-1991=23 年間) が

あり, 記録停滞期の前後に記録急進期がある.

(ii) 記録更新の難しい競技だ (記録停滞期が長く, 130 年間での年間記録保持者はたったの 14 人しかいない).

(iii) 現在は記録停滞期で, 新技術[*1] が開発されない限り 8.95m が人類能力の限界かもしれない.

$\cdots$ ♠

4.1 関数の定義

まず関数の厳密な定義を与える.

定義 4.1.1. 実数のある部分集合 $D_f \subset \mathbf{R}$ に属する数 x にたいし,

$$\text{ある数 } y \text{ が\textbf{唯一つ}対応するとき,} \tag{4.1.1}$$

その対応を **関数** と呼び,

$$y = f(x)$$

と記述する. ここで x を独立変数, y を従属変数という.

また D_f を“関数 f の**定義域**”とよぶ. 一方, 関数の値の動く範囲

$$R_f \equiv \{f(x) : x \in D_f\}$$

を**値域** と呼ぶ. ◇

注意 4.1.2. (i) 現代数学では ‘関数’ を, 集合論でいう写像と同一視することが多い. この立場にたてば, (4.1.1) は要求せず,

(a) (4.1.1) を満たす関数を, ‘一価関数’ という.
(b) (4.1.1) を満たさない関数を, ‘多価関数’ という

という分類が行われている.

ただし本書では, 以後の議論を簡易にするため, 関数の定義として (4.1.1) を要求する.

(ii) 厳密に言うと, 定義域が異なると別の関数となる. また定義域は区間で有る必要はない.

例えば, 数列 $\{a_n\}$ も関数である. この場合, 定義域 D は自然数 $\mathbf{N}$ となっている. ◇

4.2 逆関数と合成関数

有る関数が与えられているとき, その関数から新しい関数を作る方法を論ずる.

4.2.1 逆関数

関数 f の定義域を D_f, 値域を R_f とする. いま, ある部分集合 $E \subset R_f$ にたいして

$$y \in E \text{ にたいしては, } f(x) = y \text{ となる } x \in D_f \text{ が\textbf{常に唯一つ存在する}}$$

[*1] 空中で前転しながら飛ぶ技法が開発されたが, ‘危険すぎる’ との理由で禁止されている.

とする．このとき $x = f^{-1}(y)$ と表現するが，これを $y \in E$ の関数とみなして，‘f の逆関数’ と呼ぶ．

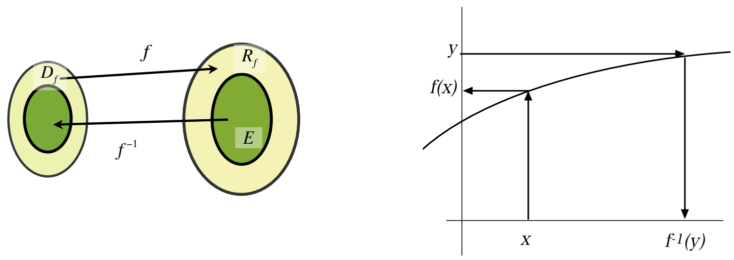


図 4.2.1　関数と逆関数

ただし，通常は x と y を入れ替えた表記をつかう：

$$\textbf{逆関数} \qquad\qquad f^{-1}(x), \quad x \in E$$

図 4.2.1 から明らかなように，

補題 4.2.1. 次の等式が成立する．

$$\begin{aligned} &y \in E \text{ にたいし} \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y, \\ &f(x) \in E \text{ である } x \text{ にたいし} \quad f^{-1}\big(f(x)\big) = x. \quad \diamond \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

例 4.2.2. (i)　関数　$f(x) = 2x, \quad D_f = \mathbf{R}, \quad R_f = \mathbf{R},$ の逆関数 f^{-1} は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x, \quad E = D_{f^{-1}} = \mathbf{R}, \quad R_{f^{-1}} = \mathbf{R}.$$

(ii)　関数　$f(x) = x^2, \quad D_f = \mathbf{R}, \quad R_f = \{x : x \geq 0\},$　にたいしては，$E = D_f$ と取ると $f(x) = y$ となる x が唯一つとは限らないので[*2]，逆関数 f^{-1} は存在しない．しかし $E = \{x : x \geq 0\} \subset D_f$ のように取ると，逆関数が存在する：

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad E = D_{f^{-1}} = \{x : x \geq 0\}, \quad R_{f^{-1}} = \{x : x \geq 0\}.$$

(iii)　関数　$f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}, \quad R_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\},$ の 逆関数 f^{-1} は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}, \quad E = D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}, \quad R_{f^{-1}} = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}.$$

練習問題 4.2.3. 上記の 例 4.2.2 (i) – (iii) で述べた f と f^{-1} にたいし，等式 (4.2.1) が成立することを確かめよ．

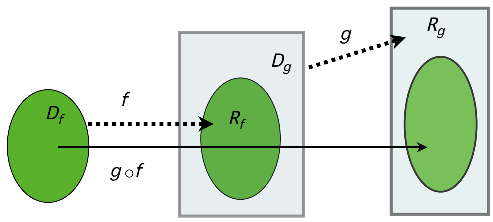
[*2] 例えば $f(x) = 1$ となる x は $x = \pm 1$ と二つある．

4.2.2　合成関数

2 つの関数 $f : D_f \to R_f$ と $g : D_g \to R_g$ が $R_f \subset D_g$ の関係にあるとき, 新しい関数

$$\textbf{合成関数} \qquad g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) : D_f \to R_g$$

を作ることが出来る.



例 4.2.4. (i) 次の二つの関数

$$f(x) = x^2, \quad D_f = \mathbf{R}, \quad R_f = \{x : x \geq 0\},$$
$$g(x) = x^3, \quad D_g = \mathbf{R}, \quad R_g = \mathbf{R},$$

の合成関数 $g \circ f$ は

$$g \circ f(x) = (x^2)^3 = x^6, \quad D_{g \circ f} = \mathbf{R}, \quad R_{g \circ f} = \{x : x \geq 0\}$$

である.

(ii) 次の二つの関数

$$f(x) = x^2, \quad D_f = \mathbf{R}, \quad R_f = \{x : x \geq 0\},$$
$$g(x) = \sqrt{x}, \quad D_g = \{x : x \geq 0\}, \quad R_g = \{x : x \geq 0\},$$

の合成関数 $g \circ f$ は

$$g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|, \quad D_{g \circ f} = \mathbf{R}, \quad R_{g \circ f} = \{x : x \geq 0\}$$

である. $\diamond$

4.3　初等関数

今後よく使う関数 (初等関数) を列挙する:

4.3.1　多項式とその仲間

実数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ にたいし,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n, \quad x \in \mathbf{R}$$

という形式を持つ関数を '多項式' という. より具体的に多項式の例を述べる.

