

解析学

2007/07/10, 西岡¹

<http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/~nishioka/>

他の学問と数学とは,

対象が抽象的, 論理のみで構成する

という大きな違いがある. それ故, 数学は広い応用範囲を持つが, 一方で厳密な論理を欠くと結論を誤る. しかもその誤りを発見しにくい.

解析学が根底としているものは, “実数” である. 実数論の厳密は議論なしでは, 自己矛盾のない解析学を構築できない.

1 実数—復習

I. 整数 $\mathbf{Z}$ は既知とする. 有理数 $\mathbf{Q}$ とは

$$\frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0$$

の全体をいう. $\mathbf{Q}$ は次の性質を備えている²:

$$(1.1) \quad a, b \in \mathbf{Q} \Rightarrow a + b, a - b, a \times b \in \mathbf{Q}, \quad b \neq 0 \text{ なら } a/b \in \mathbf{Q},$$

$$(1.2) \quad a, b \in \mathbf{Q} \Rightarrow a < b, a = b, a > b \text{ のどれかが成立,}$$

$$(1.3) \quad a, b \in \mathbf{Q}, a < b \Rightarrow a < c < b \text{ となる } c \in \mathbf{Q} \text{ が存在する.}$$

ただし, 有理数列 $\{a_n\} \subset \mathbf{Q}$ が

$$(1.4) \quad \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ にたいし, ある } N \text{ があり, } m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| \leq \varepsilon$$

であっても³, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が $\mathbf{Q}$ のなかで見つかるとは限らない. そこで, “(1.4) をみたす全ての有理数列の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ” を $\mathbf{Q}$ に付け加えたものを **実数 $\mathbf{R}$** とする.

II. こうやって得られた実数 $\mathbf{R}$ は, 有理数 $\mathbf{Q}$ を拡大したものだが, 次の性質を持っている;

$$(1.5) \quad \mathbf{Q} \text{ を } \mathbf{R} \text{ に置き換えた (1.1) – (1.3) が成立,}$$

$$(1.6) \quad \text{実数列 } \{a_n\} \subset \mathbf{R} \text{ が (1.4) を満たせば, 必ず } \lim_n a_n \in \mathbf{R}.$$

この最後の性質 (1.6) は “実数の完備性” と呼ばれる.

¹ nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp 2 号館 11 階 38 号室

² (1.1) の性質を **可換性**, (1.2) を **線形順序性**, (1.3) を **稠密性** と呼ぶ.

³ (1.4) をみたす数列を **基本列** と呼ぶ.

2 関数—復習

実数のある部分集合 $D \subset \mathbf{R}$ に属する数 x にたいし、ある数 $f(x)$ **ただ一つ** 対応するとき、その対応を **関数** と呼ぶ。

I. D 内部の点 x_0 にたいし、 $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in D} f(x) = a$ であるとき、“関数 f は x_0 で極限 a をもつ”という⁴。

—— 上級向けの注意 ——

極限という言葉は、数列 $\{a_n\}$ に対してよく使われるが、実は関数に対する物と同じである：

命題 2.1. 関数 f が x_0 で極限 a をもつ。

$\Leftrightarrow \{x_n\}$ を D に含まれる数列とする。すべての n で $x_n \neq x_0$ かつ $\lim_n x_n = x_0 \in D$ なら、 $\lim_n f(x_n) = a$. $\diamond$

これにより、関数の極限は (基礎数学で勉強した) 数列の極限に帰着することが判った。

II. 関数 f が x_0 で極限值 a をもち、しかも $f(x_0) = a$ のとき、“ f は $x = x_0$ で連続”といい、 D の全ての点 x で連続な関数を“ D で連続な関数”という。

—— 上級向けの注意 ——

注意 2.2. 極限值と連続の定義を ε - δ 論法を使って厳密に述べてみよう。

(i) “関数 f は x_0 で極限 a をもつ”とは、任意の $\varepsilon > 0$ にたいし、ある $\delta > 0$ があり、

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - a| \leq \varepsilon$$

となる事である。

(ii) “関数 f は $x = x_0$ で連続”とは、任意の $\varepsilon > 0$ にたいし、ある $\delta > 0$ があり、

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

となる事である。 $\diamond$

連続関数はいろいろ都合の良い性質を備えている：

定理 2.3 (中間値の定理). 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) < f(b)$ を満たしている。このとき $a < c < b$ である任意の c にたいし、 $f(x) = c$ となる $x \in (a, b)$ が存在する。 $\diamond$

