

応用解析学-練習問題解答

2007/12/14, 西岡 國雄^{*1}

付録 A 練習問題

練習問題 付録 A.1. 次の問題の極値をもとめ, 極大/極小の判定を行え.

$$(i) \quad f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3, \quad (iii) \quad f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x.$$

解答 (i) 偏微分を行い, 極値の候補者をさがす:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x - 2y = 0, & f_y(x, y) &= -2x + 3y^2 = 0, \\ \Rightarrow (x, y) &= (0, 0) \quad \text{or} \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

極大/極小の判定のため 2 階偏微分も行う:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2 > 0, \quad f_{xy}(x, y) = -2, \quad f_{yy}(x, y) = 6y, \\ \Rightarrow f_{xx}(0, 0) f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 &= 2 \times 0 - (-2)^2 = -4 < 0, \\ f_{xx}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) f_{yy}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - (f_{xy}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right))^2 &= 2 \times 6 \times \frac{2}{3} - (-2)^2 = 4 > 0. \end{aligned}$$

よって $(2/3, 2/3)$ は極小点.

(ii) まず, 極値の候補者をさがす:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x - y - 4 = 0, & f_y(x, y) &= -x + 2y = 0, \\ \Rightarrow (x, y) &= \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

極大/極小の判定のため 2 階偏微分も行う:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2 > 0, \quad f_{xy}(x, y) = -1, \quad f_{yy}(x, y) = 2, \\ \Rightarrow f_{xx}\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) f_{yy}\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) - (f_{xy}\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right))^2 &= 2 \times 2 - (-1)^2 = 3 > 0. \end{aligned}$$

よって $(8/3, 4/3)$ は極小点. $\square$

練習問題 付録 A.2. つぎの等式制約条件つき最適化問題を解け.

(i) $\max(x + y)$ subject to $2x^2 + y^2 + y = 3$.

(ii) $\min(-x^2y)$ subject to $x + y^2 = 5$.

(iii) 制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で $x^3 + y^3$ の最大値と最小値をもとめよ.

(iv) $\max(xy + yz + zx)$ subject to $x + y + 2z = 3$ and $x + 3y = 1$.

(v) $\max(x + 2y + z)$ subject to $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and $x + z = 1$.

^{*1} 2 号館 21138 号室, nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp

解答 (i) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x^2 + y^2 + y$, $b = 3$ とし, ラグランジュの乗数法を用いる. ラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(3 - 2x^2 - y^2 - y)$$

となる.

$$(a) \quad 0 = L_x(x, y, \lambda) = 1 - 4\lambda x$$

$$(b) \quad 0 = L_y(x, y, \lambda) = 1 - 2\lambda y - \lambda$$

$$(c) \quad 0 = L_\lambda(x, y, \lambda) = 3 - 2x^2 - y^2 - y$$

(a) より $x = 1/(4\lambda)$ と (b) より $y = 1/(2\lambda) - 1/2$ を (c) に代入すると y だけの式が得られる:

$$3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

これを変形して,

$$\frac{13}{4} - \frac{3}{8\lambda} = 0.$$

従って, $\lambda^2 = \frac{3}{26}$ を得る. すなわち, $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{26}}$ である. x, y は λ で表されていたから, それぞれ代入すると

Case 1. $\lambda = \sqrt{\frac{3}{26}}$ のとき,

$$(a) \text{ より } x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{26}{3}}, (b) \text{ より } y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{26}{3}} - 1\right).$$

Case 2. $\lambda = -\sqrt{\frac{3}{26}}$ のとき,

$$(a) \text{ より } x = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{26}{3}}, (b) \text{ より } y = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{26}{3}} + 1\right).$$

つまり最適解の候補者は

$$(x, y, \lambda) = \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{26}{3}}, \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{26}{3}} - 1\right), \sqrt{\frac{3}{26}}\right), \left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{26}{3}}, -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{26}{3}} + 1\right), -\sqrt{\frac{3}{26}}\right)$$

が最適解の候補者となる. これらを実際に $f(x, y)$ に代入して大小を比較する:

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{26}{3}}, \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{26}{3}} - 1\right)\right)$$

が最適解, 最適値は $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{26}{3}} - \frac{1}{2}$ である.