(i)　1 次関数:　$a \neq 0, b$ を定数とする. $f(x) \equiv a\,x + b,\ x \in \mathbf{R}$.

(ii)　2 次関数: $a \neq 0, b, c$ を定数とする. $f(x) = a\,x^2 + bx + c,\ x \in \mathbf{R}$.

(iii)　3 次関数: $a_0, a_1, a_2, a_3 \neq 0$ を定数とする.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ a_3 x^3, \quad x \in \mathbf{R}.$$

例 4.3.1. $f(x) = 2x^2 - 1$ と $f(x) = x^3 - 2x^2 - \dfrac{x}{2} + 1$ (太線) のグラフを下に記す:

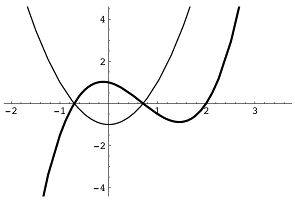


図 4.3.1　2 次関数と 3 次関数

例 4.3.2. n 次多項式

$$f(x) = x^n, \quad x \in \mathbf{R}$$

は n が奇数か偶数かでその概形が異なる.
(i)　n が奇数の時, $f(-x) = -f(x)$ という性質を持っており, '奇関数' と呼ばれる.

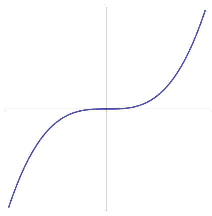


図 4.3.2　奇関数 $f(x) = x^3$ のグラフ

(ii) n が偶数の時, $f(-x) = f(x)$ という性質を持っており,'偶関数' と呼ばれる.

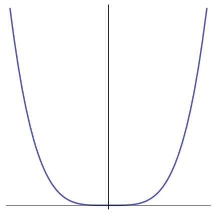


図 4.3.3　偶関数 $f(x) = x^4$ のグラフ

多項式を拡大して得られる関数の仲間に '代数関数' と呼ばれるものがある．その幾つかの例を述べよう:

(v) 分数関数: $a_0, a_1, \cdots, a_3, a_4$ を実数とするとき,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{a_3 + x}, \quad a_3 + x \neq 0,$$
$$g(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2 + a_3 x}{a_4 + a_5 x + a_6 x^2}, \quad a_4 + a_5 + a_6 x^2 \neq 0$$

などの関数を '分数関数' という.

例 4.3.3. $f(x) = 10x + \dfrac{1}{x} + 1$ のグラフを下に記す:

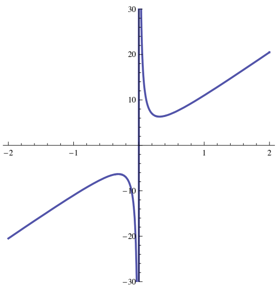


図 4.3.4　分数関数

(vi) 無理関数: 多項式の逆関数から作られる関数を無理関数という.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0,$$
$$g(x) = \big(x + 1\big)^{1/3}, \quad x \geq -1,$$

などが '無理関数' の例である.

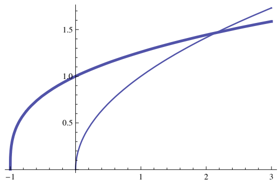


図 4.3.5　上記 f (細線), g (太線) のグラフ

4.3.2　指数関数

前章の 定義 3.3.7 で定義された '指数関数' は広く応用されている:
ネイピア数 $e = 2.7182\cdots$ の巾乗

$$f(x) \equiv e^x,\ x \in \mathbf{R}.\quad (\ \text{しばしば}\ \ f(x) = \exp\{x\}\ \text{とも書く.}\ )$$

が指数関数である.

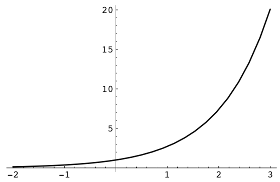


図 4.3.6　指数関数

なお指数関数の演算公式は既知とする.

補題 4.3.4. $x \in \mathbf{R}$ にたいし, 次の等式が成立:

$$\exp\{x\} \cdot \exp\{y\} = \exp\{x+y\}, \quad \bigl(\exp\{x\}\bigr)^y = \exp\{x \cdot y\}. \quad \diamond$$

指数関数は自然現象だけでなく社会現象の変遷を記述するのにも適した関数である. その例を挙げてみよう.

例 4.3.5. (i) [携帯電話の契約数] 実例として, 国内の携帯電話契約数を指数関数

$$f(x) = 13\ \exp\{a\,x\}, \quad a = 0.48246$$

で近似する. 実際の数と比べてみるとほぼ正確に近似出来ていることが判る.

	1984	'85	'86	'87	'88	'89
x	0	1	2	3	4	5
実際の契約数 ($\times$1000 件)	13	22	33	56	92	147
$f(x)$	13	21	34	55	90	146

(ii) [HIV 患者数] 次に, 国内で報告された HIV 患者数の推移を指数関数

$$g(x) = 14\ \exp\{b\,x\}, \quad b = 0.36$$

で近似する. 実際の数と比べてみると, この場合もほぼ正確に近似出来ていることが判る.

	1988	'89	'90	'91	'92	'93	'94	'95	'96
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
実際の患者数	14	21	31	38	51	86	136	169	234
$g(x)$	14	20	29	41	59	85	121	174	249

4.3.3　対数関数

指数関数が広く応用されているため, その逆関数もまた広く使われている.

定義 4.3.6. 指数関数

$$f(x) = \exp\{x\}, \quad D_f = \mathbf{R}, \quad R_f = \{x : x > 0\}$$

の 逆関数 $f^{-1}(x)$ をとくに '対数関数' とよび, $\log x$ と表記する:

$$\textbf{対数関数} \quad f^{-1}(x) = \log x, \quad D_{f^{-1}} = \{x : x > 0\}, \quad R_{f^{-1}} = \mathbf{R}. \quad \diamond$$

次の図で 太線は 対数関数 $f^{-1}(x) = \log x$, 破線は $g(x) = x$, 細線が 指数関数 $f(x) = \exp\{x\}$ のグラフである.

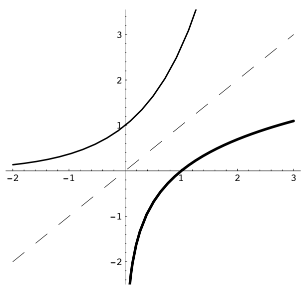


図 4.3.7　対数関数 (太線) と指数関数 (細線)

注意 4.3.7. $a > 0$ にたいし

$$\log_a x \equiv \frac{\log x}{\log a}, \quad x > 0$$

と表記し, 'a を底とする対数' と呼ぶが, とくに $a = 10$ の対数 $\log_{10} x$ を「常用対数」と言う.