⁴ ここで $f(x_0)$ の値と a にはなんの関係も無いことを注意せよ。

3 微分—復習

I. 微分は, “Newton が質点の運動を研究するために考案した” とされている.

f を D で定義された関数とする. D の内部の点 x_0 にたいし,

$$(3.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

が存在するとき, “ f は x_0 で微分可能” と言い,

$$(3.1) = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

と記述する. $f'(x_0)$ を $x_0 \in D$ の関数と見たとき, “ f の導関数” と呼ぶ.

注意 3.1. 微分可能な関数と連続関数とのギャップは大きく, 至る所で微分が出来ないが連続な関数が存在する. $\diamond$

定理 3.2. f を 区間 $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能な関数とする.

(i) (**Rolle の定理**) $f(a) = 0 = f(b)$ なら, $f'(c) = 0$ となる点 $c \in (a, b)$ がある.

(ii) (**平均値の定理**) 次を満たす点 $z \in (a, b)$ がある:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z). \quad \diamond$$

平均値の定理を使うと数学では許されない $0/0$ の計算が出来ることがある.

定理 3.3 (ロピタル). 関数 f, g を 定理 3.2 の条件をみたすものとする. $f(a) = 0 = g(a)$, $g'(a) \neq 0$ とすると,

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b)}{g'(b)}. \quad \diamond$$

II. 関数 f の導関数 $f'(x)$ にたいし, その微分と導関数 $f''(x)$ を考えることができる. $f''(x)$ を 2 階微分 / 2 階導関数と呼ぶ. さらに 3 階微分 f''' , さらには n 階微分 $f^{(n)}$ も考えることが出来る. この高階微分の重要な応用として, Taylor 展開がある.

定理 3.4 (Taylor 展開—重要). 関数 f は 区間 (a, b) で $n + 1$ 階まで微分可能をする. 点 $c, x \in (a, b)$ にたいし, 次が成立: ある点 y があり

$$(3.2) \quad f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_{n+1},$$

ここで, $|y - c| < |x - c|$ であり $R_{n+1} \equiv \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}. \quad \diamond$

4 いろいろな関数—復習

I. f, g を D で定義された関数とする.

(i) g のとる値が D に属しているとき, 新しい関数 $f(g(x))$ が得られる. これを f と g との**合成関数**と呼ぶ. 合成関数の微分は, つぎの通り:

$$(f(g(x)))' = f(g(x))' g'(x).$$

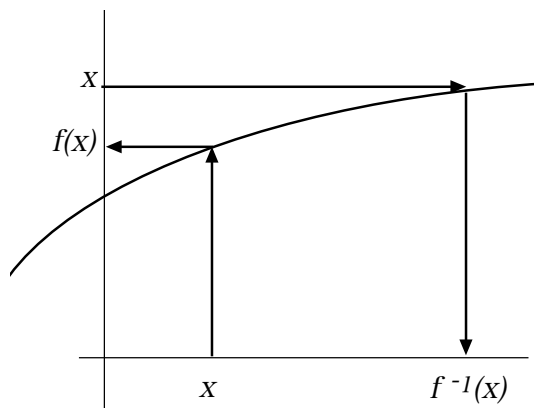
(ii) ある $E \subset \mathbf{R}^1$ があり, $x \in E$ に対しては常に

$$f(y) = x$$

となる $y \in D$ が**唯一つ**存在するとき, この y を $f^{-1}(x)$ と書き,

$$f^{-1}(x), \quad x \in E$$

を f の**逆関数**と呼ぶ.