(ii) ラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda) = -x^2y + \lambda(5 - x - y^2)$$

となる.

$$(a) \quad 0 = L_x(x, y, \lambda) = -2xy - \lambda$$

$$(b) \quad 0 = L_y(x, y, \lambda) = -x^2 - 2\lambda y$$

$$(c) \quad 0 = L_\lambda(x, y, \lambda) = 5 - x - y^2$$

(c) より $x = 5 - y^2$ を (a) に代入し計算すると, $\lambda = -2y(5 - y^2)$ を得る.

x, λ の値を (b) に代入すると y だけの式が得られる:

$$-(5 - y^2) + 4y^2(5 - y^2) = 0.$$

これを変形し,

$$(y^2 - 1)(y^2 - 5) = 0.$$

ゆえに, $y = \pm 1$ or $\pm \sqrt{5}$ である. x, λ は y で表されていたから, それぞれ代入すると

$$(x, y, \lambda) = (4, \pm 1, \pm 8), (0, \pm \sqrt{5}, 0)$$

が最適解の候補者である. これを実際に $f(x, y)$ に代入し

$$(x^*, y^*) = (4, 1)$$

が最適解, 最適値は -16 である.

(iii) ラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda) = x^3 + y^3 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

となる.

$$(a) \quad 0 = L_x(x, y, \lambda) = 3x^2 - 2\lambda x$$

$$(b) \quad 0 = L_y(x, y, \lambda) = 3y^2 - 2\lambda y$$

$$(c) \quad 0 = L_\lambda(x, y, \lambda) = 1 - x^2 - y^2$$

(a) を変形すると $x(3x - 2\lambda) = 0$ だから, $x = 0$ or $x = 2\lambda/3$ である.

また (b) を変形すると $y(3y - 2\lambda) = 0$ だから, $y = 0$ or $y = 2\lambda/3$ である. (c) より, $x = y = 0$ はあり得ないから, 考えられるのは

$$x = 0, \quad \text{or} \quad y = 0, \quad \text{or} \quad x = y = 2\lambda/3$$

のときである.

Case 1 $x = 0$ のとき, (c) に代入すると, $y = \pm 1$, (b) に y の値を代入して $\lambda = \pm 3/2$ が得られる.

Case 2 $y = 0$ のとき, (c) に代入すると, $x = \pm 1$, (a) に x の値を代入して $\lambda = \pm 3/2$ が得られる.

Case 3 $x = y = 2\lambda/3$ のとき, (c) に代入すると $\lambda = \pm 3/(2\sqrt{2})$ を得る. 従って, $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$.

ゆえに,

$$(x, y, \lambda) = (0, \pm 1, \pm \frac{3}{2}), (\pm 1, 0, \pm \frac{3}{2}), (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{3}{2\sqrt{2}})$$

が最大値, 最小値を与える候補者である. これを実際に $f(x, y)$ に代入し

$$(x^*, y^*) = (0, 1), (1, 0)$$

で最大値をとり, 最大値は 1 である. 一方,

$$(x^*, y^*) = (0, -1), (-1, 0)$$

で最小値をとり, 最小値は -1 である.

(iv) ラグランジュ関数は

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz + zx + \lambda_1(3 - x - y - 2z) + \lambda_2(1 - x - 3y)$$

だから,

$$\begin{aligned} (a) \quad 0 &= L_x(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = y + z - \lambda_1 - \lambda_2 \\ (b) \quad 0 &= L_y(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + z - \lambda_1 - 3\lambda_2 \\ (c) \quad 0 &= L_z(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = y + x - 2\lambda_1 \\ (d) \quad 0 &= L_{\lambda_1}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 3 - x - y - 2z \\ (e) \quad 0 &= L_{\lambda_2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 1 - x - 3y \end{aligned}$$

(c) より $\lambda_1 = 1/2(x + y)$, (d) より $z = 1/2(3 - x - y)$. これを (a), (b) に代入し, 整理すると

$$\begin{aligned} (a') \quad -x + 3/2 - \lambda_2 &= 0 \\ (b') \quad -y + 3/2 - 3\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

を得る. さらに (e) より $x = 1 - 3y$ を (a') に代入すると

$$(a'') \quad 3y + 1/2 - \lambda_2 = 0.$$

従って, 未知数 y, λ_2 の式 (b') と (a'') が得られた. これより, まず $\lambda_2 = 1/2$ を得る. このとき

$$(付録 A.1) \quad (x^*, y^*, z^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (1, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

が最適解の候補者である.