この言い方に従えば, 例 4.3.6 で定義した $\log x$ は 'ネイピア数 e を底とする対数' と呼ぶべきだが, 単に「対数」と呼ぶ. しかし, 区別を明言する必要があるときには, $\log x$ を「自然対数」と呼ぶ場合もある. $\diamond$

命題 4.3.8 (対数関数の計算法則)**.**　$a, b > 0$ とする.

(i)　$\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x.$　　(ii)　$\log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0.$

(iii)　$\log_a x^y = y \log_a x, \quad x > 0.$　　(iv)　$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}, \quad x > 0.$　$\diamond$

[証明]　指数関数の演算公式 補題 4.3.4 は既知とする.

(i)　対数関数は指数関数の逆関数だから, (4.2.1) より

$$\exp\{\log a\} = a \tag{4.3.1}$$

となる. この両辺を x 乗して　$\exp\{x \log a\} = a^x$　である. 再び (4.2.1) を使うと,

$$\log a^x = \log(\exp\{x \log a\}) = x \log a.$$

これと 注意 4.3.7 より

$$\log_a a^x = \frac{\log a^x}{\log a} = \frac{x \log a}{\log a} = x.$$

次に (4.3.1), 補題 4.3.4 と 注意 4.3.7 より

$$a^{\log_a x} = \big(\exp\{\log a\}\big)^{\log_a x} = \exp\{\log a \cdot \frac{\log x}{\log a}\} = \exp\{\log x\} = x.$$

(ii)　まず (i) より $x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$ だから, (i) の第２項にも注意して

$$\log_a (x\ y) = \log_a (a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}) = \log_a a^{\log_a x + \log_a y} = \log_a x + \log_a y.$$

(iii)　再び (i) より $x = a^{\log_a x}$ だから,

$$\log_a x^y = \log_a \left(a^{\log_a x}\right)^y = \log_a a^{y\ \log_a x} = y\ \log_a x.$$

(iv)　注意 4.3.7 より

$$\frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\log x / \log b}{\log a / \log b} = \frac{\log x}{\log a} = \log_a x. \quad \square$$

練習問題 4.3.9. 次の式を簡単にせよ.

(i)　$\log \dfrac{e}{3} + \dfrac{1}{\log_3 e}$,　　(ii)　$\log e^2 - \dfrac{1}{\log_{3e} 3} + \dfrac{1}{\log 3}$,　　(iii)　$\log_3 2 \cdot \log_8 27$.

練習問題 4.3.10. $a + b = 6 \ (0 < a < b)$, $\log_a b + \log_b a = \dfrac{5}{2}$ のとき, a, b の値を求めよ.

練習問題 4.3.11. 年利 r で A 円を借り入れた. 借り入れてから 1 年後に B 円, 2 年後以降も毎年 B 円返済して, n 年後に完済したい. この n を求めよ.

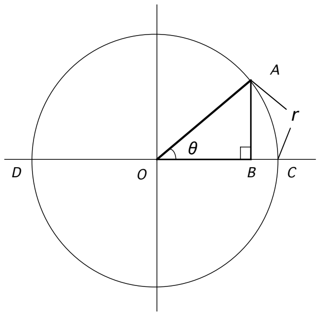


図 4.3.8　ラジアンと三角関数

4.3.4　三角関数

I. 点 O を中心とする 半径 1 の円周上に 点 A をとる. 通常は 角度 $\angle AOB$ を計る単位として, '点 O の一周は 360 度 (360°)' とする「度」を用いている. ところが微分や積分を考えるとき, 角度を '長さ' で表した方が都合がよい. そこで今後は 点 A の位置を 弧 $\widehat{AC}$ の長さ r で表すことにし「$\angle AOB = r$ **ラジアン**」と呼ぶことにする.

円周率 π を使うと, 弧 $\widehat{CD}$ の長さは π である. 一方 COD は直線なので $\angle DOC$ を '度' で計ると 180° となる. これから比例で次の対応表が得られる.

度	0°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ラジアン	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

さて, 線分 OA と X 軸とのなす角度を θ ラジアン[*3], XY 平面での 点 A の座標を (x, y) とおくとき, 三角関数 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ を次で定義する:

$$\sin\theta \equiv \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = x, \quad \cos\theta \equiv \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = y, \quad \tan\theta \equiv \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{y}{x}.$$

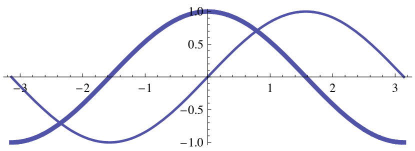


図 4.3.9　$\sin\theta$ (細線) と $\cos\theta$ (太線) のグラフ

II. 三角関数の性質を調べよう.

$\triangle OAB$ は $\overline{OA} = 1$ の直角三角形なので, ピタゴラスの定理より

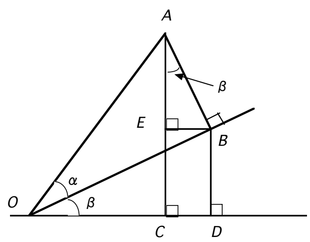
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{OB}\right)^2 = \left(\overline{OA}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

[*3] 常に ラジアン使うので今後は特に ラジアン を表記しない.

また $\angle OAB = 90^\circ - \theta$ だから

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\angle OAB) = \frac{OB}{OA} = \cos\theta$$

の関係式が得られる．



上の図から '三角関数の加法公式' を導こう．$\overline{AO} = 1$, $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOD = \beta$ とする．また $\angle ACD = \angle ABO = \angle AEB = \angle BDC = \pi/2$ である．三角関数の定義より, $\sin(\alpha + \beta) = \overline{AC}$ となる．一方 四角形 $BECD$ は長方形なので, $\overline{EC} = \overline{BD}$.

さて $\angle BAE = \beta$, $\overline{AB} = \sin\alpha$ だから

$$\overline{AE} = \overline{AB}\ \cos\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta.$$

また $\overline{OB} = \cos\alpha$ だから

$$\overline{BD} = \overline{OB}\ \sin\beta = \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

となる．これらを $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} = \overline{AE} + \overline{BD}$ に代入して, 正弦の加法定理が証明できる:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

同様の計算を $\cos(\alpha + \beta) = \overline{OC}$ に適用して, 余弦の加法公式が得られる．

以上の計算結果を補題としてまとめる．

補題 4.3.12. (i) $\sin\theta$ は奇関数, $\cos\theta$ は偶関数である．

(ii) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.\qquad \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta.$

(iii) (加法公式) quad $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$ ◇

第 5 章

関数の連続性と微分

この章では, 重要な性質-連続性と微分可能性-を備えた関数を取り上げ, それからどの様な事が導かれるかを調べる.