逆関数の微分は, つぎの通り:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f(x))}.$$

II. 代表的な初等関数を列挙する:

(i) 代数関数: $a(a \neq 0)$ を実定数として $f(x) \equiv x^a, x \in \mathbf{R}^1$. $f'(x) = \begin{cases} ax^{a-1} & a \neq 1 \\ 1 & a = 1. \end{cases}$

(ii) 指数関数: $f(x) \equiv e^x, x \in \mathbf{R}^1$. ここで, $e \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182 \dots$ はネイピア数.

$$f'(x) = e^x = f(x),$$

(4.1) (0 を中心とした Taylor 展開) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

(iii) 対数関数: 指数関数 e^x の逆関数. $x > 0$ に対して定義され, $f(x) = \log x$ と記述する.

$$\left(\log x\right)' = \frac{1}{x},$$

(4.2) (1 を中心とした Taylor 展開) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots$

(iv) 三角関数: $\sin x, \cos x$.

$$\left(\sin x\right)' = \cos x, \quad \left(\cos x\right)' = -\sin x,$$

(4.3) (0 を中心とした Taylor 展開) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$

(4.4) (0 を中心とした Taylor 展開) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

III. Taylor 展開 (4.1), (4.2) を使うと, 複素数にたいして, 指数関数, 対数関数が定義出来る:
 a, b を実数, i を虚数単位とする.

$$\exp\{a + ib\} = \exp\{a\} (\cos b + i \sin b),$$

$$\log(a + ib) = \log(\sqrt{a^2 + b^2}) + i\theta$$

$$\text{ここで } \theta \text{ は次の実数: もし } a \neq 0 \text{ なら } \tan \theta = \frac{b}{a}; \text{ もし } a = 0 \text{ なら } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

同様に (4.4), (4.3) を使って, 三角関数を複素数にたいして定義できる:

$$(4.5) \quad \cos ib = \frac{\exp\{b\} + \exp\{-b\}}{2}.$$

ここで (4.5) の右辺は, **hyperbolic cosine 関数** と呼ばれ, $\cosh b$ と表記される.

$$(4.6) \quad \sin ib = i \frac{\exp\{b\} - \exp\{-b\}}{2}.$$

ここで (4.6) の右辺を i で割った関数は, **hyperbolic sine 関数** と呼ばれ, $\sinh b$ と表記される.

5 2 変数関数

5.1 距離と領域

2次元平面 $\mathbf{R}^2$ の2点 $P = (x, y)$, $Q = (a, b)$ の **距離** $\rho(P, Q)$ を

$$\rho(P, Q) \equiv \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

で定義する. 点 $P = (x, y) \in D$ にたいし, 部分集合

$$(5.1) \quad B_\varepsilon(P) \equiv \{Q \in \mathbf{R}^2 : \rho(P, Q) < \varepsilon\} \subset \mathbf{R}^2$$

を“ P を中心とした半径 ε の**球**”と呼ぶ.

注意 5.1. 一般に $\mathbf{R}^n$ の点 $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ と点 $Q = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ の距離としては,

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \rho(P, Q) &\equiv \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}, \\ \rho^*(P, Q) &\equiv \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|, \dots, |x_n - a_n|\}, \\ \rho^\dagger(P, Q) &\equiv |x_1 - a_1| + \frac{1}{2}|x_2 - a_2| + \dots + \frac{1}{2n}|x_n - a_n| \end{aligned}$$

等があるが, どれも同値である. ただし, ρ^* と $\rho^\dagger$ は無限次元空間に拡張できる. $\diamond$

$D \subset \mathbf{R}^2$ を領域という. ある数 $K > 0$ にたいし, D が原点を中心とした半径 K の球に含まれる, i.e.

$$D \subset B_K(0)$$

となるとき, “ D を**有界な領域**”という.

5.2 2変数関数

$\mathbf{R}^2$ の領域 D において,

$$f : (x, y) \in D \rightarrow \mathbf{R}^1$$

という関係を “ D で定義された実数値関数 f ” という.