実際, これが最適解となっているかどうか調べる. p, q, r を微小な量として, 最適解 (A.1) の x^*, y^*, z^* の近傍

$$x = 1 + r, \quad y = 0 + r, \quad z = 1 + q$$

での $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ の値を調べる. ここで 制約条件を考えると,

$$\begin{aligned} x + y + 2z = 3 &\Rightarrow 1 + r + p + 2 + 2q = 3 \\ x + 3y = 1 &\Rightarrow 1 + r + 3p = 1 \end{aligned}$$

が成立しているので,

$$r = -3p, \quad q = p$$

となる. つまり

$$\begin{aligned} f(1 - 3p, 0 + p, 1 + p) &= (1 - 3p)p + p(1 + p) + (1 - 3p)(1 + p) \\ &= 1 - 5p^2 \leq 1 = f(1, 0, 1) \end{aligned}$$

と p の値にかかわらず, $f(1, 0, 1)$ より小さくなる. 従って, (A.1) が最適解である.

(v) ラグランジュ関数は

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + 2y + z + \lambda_1(1 - x^2 - y^2 - z^2) + \lambda_2(1 - x - z)$$

だから,

$$\begin{aligned}
(a) \quad & 0 = L_x(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 \\
(b) \quad & 0 = L_y(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2 - 2\lambda_1 y \\
(c) \quad & 0 = L_z(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 1 - 2\lambda_1 z - \lambda_2 \\
(d) \quad & 0 = L_{\lambda_1}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 \\
(e) \quad & 0 = L_{\lambda_2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 1 - x - z
\end{aligned}$$

(e) より $z = 1 - x$ を (c) に代入すると,

$$(c') \quad 1 - 2\lambda_1 + 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0$$

となる. (c') から (a) を引くと, $\lambda_1(1 - 2x) = 0$ が得られるので, $\lambda_1 = 0$ or $x = 1/2$ が言える.

ここで, (b) より $\lambda_1 y = 2 \neq 0$ なので, $\lambda_1 \neq 0$ でなければならない. したがって, $x = 1/2$ である. このとき, $z = 1/2$, (d) に x, z の値を代入して $y = \pm 1/\sqrt{2}$ を得る.

同様にして, (a), (c) より $\lambda_1 = \pm 2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 \mp 2\sqrt{2}$ がもとめられた. 従って,

$$(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \pm 2\sqrt{2}, 1 \mp 2\sqrt{2} \right)$$

が最適解の候補者である. これを実際に $x + 2y + z$ に代入し

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right)$$

が最適解, 最適値は $1 + \sqrt{2}$ である. $\square$

練習問題 付録 A.3. 次の不等式制約条件付き最適化問題を解け.

- (i) $\max(x^2 + y^2)$ subject to $2x^2 + y^2 \leq 4$.
- (ii) $\max(x^2 + y)$ subject to $2x^2 + y^2 \leq 4$.
- (iii) $\max(2(x - y)^2 - x^4 - y^4)$ subject to $x^2 + y^2 \leq 5$.

解答 (i) ラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(4 - 2x^2 - y^2)$$

となる. $\lambda \geq 0$ として,

$$\begin{aligned}
(a) \quad & 0 = L_x(x, y, \lambda) = 2x - 4\lambda x \\
(b) \quad & 0 = L_y(x, y, \lambda) = 2y - 2\lambda y \\
(c) \quad & 0 \leq L_\lambda(x, y, \lambda) = 4 - 2x^2 - y^2 \\
(d) \quad & 0 = \lambda L_\lambda(x, y, \lambda) = \lambda(4 - 2x^2 - y^2)
\end{aligned}$$

(a) より, $x(1 - 2\lambda) = 0$ だから, $x = 0$ or $\lambda = 1/2$.

Case 1. $x = 0$ のとき, (d) に代入すると $\lambda(4 - y^2) = 0$ であるから, $\lambda = 0$ or $y = \pm 2$ である. $\lambda = 0$ のとき, (b) より $y = 0$. また, $y = \pm 2$ のとき, (b) より $\lambda = 1$.

Case 2. $\lambda = 1/2$ のとき, (b) に代入すると, $y = 0$ がわかる. さらに λ, y の値を (d) に代入すると $x = \pm\sqrt{2}$ を得る.

従って,

$$(x, y, \lambda) = (0, 0, 0), (0, \pm 2, 1), (\pm\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2})$$

が最適解の候補者である. これを実際に $f(x, y)$ に代入し

$$(x^*, y^*) = (0, \pm 2)$$

が最適解, 最適値は 4 である.