5.1　連続関数

定義域 D 内部の点 a にたいし,

$$\lim_{x \to a, x \in D} f(x) = \alpha$$

であるとき, '関数 f は $x = a$ で極限 α をもつ' という. (ここで $f(a)$ の値と α にはなんの関係も無いことを注意せよ.)

定義 5.1.1 (関数の連続性)**.** (i) 関数 f が $x = a$ で極限 α をもち, しかも $f(a) = \alpha$ のとき, 'f は $x = a$ で連続' という.

(ii) D の全ての点 x で連続な関数を 'D で連続な関数' という.　◇

注意 5.1.2 (興味をもつ人のために)**.** 連続の定義を ε-δ 論法を使って厳密に述べてみよう:

'関数 f は $x = a$ で連続' とは, 任意の $\varepsilon > 0$ にたいし, ある $\delta > 0$ があり,

$$|x - a| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

となる事である.　◇

例 5.1.3. 前節で述べた初等関数が連続かどうかを調べてみよう.

(i) 多項式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ は $x \in \mathbf{R}$ で連続,

(ii) 分数関数 $f(x) = a_0 + a_1 x + \dfrac{a_2}{a_3 + x}$ は 定義域 $x \neq -a_3$ では連続. しかし $x = -a_3$ では連続ではない. 実際

$$\lim_{x \to -a_3} |f(x)| = \infty.$$

となり $x = -a_3$ での極限値が存在しない.

(iii) 指数関数 $f(x) = e^x$ は $x \in \mathbf{R}$ で連続.

(iv) 対数関数 $f(x) = \log x$ は定義域全体 $x > 0$ で連続．しかし $\lim_{x\to 0} \log x = \infty$ となり，$x = 0$ での極限値は存在しない．

(v) 三角関数 $f(\theta) = \sin\theta$,　$g(\theta) = \cos\theta$　は $\theta \in \mathbf{R}$ で連続．　$\diamond$

連続関数はいろいろ都合の良い性質を備えている．

定理 5.1.4 (中間値の定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) < f(b)$ を満たしている．このとき $f(a) < c < f(b)$ である任意の c にたいし，$f(x) = c$ となる $x \in (a, b)$ が存在する．　$\diamond$

定理 5.1.5 (最大値原理)**.** 有限な閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 f は，最大値と最小値をとる．　$\diamond$

下の図を見ると，どちらの定理も自明な主張を述べているようだが，実は証明を要する．その証明は [3] を参照せよ．

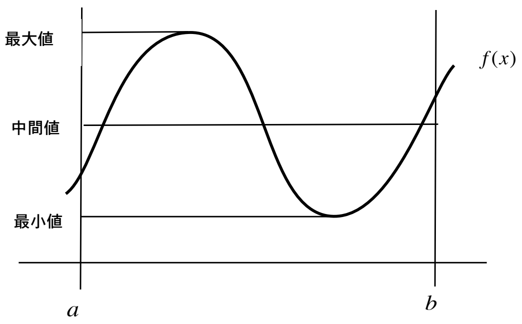


図 5.1.1　閉区間 $[a, b]$ での関数 $f(x)$ の最大値と最小値

例 5.1.6 (反例)**.** $f(x) = 1/x$ は閉区間 $[-1, +1]$ で連続ではない (分数関数のグラフ図 4.3.4 を見よ)．実際，

$$\lim_{x\to -0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +0} f(x) = \infty$$

となり，$[-1, 1]$ では最大値も最小値も持たない．

5.2　微分

定義 5.2.1. 連続関数 $f(x)$ にたいし，ある点 $x = a$ で

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{5.2.1}$$

が存在するとき，‘f は $x = a$ で微分可能’ と言い，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$$

と記述する.

　また $f'(a)$ を a の関数と見たとき, ‘f の導関数’ と呼ぶ.

注意 5.2.2. 平面上の２点 $(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$ を通る直線を $L(h)$ とする.

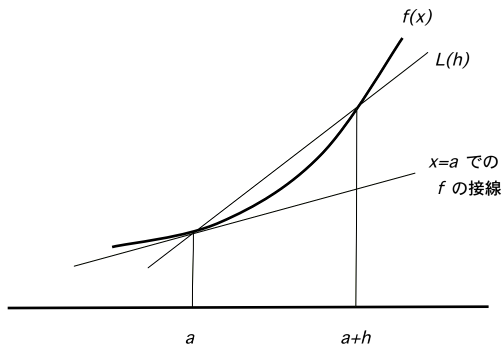


図 5.2.1　微分の図形的な意味

ここで $h \to 0$ とすると, 直線 $L(h)$ は ‘点 $x = a$ における曲線 f の接線’ に近づく. 一方, 直線 $L(h)$ の傾きは

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

だが, それを $h \to 0$ としたものが $f'(a)$ だから,

$$f'(a) = \text{点 } a \text{ における曲線 } f \text{ の接線の傾き}$$

であることが判る.　◇

注意 5.2.3. 微分可能な関数と連続関数とのギャップは大きく, ‘どの点でも微分は出来ない, しかし連続な関数’ が存在する.　◇

命題 5.2.4 (微分の公式)**.** α, β を定数, f, g を微分可能な関数とする.

(i)　$\big(\alpha\, f(x) + \beta\big)' = \alpha\, f'(x)$.

(ii)　(積の微分)　$\big(f(x)\, g(x)\big)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$.

(iii)　(合成関数の微分)　$\big(g \circ f(x)\big)' = g' \circ f(x) \cdot f'(x)$.

(iv)　$g(x) \neq 0$ として　$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$.　◇

[証明]　(i)　微分の定義 (5.2.1) より明らか.

(ii) 微分の定義より

$$\begin{aligned}&\big(f(x)\,g(x)\big)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h}\\&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\ \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&= f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x).\end{aligned}$$

(iii) $k\equiv f(x+h)-f(x)$ とおくと, f は連続関数なので $h\to 0$ のとき $k\to 0$ となる．これより $y\equiv f(x)$ とおいて

$$\begin{aligned}&\big(g\circ f(x)\big)' = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}\\&= \lim_{h\to 0}\frac{g(y+k)-g(y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(y+k)-g(y)}{k}\times\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&= \lim_{h\to 0}\frac{g(y+k)-g(y)}{k}\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+k)-f(x)}{k}\\&= g'(y)\ f'(x) = g(f(x))\ f'(x) = g'\circ f(x)\ f'(x).\end{aligned}$$

ところで，この証明は ‘$h\to 0$ となる途中で $k=0$ となる’ 場合には成立しない (分母が 0 となる)．その場合の厳密な証明には, 後述の 平均値の定理 5.4.1 を必要とするが, 詳細は略する.