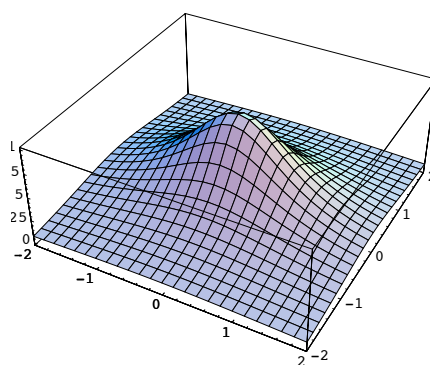
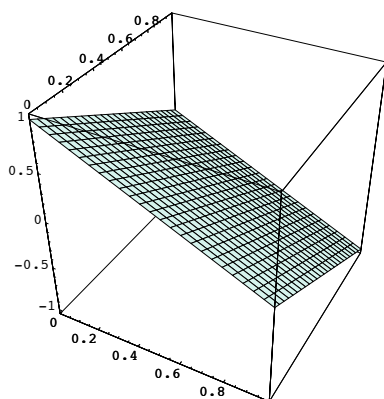
2変数関数 $f(x, y)$ の視覚的な意味は, 3次元空間 $\mathbf{R}^3$ の図形である. 領域 D で定義された $f(x, y)$ にたいし

$$G = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

を f のグラフという.

例 5.2. (i) $f(x, y) = -x - y + 1$, $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ のグラフは下図の左側の平面である.

(ii) $g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$, $D = \{-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$ のグラフは下図の右側の曲面である.



5.3 関数の極限

定義域 D の関数 $f(P)$ にたいし, 点 $P = (x, y)$ が D 内のいかなる路を通して点 $Q = (a, b)$ に近づいても

$$\lim_{P \rightarrow Q} f(P) = \alpha$$

が存在するとき, “ f は点 Q で極限值 α を持つ” という. ここで, $P = (x, y) \rightarrow (a, b) = Q$ は, (5.2) で与えられた ρ にたいし $\rho(P, Q) \rightarrow 0$ を意味するが, 点 P が点 Q に近づく方法は無数にあることを注意する.

例 5.3. $(x, y) \neq (0, 0)$ で定義された関数

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^4}}$$

は $Q = (0, 0)$ で極限值 0 を持つ.

[解答] $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^4}$ だから

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^4}} - 0 \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^4}} \cdot |y| \leq |y| \rightarrow 0 \quad \text{as } (x, y) \rightarrow (0, 0). \quad \square$$

例 5.4. $(x, y) \neq (0, 0)$ で定義された関数

$$g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^4}}$$

は $Q = (0, 0)$ で極限値を持たない.

[解答] x 軸に沿って点 P を $Q = (0, 0)$ に近づけると,

$$y = 0 \text{ だから } g(x, 0) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = |x| \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow 0.$$

一方, y 軸に沿って点 P を $Q = (0, 0)$ に近づけると,

$$x = 0 \text{ だから } g(0, y) = \frac{y^2}{\sqrt{y^4}} = 1 \rightarrow 1 \quad \text{as } y \rightarrow 0.$$

となり, 点 $P = (x, y)$ が $Q = (0, 0)$ に近づく経路によって $\lim_{P \rightarrow Q} g(P)$ の値が異なる. よって極限値は存在しない. $\square$

5.4 連続関数

領域 D で定義された関数 $f(P)$ が点 $Q = (a, b) \in D$ で連続とは,

$$\lim_{P \rightarrow Q} f(P) = f(Q)$$

となることである.

[興味を持つ人のために:1] 多変数関数の連続の定義を $\varepsilon - \delta$ 論法を使って厳密に述べてみよう.

$P = (x, y)$ を関数 f の定義域 D 内の点とする. f が点 $Q = (a, b) \in D$ で連続とは, 任意の $\varepsilon > 0$ にたいし, ある $\delta > 0$ があり,

$$\rho(P, Q) \equiv \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(P) - f(Q)| < \varepsilon$$

[興味を持つ人のために:2] 多変数関数も, 1 変数関数の場合と同様に都合の良い性質を備えている:

定理 5.5 (最大値, 最小値). 有界閉領域 D で連続な関数 $f(P)$ は D で最大値と最小値をとる. $\diamond$

定理 5.6 (中間値の定理). 関数 $f(P)$ は領域 D で連続. 任意にとった 2 点 $Q, R \in D$ で $f(Q) < f(R)$ のとき, $f(Q) < c < f(R)$ となる任意の数 c にたいし, $f(S) = c$ となる点 $S \in D$ が存在する. $\diamond$