(ii) ラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y + \lambda(4 - 2x^2 - y^2)$$

となる. $\lambda \geq 0$ として,

$$\begin{aligned} (a) \quad & 0 = L_x(x, y, \lambda) = 2x - 4\lambda x \\ (b) \quad & 0 = L_y(x, y, \lambda) = 1 - 2\lambda y \\ (c) \quad & 0 \leq L_\lambda(x, y, \lambda) = 4 - 2x^2 - y^2 \\ (d) \quad & 0 = \lambda L_\lambda(x, y, \lambda) = \lambda(4 - 2x^2 - y^2) \end{aligned}$$

(a) より, $x(1 - 2\lambda) = 0$ だから, $x = 0$ or $\lambda = 1/2$. また, (b) より $\lambda y = 1/2 \neq 0$ なので, $\lambda \neq 0$ かつ $y \neq 0$ でなければならない. すなわち, (d) より

$$(d') \quad 4 - 2x^2 - y^2 = 0$$

である.

Case 1. $x = 0$ のとき, (d') より $y^2 = 4$. すなわち $y = \pm 2$ を得る. これを (b) に代入して $\lambda = \pm 1/4$.

Case 2. $\lambda = 1/2$ のとき, (b) より $y = 1$ を得る. これを (d') に代入して $x^2 = 3/2$ ゆえに $x = \pm\sqrt{3/2}$

従って,

$$(x, y, \lambda) = (0, \pm 2, \pm \frac{1}{4}), (\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 1, \frac{1}{2})$$

が最適解の候補者である. これを実際に $f(x, y)$ に代入し

$$(x^*, y^*) = (\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$$

が最適解, 最適値は $5/2$ である.

(iii) この最適値問題に対応するラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda) = 2(x - y)^2 - (x^4 + y^4) + \lambda(5 - x^2 - y^2).$$

これを x, y, λ について偏微分し,

$$(付録 A.2) \quad L_x(x, y, \lambda) = 4(x - y) - 4x^3 - 2\lambda x = 0,$$

$$(付録 A.3) \quad L_y(x, y, \lambda) = -4(x - y) - 4y^3 - 2\lambda y = 0,$$

$$(付録 A.4) \quad L_\lambda(x, y, \lambda) = 5 - x^2 - y^2 \geq 0, \quad \lambda \geq 0,$$

$$(付録 A.5) \quad \lambda(5 - x^2 - y^2) = 0.$$

まず (A.5) より $\lambda = 0$ もしくは $5 - x^2 - y^2 = 0$ となる.

Step 1. $\lambda = 0$ とする.

(A.2) と (A.3) から $y = x - x^3$, $x = y - y^3$ となるので,

$$\begin{aligned} x &= y(1 - y)(1 + y) = (x - x^3)(1 - x + x^3)(1 + x - x^3) \\ &= x - 2x^3 + 3x^5 - 3x^7 + x^9 - x^9 \end{aligned}$$

この代数方程式をとき, x の値を求める.

$$-2x^3 + 3x^5 - 3x^7 + x^9 = x^3(x^2 - 2)(1 - x^2 + x^4)$$

となるが, 任意の x にたいし $1 - x^2 + x^4 > 3/4$ なので, $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$ が上の代数方程式の解である.

つまり最適解の候補者として

$$(付録 A.6) \quad (x, y, \lambda) = (0, 0, 0), (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}, 0)$$

が得られたが, これらはいずれも (A.4) を満たしている.

Step 2. 次に $5 - x^2 - y^2 = 0$ とする.

まず λ を消去するため, “(A.2) $\times y$ - (A.3) $\times x$ ” を計算する.

$$\begin{aligned} 0 &= (A.2) \times y - (A.3) \times x = (2y(x - y) - 2x^3y) - (-2x(x - y) - 2xy^3) \\ &= 2(x - y)(x + y)(1 - xy) \end{aligned}$$

これより, $x = y$, $x = -y$, $1 = xy$ の解が得られた.

Case 1 $x = y$ とする. $x^2 + y^2 = 5$ と合わせると,

$$(付録 A.7) \quad x^2 + y^2 = 2x^2 \Rightarrow (x, y) = (\pm\sqrt{5/2}, \pm\sqrt{5/2})$$

一方 “(A.2) + (A.3)” より

$$\lambda(x + y) = -2x^3 - 2y^3 = -2(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

ここで (A.7) にたいしては, $x + y \neq 0$, $x \neq 0$ である. すると $\lambda = -2(x^2 - xy + y^2) < 0$ となるので, (A.4) に反し, (A.7) は最適解の候補者ではない.