(iv) まず $h(x)\equiv 1/g(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned}&\big(h(x)\big)' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\Big) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ \Big(-\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)\ g(x)}\Big)\\&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\ \lim_{h\to 0}\frac{-1}{g(x+h)\ g(x)} = \frac{-g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}.\end{aligned}$$

つぎに (ii) より

$$\begin{aligned}&\big(f(x)\ h(x)\big)' = f'(x)\ h(x)+f(x)\ h'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)\ g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}\\&= \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}.\quad\square\end{aligned}$$

5.3 初等関数の微分

初等関数の微分を実際に計算してみよう.

5.3.1 指数関数の微分

定義 3.3.7 で与えられた指数関数 $f(x)=\exp\{x\}$ の微分を求めよう．まず

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = \exp\{x\}\ \frac{\exp\{\varepsilon\}-1}{\varepsilon}$$

ここで (3.3.9) を使うと

$$1 = \frac{1}{\varepsilon}\ \{(1+\varepsilon)-1\} \le \frac{\exp\{\varepsilon\}-1}{\varepsilon} \le \frac{1}{\varepsilon}\ \{\big(1+\frac{\varepsilon}{1-(\varepsilon/2)}\big)-1\} = \frac{1}{1-(\varepsilon/2)}.$$

以上のことから

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\exp\{x\}\,\frac{\exp\{\varepsilon\}-1}{\varepsilon} \geq \lim_{\varepsilon\to 0}\exp\{x\}\cdot 1 = \exp\{x\},$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\exp\{x\}\,\frac{\exp\{\varepsilon\}-1}{\varepsilon} \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\exp\{x\}\,\frac{1}{1-(\varepsilon/2)} = \exp\{x\}$$

となるから

(5.3.1) $$\big(\exp\{x\}\big)' = \exp\{x\}.$$

5.3.2 対数関数の微分

$x > 0$ とする．対数関数 $g(x) \equiv \log x$ と指数関数 $f(x) \equiv \exp\{x\}$ の合成関数

$$f\circ g(x) = \exp\{\log x\} = x$$

を考え, 上の等式の両辺を微分しよう．命題 5.2.4 (iii) を使うと,

$$f'\circ g(x)\cdot g'(x) = \big(f\circ g(x)\big)' = \big(x\big)' = 1.$$

ここで (5.3.1) より $f'(x) = \exp\{x\}$ だから,

$$f'\circ g(x) = \exp\{g(x)\} = \exp\{\log x\} = x$$

つまり

$$x\cdot g'(x) = 1$$

という等式が得られた．結局

(5.3.2) $$\big(\log x\big)' = g'(x) = \frac{1}{x}.$$

5.3.3 多項式の微分

a を 0 でない実数とする．$x > 0$ にたいし, 代数関数 $h(x) \equiv x^a$ と 対数関数 $g(x) \equiv \log x$ の合成関数

$$g\circ h(x) = \log x^a = a\ \log x = a\,g(x)$$

の微分を計算しよう．命題 5.2.4 (iii) を使うと,

$$g'\circ h(x)\cdot h'(x) = \big(g\circ h(x)\big)' = a\ \big(g(x)\big)' = a\,g'(x)$$

ここで (5.3.2) より $g'(x) = 1/x$ だから, $g'\circ h(x) = 1/h(x)$ である．つまり

$$\frac{1}{h(x)}\cdot h'(x) = g'\circ h(x)\cdot h'(x) = a\,g'(x) = \frac{a}{x}$$

という等式が得られた．結局

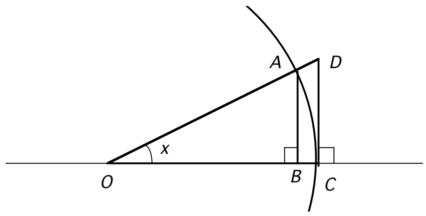
(5.3.3) $$\big(x^a\big)' = h'(x) = \frac{a}{x}\cdot h(x) = a\,x^{a-1}.$$

5.3.4　三角関数の微分

I.　まず $\varphi(x) \equiv \sin x$ の微分を計算しよう．そのためには, 次の補題が必要となる.

補題 5.3.1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$　◇

[証明]　半径が 1, 中心が O の円周上に 点 A, C をとる．点 A から線分 OC 上に垂線 AB をおろす．また 線分 OC の右端 C から垂線を立て, 線分 OA の延長線との交点を D とする.



$\angle AOC = x$ ラジアンとして, $\triangle AOB$, 扇形 $\widehat{AOC}$, $\triangle DOC$ の面積を求める:

$$
\begin{aligned}
&\triangle AOB \text{ の面積} = \frac{\overline{OB}\cdot\overline{AB}}{2} = \frac{\cos x \cdot \sin x}{2}. \quad \text{扇形 } \widehat{DOC} \text{ の面積} = \pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}, \\
&\triangle DOC \text{ の面積} = \frac{\overline{OC}\cdot\overline{DC}}{2} = \frac{1\cdot \tan x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos x}.
\end{aligned} \tag{5.3.4}
$$

それぞれの面積には

$$\triangle AOB \text{ の面積} < \text{扇形 } \widehat{DOC} \text{ の面積} < \triangle DOC \text{ の面積}$$

の大小関係があるので, これに (5.3.4) を代入して

$$\frac{\cos x \cdot \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin x}{2\cos x}$$

となる．上式を整理すると

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

が得られるので, ここで $x \to 0$ とする:

$$1 = \lim_{x\to 0} \cos x \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1. \quad \square$$

補題 5.3.2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$　◇

[証明]　補題 4.3.12 の (i) と (iii) より

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\ \sin \frac{x}{2}$$

だから

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{2\big(\sin x/2\big)^2}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x/2}{x/2} \cdot \lim_{x\to 0} \sin x/2 = -1 \cdot 0 = 0. \quad \square$$

II. いよいよ $\sin x$ を微分しよう. 加法公式

$$\sin(x+\varepsilon) = \sin x\ \cos\varepsilon + \cos x\ \sin\varepsilon$$

を使うと,

$$\big(\sin x\big)' = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(x+\varepsilon)-\sin x}{\varepsilon} = \sin x\ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon} + \cos x\ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}.$$

右辺 (　) 内に関しては, 補題 5.3.1, 5.3.2 より

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = 1 \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 0$$

だから,

$$\big(\sin x\big)' = \cos x. \tag{5.3.5}$$

練習問題 5.3.3. 次の微分公式を証明せよ.

(i) $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$ (ii) $\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

(ヒント: (i) $g(x) \equiv \sin x$, $f(x) \equiv \pi/2 + x$ とおく. 補題 4.3.12 の加法公式 (iii) より $(g\circ f)(x) = \sin(\pi/2+x) = \cos x$ となる. (ii) $\tan x = \sin x/\cos x$ だから, 命題 (微分公式) 5.2.4 (iv) が使える.)