Case 2 $x = -y$ とする. (A.7) と同様の計算で

$$(付録 A.8) \quad (x, y) = (\pm\sqrt{5/2}, \mp\sqrt{5/2}).$$

一方 (A.2) - (A.3) より

$$\lambda(x - y) = 4(x - y) - 2(x^3 - y^3) = 2(x - y)(2 - (x^2 + xy + y^2))$$

(A.8) にたいしては, $x - y \neq 0$ だから,

$$(付録 A.9) \quad \lambda = 2(2 - (x^2 + xy + y^2))$$

ところがこの式に (A.8) を代入すると, $\lambda = -1$ となり, (A.4) に反する. よって (A.8) は最適解の候補者ではない.

Case 3 $xy = 1$ とする.

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 2 = 7, \\ (x - y)^2 &= x^2 + y^2 - 2xy = 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

となるので,

$$(付録 A.10) \quad \begin{aligned} x + y &= \pm\sqrt{7}, \quad x - y = \pm\sqrt{3} \\ \Rightarrow (x, y) &= \left(\frac{\sqrt{7} \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{7} \mp \sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{-\sqrt{7} \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{7} \mp \sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

ここで, (A.10) にたいしては, $x - y \neq 0$ だから, やはり (A.9) が成立している. ところが, (A.9) に (A.10) を代入すると, $\lambda = -8$ となり, (A.4) に反する. よって (A.10) は最適解の候補者ではない.

Step 3. 結局 (A.6) の組み合わせだけが, 最適解の候補者として残った.

$$f(x, y) \equiv 2(x - y)^2 - x^4 - y^4$$

に (A.6) を代入し,

$$f(0, 0) = 0, \quad f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8$$

を得る.

これより 最適解は $(x^*, y^*, \lambda^*) = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}, 0)$ であり, 最適値は 8 である. $\square$

練習問題 付録 A.4. 次の不等式制約条件付き最適化問題を解け.

(i) $\max(x^2 + y^2)$ subject to $x^2 + 2y^2 \leq 4$ and $x \leq 1$.

[ヒント]: ラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + \lambda_1(4 - x^2 - 2y^2) + \lambda_2(1 - x).$$

(ii) $\max(xy)$ subject to $2x + y^2 \leq 3$ and $x \geq 0$.

(iii) $\max(2x - y)$ subject to $x^2 - y \leq 1$ and $x \geq 0$.

解答 (i) ヒントよりラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + \lambda_1(4 - x^2 - 2y^2) + \lambda_2(1 - x)$$

だから, $\lambda \geq 0$ として,

$$\begin{aligned}(a) \quad & 0 = L_x(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 2x - 4\lambda_1 x - \lambda_2 \\(b) \quad & 0 = L_y(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 2y - 4\lambda_1 y \\(c) \quad & 0 \leq L_{\lambda_1}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 4 - x^2 - 2y^2 \\(d) \quad & 0 = \lambda_1 L_{\lambda_1}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1(4 - x^2 - 2y^2) \\(e) \quad & 0 \leq L_{\lambda_2}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 1 - x \\(f) \quad & 0 = \lambda_2 L_{\lambda_2}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2(1 - x)\end{aligned}$$

(e) より $x \leq 1$ に注意する. (f) から, $\lambda_2 = 0$ or $x = 1$ である.

Case 1. $\lambda_2 = 0$ のとき, (a) より $x(1 - \lambda_1) = 0$ なので, $x = 0$ or $\lambda_1 = 1$ である.

(i) $x = 0$ のとき (d) より, $\lambda_1(2 - y^2) = 0$ だから $\lambda_1 = 0$ or $y = \pm\sqrt{2}$.

○ $\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ (b) より $y = 0$.

○ $y = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ (b) より $\lambda_1 = 1/2$.

(ii) $\lambda_1 = 1$ のとき (b) より $y = 0$, (d) に λ_1, y の値を代入して, $x = -2$ ($x \leq 1$).

Case 2. $x = 1$ のとき, (d) より $\lambda_1(3 - 2y^2) = 0$. これより $\lambda_1 = 0$ or $y = \pm\sqrt{3/2}$ である.

(i) $\lambda_1 = 0$ のとき, (a) より $\lambda_2 = 2$, (b) より $y = 0$.

(ii) $y = \pm\sqrt{3/2}$ のとき, (b) より $\lambda_1 = 1/2$, (a) より $\lambda_2 = 1$.