5.3.5　初等関数の微分公式

まず, 今まで述べた微分公式を表にしよう.

定理 5.3.4. (i) f, g は微分可能な関数, α, β は定数とする.

	関数	微分
	$\alpha\, f(x) + \beta$	$\alpha\, f'(x)$
積の微分	$f(x)\ g(x)$	$f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
合成関数の微分	$g\circ f\,(x) \equiv g\big(f(x)\big)$	$g'\circ f\,(x)\, f'(x) \equiv g'\big(f(x)\big)\, f'(x)$
商の微分	$\dfrac{f(x)}{g(x)},\quad g \neq 0$	$\dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$

(ii) (a) $\dfrac{d}{dx}\exp\{x\} = \exp\{x\}.$ (b) $x > 0$ にたいし, $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}.$

(c) 定数 c にたいし, $\dfrac{d}{dx}c = 0.$

(d) $\dfrac{d}{dx}\,x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1},\quad$ ただし $\begin{cases} \text{定数 } \alpha \neq 0 \text{ が整数なら } x \neq 0 \\ \text{定数 } \alpha \neq 0 \text{ が整数でないなら } x > 0 \end{cases}$

(e) $\dfrac{d}{dx}\,\sin x = \cos x.$　　(f) $\dfrac{d}{dx}\,\cos x = -\sin x.$　◇

例 5.3.5. 次が成立:

(i) 定数 $\alpha \neq 0$ にたいし，$\big(\exp\{\alpha\, x\}\big)' = \alpha\ \exp\{\alpha\, x\}.$

(ii) 定数 $\alpha \neq 0$ と $x \neq 0$ にたいし，$\big(\log |x|^{\alpha}\big)' = \dfrac{\alpha}{x}.$

(iii) 定数 $\alpha \neq 0, \beta > 0$ にたいし，$\big(\beta^{\,\alpha\, x}\big)' = \big(\alpha\, \log \beta\big)\, \beta^{\,\alpha\, x}.$　◇

[証明] (i) は合成関数の微分公式から証明できる.
(ii) だが, 対数関数の計算規則 補題 4.3.8 より $\log |x|^{\alpha} = \alpha\, \log |x|$ となるので, $\log |x|$ の微分を計算すればよい.

$$x \neq 0 \text{ なら } \quad \big(|x|\big)' = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

だから, 合成関数の微分公式より $\big(\log |x|\big)' = 1/x$ となり, (ii) が証明できる.
　また (4.3.1) より $\beta = \exp\{\log \beta\}$ となるので,

$$\beta^{\,\alpha\, x} = \big(\exp\{(\log \beta)\}\big)^{\alpha\, x} = \exp\{(\alpha\, \log \beta)\ x\}$$

と変形できるから, 上式の右辺に (i) を適用すれば (iii) が得られる.　□

例 5.3.6 (位置と速度)**.** (i) 時刻 t 秒に粒子が存在する位置を $u(t)$ とする. 正の数 δ にたいし, 時刻 $t+\delta$ では 粒子は $u(t+\delta)$ に移るのでの,

$$\frac{u(t+\delta) - u(t)}{\delta}$$

が, その間の平均速度である. ここで $\delta \to 0$ とすると, 時刻 t での瞬間速度が得られる.

$$\text{時刻 } t \text{ での瞬間速度}: \lim_{\delta \to 0} \frac{u(t+\delta) - u(t)}{\delta} = u'(t).$$

(ii) 空気抵抗を無視すると, t 秒後の落下距離 $u(t)$ は

$$u(t) = 4.9 \cdot t^2 \text{ m}$$

である. これより 20m の落下に必要な時間 T は

$$20 = 4.9 \cdot T^2 \ \Rightarrow\ T = \sqrt{\frac{20}{4.9}} = 2.020 \cdots \sim 2 \text{ 秒}$$

そのときの着地速度は

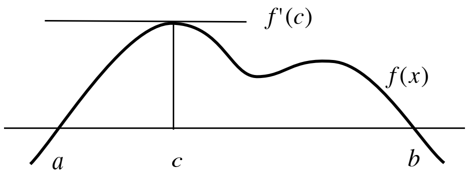
$$u'\Big(\sqrt{\frac{20}{4.9}}\ \Big) = 4.9 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{20}{4.9}} = 19.799 \cdots \sim 20\,\text{m/sec} = 72\text{km/h}.$$

衝突速度が 72km/h だから 20m の高さから飛び降りるのは止めた方が良い.　◇

5.4　平均値の定理とその応用

定理 5.4.1 (ロールの定理)**.** f を 区間 $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能な関数とする. $f(a)=0=f(b)$ なら, $f'(c)=0$ となる点 $c\in(a,b)$ が存在する.

[証明] *Step 1.* '$f(x)>0$ となる $a<x<b$ がある' と仮定する.



連続関数の最大値原理 (定理 5.1.5) より, ある c で f は最大値をとる. ところが $f(a)=0, f(b)=0$, Step 1 の仮定より $a<c<b$ である. $f(c)$ は最大値なので, 微少な数 $h>0$ にたいし, $f(c)\geq f(c+h)$ となり,

$$0\geq\frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

ここで $h\to 0$ とする.

$$0\geq\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c). \tag{5.4.1}$$

一方 微少な数 $k<0$ にたいしても $0\geq f(c+k)-f(c)$ となる. $k<0$ だから

$$0\leq\frac{f(c+k)-f(c)}{k}$$

ここで $k\to 0$ とすると

$$0\leq\lim_{k\to 0}\frac{f(c+k)-f(c)}{k}=f'(c). \tag{5.4.2}$$

結局 (5.4.1) と (5.4.2) が同時に成立しているので, $f'(c)=0$ となり, 求める $c\in(a,b)$ が見つかった.

Step 2. 'Step 1 の仮定は成立しないが, $f(x)<0$ となる $a<x<b$ がある' と仮定する.

$g(x)\equiv -f(x)$ とおくと, g は 定理 および Step 1 の仮定を満たしている. g に Step 1 の結論を適用すると, ある $a<\hat{c}<b$ で g は最大値 ($=f$ の最小値) をとり, $0=g'(\hat{c})=-f'(\hat{c})$ である. 求める $\hat{c}\in(a,b)$ が見つかった.

Step 3. 'Step 1 および 2 の仮定が成立しない' 場合を扱う.

この場合, すべての $x\in[a,b]$ にたいし $f(x)=0$ である. つまり $f'(x)=0$ となり, 定理 は成立している.　□

定理 5.4.2 (平均値の定理)**.** f を 区間 $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能な関数とするとき, 次を満たす点 $c \in (a,b)$ が存在する:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \quad \diamond$$

[証明]　f を使って, 新しい関数 φ を

$$\varphi(x) \equiv f(b) - f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x), \quad a \le x \le b$$

と定義する. すると φ は微分可能で, $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$ となり, ロールの定理 (定理 5.4.1) が適用できる. つまり ある $a < c < b$ が存在し

$$0 = \varphi'(c) = -f'(c) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となる. 定理は証明された.　□

関数の増減の判定条件が, 平均値の定理 5.4.2 より導かれる:

定理 5.4.3. (a,b) を区間, 関数 $f(x)$ は微分可能とする.

(i)　$x \in (a,b)$ で $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\;$ 区間 (a,b) で $f(x)$ は定数.

(ii)　$x \in (a,b)$ で $f'(x) > 0 \;\Rightarrow\;$ 区間 (a,b) で $f(x)$ は単調増加関数.

(iii)　$x \in (a,b)$ で $f'(x) < 0 \;\Rightarrow\;$ 区間 (a,b) で $f(x)$ は単調減少関数.　$\diamond$

例 5.4.4. $x > 0$ にたいし, $\log(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$ を示せ.

解答　$f(x) = \log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ とする.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 - x = \frac{x^2}{1+x} > 0 \quad \text{if } x > 0.$$

定理 5.4.3 より, $x > 0$ で増加関数となり, 任意の $x > h > 0$ にたいし

$$f(x) > f(h) \ge f(0) = 0. \quad \square$$

5.5　不定形の計算–ロピタルの定理

$0/0$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞ などは不定形といい, この計算は数学では許されていない. ところが 平均値の定理 を拡張すると, これらの計算が実行出来る場合がある.

定理 5.5.1 (コーシーの平均値の定理)**.** 関数 f, g を 区間 $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能な関数とする. $x \in (a,b)$ にたいし, $g'(x) \ne 0$ なら, 次を満たす点 $c \in (a,b)$ が存在する:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad \diamond$$

練習問題 5.5.2. この 定理 (コーシーの平均値の定理) を証明せよ.
(ヒント: 新しい関数 ψ

$$\psi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \big(g(b) - g(x)\big)$$

を考え, これに 定理 (ロール) 5.4.1 を適用せよ.)

コーシーの平均値の定理を利用し, 不定形の計算を行おう.

定理 5.5.3 (ロピタル)**.** (i)　関数 f, g は 区間 (a, b) で微分可能, $[a, b]$ で連続とする. さらに $f(a) = 0 = g(a)$, $g'(a) \neq 0$ である. このとき

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{b \to a} \frac{f'(b)}{g'(b)}.$$

(ii)　関数 f, g は 区間 (R, ∞) で微分可能かつ連続とする. さらに $x \in (R, \infty)$ で $g'(x) \neq 0$ であり, $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ である. このとき

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \quad \text{なら} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \quad \text{である.} \quad \diamond$$

[証明]　(i)　$f(a) = 0 = f(b)$ に注意して 定理 5.5.1 を適用すると,

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b$$

ここで, $b \to a$ とすればよい.
(ii)　まず $K \equiv \dfrac{f(x) - f(R)}{g(x) - g(R)}$ とおくと

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(R)}{g(x)} + \big(1 - \frac{g(R)}{g(x)}\big) K \tag{5.5.1}$$

である. $x \to \infty$ のとき　$g(x) \to \infty$　となるので, (5.5.1) で $x \to \infty$ とすると,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(R)}{g(x)} + \lim_{x \to \infty} \big(1 - \frac{g(R)}{g(x)}\big) \lim_{x \to \infty} K = \lim_{x \to \infty} K. \tag{5.5.2}$$

ところが 定理 5.5.1 より ‘ある $R < c < x$ があり, $K = f'(c)/g'(c)$’ だから, $R \to \infty$ とすれば

$$\lim_{R \to \infty} \lim_{x \to \infty} K = \lim_{c \to \infty} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \gamma$$

となる (ここで, c は x と R と共に変化することに注意せよ.)　つまり (5.5.2) で $R \to \infty$ とすれば, ‘左辺 $= \gamma$’ となり, 定理の結論が得られた.　□

5.6　高階微分とテイラー展開

関数 f の導関数 $f'(x)$ にたいし, その微分と導関数 $f''(x)$ を考えることができる. 関数 f の導関数 $f'(x)$ にたいし, $x = x_0$ で

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} \equiv f''(x_0) \quad \Big(= \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \Big) \tag{5.6.1}$$

が存在するとき, 'f は x_0 で 2 階微分可能' と言い, 上式右辺の様に記述する. また $f''(x)$ を 2 階導関数と呼ぶ.

さらに順次, 3 階微分, $\cdots$, n 階微分も考えることができる. 関数 f の $n-1$ 次導関数 $f^{(n-1)}(x)$ にたいし, $x = x_0$ で

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} \equiv f^{(n)}(x_0) \quad \left(= \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \right) \tag{5.6.2}$$

が存在するとき, 'f は x_0 で n 階微分可能' と言い, 上式右辺の様に記述する. また $f^{(n)}(x)$ を n 階導関数と呼ぶ.

この高階微分の重要な応用として, テイラー展開がある.

定理 5.6.1 (テイラー展開)**.** 関数 f は 区間 (a,b) で $n+1$ 階まで微分可能をする. 点 $c, x \in (a,b)$ にたいし, 次が成立: ある点 y があり

$$\begin{aligned} &f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_{n+1}, \\ &\text{ここで, } |y-c| < |x-c| \text{ であり } R_{n+1} \equiv \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \quad \diamond \end{aligned} \tag{5.6.3}$$

例 5.6.2. (i) 指数関数 $\exp\{x\}$ の 0 を中心としたテイラー展開は,

$$\exp\{x\} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots. \tag{5.6.4}$$

(ii) $x > 0$ にたいして定義さた対数関数 $\log x$ の 1 を中心としたテイラー展開は,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots. \tag{5.6.5}$$

(iii) 三角関数 $\sin x, \cos x$ の 0 を中心とした Taylor 展開は,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots. \tag{5.6.6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots. \tag{5.6.7}$$

5.7 テイラー展開の応用

5.7.1 極値

極値は, 関数 $f(x)$ の挙動を調べる上で大事な性質である.

定義 5.7.1. (i) 次が成立するとき, “$f(x)$ は点 a で**極大値** をとる” という:

$$|x-a| \text{ が十分小さいとき} \quad f(x) \le f(a).$$

(ii) 次が成立するとき, “$f(x)$ は点 a で**極小値**をとる” という:

$$|x-a| \text{ が十分小さいとき} \quad f(x) \ge f(a). \quad \diamond$$

定理 (テイラー展開) 5.6.3 から, 極値となるためのより詳しい判定条件が導かれる:

定理 5.7.2 (極値の判定 1)**.** 関数 $f(x)$ は 2 階微分可能.