以上より,

$$\begin{aligned}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = & (0, 0, 0, 0, 0), (0, \pm\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 0), (-2, 0, 1, 0), \\ & (1, 0, 0, 2), (1, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 1/2, 1)\end{aligned}$$

が最適解の候補者である. これを実際に $f(x, y)$ に代入し

$$(x^*, y^*) = (\pm 2, 0)$$

が最適解, 最適値は 4 である.

(ii) ラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = xy + \lambda(3 - 2x - y^2)$$

だから, $\lambda \geq 0$ として,

$$\begin{aligned}(a) \quad & 0 = L_x(x, y, \lambda) = y - 2\lambda \\(b) \quad & 0 = L_y(x, y, \lambda) = x - 2\lambda y \\(c) \quad & 0 \leq L_\lambda(x, y, \lambda) = 3 - 2x - y^2 \\(d) \quad & 0 = \lambda L_\lambda(x, y, \lambda) = \lambda(3 - 2x - y^2)\end{aligned}$$

さらに $x \geq 0$ であることに注意する. (a) より $y = 2\lambda$ を (b) に代入すると $x = 4\lambda^2$ が得る. これらを (d) に代入すると, λ だけの式を得られる:

$$\lambda(3 - 2(4\lambda^2) - 4\lambda^2) = 0.$$

これを变形して,

$$\lambda(1-2\lambda)(1+2\lambda) = 0.$$

$\lambda \geq 0$ を考慮すると, $\lambda = 0$ or $\lambda = 1/2$ である.

Case 1. $\lambda = 0$ のとき, (a) より $y = 0$, (b) に λ, y の値を代入すると $x = 0$ を得る.

Case 2. $\lambda = 1/2$ のとき, (a) より $y = 1$, (b) に λ, y の値を代入すると $x = 1$ を得る.

いずれの場合も $x \geq 0$ を満たす. 従って,

$$(x, y, \lambda) = (0, 0, 0), (1, 1, 1/2)$$

が最適解の候補者である. これを実際に xy に代入し

$$(x^*, y^*) = (1, 1)$$

が最適解, 最適値は 1 である.

(iii) ラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 2x - y + \lambda_1(1 - x^2 + y) + \lambda_2 x$$

である.

$$(付録 A.11) \quad L_x(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 2 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0,$$

$$(付録 A.12) \quad L_y(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = -1 + \lambda_1 = 0,$$

$$(付録 A.13) \quad L_{\lambda_1}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 1 - x^2 + y \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0,$$

$$(付録 A.14) \quad L_{\lambda_2}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0,$$

$$(付録 A.15) \quad \lambda_1(1 - x^2 + y) = 0, \quad \lambda_2 x = 0.$$

まず (A.15) より次の分類が得られる:

$$\text{Case 1: } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \quad \text{Case 2: } 1 - x^2 + y = 0, \lambda_2 = 0,$$

$$\text{Case 3: } \lambda_1 = 0, x = 0, \quad \text{Case 4: } 1 - x^2 + y = 0, x = 0$$

ところが (A.12) より Case 1 および Case 3 は不可能. 残された Case 2, Case 4 を考える.

Case 2. $1 - x^2 + y = 0, \lambda_2 = 0$ の場合.

(A.12) より $\lambda_1 = 1$. すると (A.11) より $x = 1$, さらに $y = 0$ となる. つまり最適解の候補者は

$$(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (1, 0, 1, 0).$$

Case 4. $1 - x^2 + y = 0, x = 0$ の場合.

すぐに $y = 1$ が判る. また (A.11) から $\lambda_2 = -2$ となる. これは (A.14) に反する.

結局, 最適解は

$$(付録 A.16) \quad (x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (1, 0, 1, 0).$$

であり, 最適値は 2 である.

ここで (A.16) が本当に最適値かどうかを確かめよう. p, q を微少な量として, 最適解 (A.16) x^*, y^*, z^* の近傍

$$x = 1 + p, \quad y = 0 + q$$

での $f(x, y) = 2x - y$ の値を調べる. ここで 制約条件を考えると,

$$\begin{aligned} x^2 - y \leq 1 &\Rightarrow (1 + p)^2 - q \leq 1 \Rightarrow 2p - q \leq -p^2, \\ x \geq 0 &\Rightarrow 1 + p \geq 0 \Rightarrow p \text{ は正負の値をとれる} \end{aligned}$$

が成立している. これを考慮すると

$$f(1 + p, 0 + q) = 2(1 + p) - q = 2 + 2p - q = f(1, 0) + 2p - q \leq f(1, 0) - p^2 \leq f(1, 0)$$

となる. 従って, (A.16) が最適解である. $\square$