(i) $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0 \ \Rightarrow\ f(x)$ は点 a で極大値をとる.

(i) $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0 \ \Rightarrow\ f(x)$ は点 a で極小値をとる. $\diamond$

定理 5.7.3 (極値の判定 2)**.** n を自然数とし, 関数 $f(x)$ は $2n$ 階微分可能.

(i) $f'(a) = 0, \cdots, f^{(2n-1)}(a) = 0$ かつ $f^{(2n)}(a) < 0 \ \Rightarrow\ f(x)$ は点 a で極大値をとる.

(ii) $f'(a) = 0, \cdots, f^{(2n-1)}(a) = 0$ かつ $f^{(2n)}(a) > 0 \ \Rightarrow\ f(x)$ は点 a で極小値をとる. $\diamond$

5.7.2 ロピタルの定理の拡張

定理 (ロピタル) 5.5.3 で述べた公式を 定理 (テイラー展開) 5.6.3 を使って拡張する:

定理 5.7.4 (ロピタル 2)**.** 関数 f, g は n 階微分可能で,

$$\begin{aligned} &f(a) = 0,\ f'(a) = 0,\ \cdots,\ f^{(n-1)}(a) = 0, \\ &g(a) = 0,\ g'(a) = 0,\ \cdots,\ g^{(n-1)}(a) = 0,\ g^{(n)}(a) \neq 0. \end{aligned}$$

このとき

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}. \quad \diamond$$

5.7.3 関数の近似

関数の近似を行う. $f(x)$ が高階微分可能なとき, 定理 (テイラー展開) 5.6.3 より

$$\begin{aligned} &f(c+h) = P_n(h) + R_{n+1}. \\ &P_n(h) \equiv f(c) + f'(c)\,\frac{h}{1!} + f''(c)\,\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(c)\,\frac{h^n}{n!} \\ &R_{n+1} \equiv f^{(n+1)}(y)\,\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad c < y < c+h, \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

である. 従って, $f(c+h)$ と $P_n(h)$ との誤差の限界は

$$\max_{c<y<c+h} \left| R_{n+1} \right| = \max_{c<y<c+h} \left| \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}\, h^{n+1} \right| \tag{5.7.2}$$

となる.

例 5.7.5. $\sqrt{4.1}$ を近似し, その誤差を評価せよ. $\diamond$

[解答] $f(h) \equiv \sqrt{4+h}$ とする. この f にたいし, $n = 2$ とおいて (5.7.1) を応用する: $4 < y < 4+h$ にたいし

$$\begin{aligned} \sqrt{4+h} &= \sqrt{4} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{4}}\ \frac{h}{1!} + -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{4^{3/2}}\ \frac{h^2}{2!} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\ \frac{1}{y^{5/2}}\ \frac{h^3}{3!} \\ &= 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} + \frac{h^3}{16\ y^{5/2}}; \quad P_2(h) = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64}, \quad R_3 = \frac{h^3}{16\ y^{5/2}}. \end{aligned}$$

$h=0.1$ として $\sqrt{4.1}$ を近似し, (5.7.2) に従ってその誤差を評価する.

$$\sqrt{4.1} \sim 2+\frac{1}{4}\ \frac{1}{10}-\frac{1}{64}\ \frac{1}{100}=2.02484\cdots,$$
$$\left|\text{誤差}\right| \le \max_{4<y<4.1}\ \frac{1}{16\ y^{5/2}}\ \frac{1}{10^3}=\frac{1}{16\ 4^{5/2}}\ \frac{1}{1000}=\frac{1}{512000}. \quad \square$$

5.7.4　複素数への拡張

(5.6.4), (5.6.5) のテイラー展開を使い, 複素数にたいして, 指数関数, 対数関数を定義しよう.

Step 1. i を虚数単位とする. (5.6.4) の両辺で $x \to ix$ と置き換える:

$$\begin{aligned}\exp\{ix\} &= 1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\\ &= \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\end{aligned}$$

一方, (5.6.6) と (5.6.7) より

$$\begin{aligned}i\ \sin x &= i\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\Big),\\ \cos x &= \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\end{aligned}$$

なので,

(5.7.3) $$\exp\{ix\}=\cos x+i\ \sin x \qquad (\textbf{オイラーの等式})$$

となる.

Step 2. r を実数とし,

$$\exp\{r\}\ \cos x=a, \qquad \exp\{r\}\ \sin x=b$$

とおく. すると (5.7.3) は

$$\exp\{r+ix\}=\exp\{r\}\cos x+i\ \exp\{r\}\sin x=a+ib.$$

対数関数の定義を思い出すと, この等式から

(5.7.4) $$\log\big(a+ib\big)=r+i\,x.$$

ここで $\cos x \neq 0$ と仮定すると,

$$\begin{aligned}&a^2+b^2=\exp\{2r\}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\exp\{2r\},\\ &\frac{b}{a}=\frac{e^r\sin x}{e^r\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x\end{aligned}$$

$\theta=\tan x$ の逆関数を $\arctan\theta$ と表す. すると

$$x=\arctan\frac{b}{a}$$

となるので, (5.7.4) は

$$\log\big(a+ib\big)=\log\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)+i\arctan\frac{b}{a}$$

となる.　$\diamond$

5.8　練習問題の解答

問題 5.3.3 (i)　また $g(x) \equiv \sin x$, $f(x) \equiv \pi/2 + x$ とおく. $\sin \pi/2 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$ に注意すると, 補題 4.3.12 の加法公式 (iii) より

$$(g \circ f)(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x.$$

この両辺を微分する. 合成関数の微分公式, (5.3.5), 補題 4.3.12 の加法公式 (iii) を当てはめて, 次の結論が得られる:

$$\big(\cos x\big)' = \big((g \circ f)(x)\big)' = \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x.$$

(ii)　$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ だから, 命題 (微分公式) 5.2.4 (iv) を使うと

$$\frac{d}{dx}\ \tan x = \frac{\big(\sin x\big)'\ \cos x - \sin x\ \big(\cos x\big)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \square$$

問題 5.5.2　まず, $x \in (a, b)$ にたいし, $g'(x) \neq 0$ だから, $g(b) \neq g(a)$ である. そこで, f, g から新しい関数 ψ を

$$\psi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\ \big(g(b) - g(x)\big)$$

で定義する. すると ψ は微分可能で, $\psi(a) = 0$, $\psi(b) = 0$ となり, ロールの定理 (定理 5.4.1) が適用できる. つまり ある $a < c < b$ が存在し

$$0 = \psi'(c) = -f'(c) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(c)$$

となる. 上式を整理して定理が証明される.　$\square$