5.5 偏微分

f を領域 D で定義された連続関数とする.

$$(5.3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

が存在するとき, “ f は点 (x_0, y_0) で x 偏微分可能” といい,

$$(5.3) = f_x(x_0, y_0) \quad (= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ とも表示する})$$

と表す. さらに, この $f_x(x_0, y_0)$ を “ f の x 偏導関数” と呼ぶ. 同様に,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \equiv f_y(x_0, y_0) \quad (= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ とも表示する})$$

が存在するとき, “ f は点 (x_0, y_0) で y 偏微分可能” といい, この極限值 $f_y(x_0, y_0)$ を “ f の y 偏導関数” と呼ぶ

注意 5.7. 大雑把に言えば, 偏微分しようとする変数以外は定数と考えて微分することが偏微分である. そのため 1 変数の場合の微分公式が, そのまま偏微分にも適用できる.

例 5.8. (i) 2 変数関数 $z = f(x, y)$ と 2 変数関数 $x = g(u, v), y = h(u, v)$ の合成関数 $f(g(u, v), h(u, v))$ の偏微分について, 次の式が成立する.

$$(5.4) \quad \frac{\partial f}{\partial u} = f_x(x, y) g_u(u, v) + f_y(x, y) h_u(u, v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = f_x(x, y) g_v(u, v) + f_y(x, y) h_v(u, v).$$

[興味を持つ人のために] (ii) 2×2 行列

$$(5.5) \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv \begin{pmatrix} g_u(u, v) & h_u(u, v) \\ g_v(u, v) & h_v(u, v) \end{pmatrix}$$

を使うと⁵, (5.4) は行列の記法を使って

$$\begin{pmatrix} f_u(u, v) \\ f_v(u, v) \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{ただし } x = g(u, v), y = h(u, v)$$

と表せる.

⁵ (5.5) の行列式を **ヤコビ行列式 (ヤコビアン)** と言い, 多変数関数の積分で重要な役割を果たしている.

5.6 高階偏微分

1 変数の場合と同様, 偏微分でも “偏導関数の偏微分” を考えることが出来る.

$$(5.6) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_x(x, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{x - x_0} = f_{xx}(x_0, y_0) \quad (= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \text{ とも表示する}).$$

これ以外にも

$$(5.7) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0} = f_{xy}(x_0, y_0), \quad (= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \text{ とも表示する}).$$

$$(5.8) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_y(x, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{x - x_0} = f_{yx}(x_0, y_0), \quad (= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \text{ とも表示する}).$$

$$(5.9) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_y(x_0, y) - f_y(x_0, y_0)}{y - y_0} = f_{yy}(x_0, y_0) \quad (= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \text{ とも表示する}).$$

などの “2 階偏微分” および “2 階偏導関数” がある.

注意 5.9. ここで (5.7) と (5.8) は偏微分の順序が異なるが, 適当な条件の下では同じになる.

命題 5.10. 関数 f の偏導関数 $f_{xy}(x, y)$, (5.7) と $f_{yx}(x, y)$, (5.8) が領域 D で共に存在し, 連続である. このとき, 両者は一致する. $\diamond$

この議論を何度も繰り返すと 自然数 m, n にたいし

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m}(x, y), \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x, y), \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x, y)$$

という “高階偏微分と高階偏導関数” を考えることができる. さらに 命題 5.10 と類似した結果が成立する.

6 偏微分の応用

6.1 テイラーの定理

1 変数関数の場合と同様, 2 変数関数にも テイラーの定理がある.

定理 6.1 (テイラーの定理). 関数 $f(x, y)$ はある領域 D で定義され, そこで $n+1$ 階までの偏導関数が存在している. 点 $P = (a, b) \in D$ と 数 h, k は (5.1) にたいし

$$B_\varepsilon(P) \subset D, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{h^2 + k^2}$$

を満たしている. このとき, ある $0 < \theta < 1$ にたいし, 次の等式が成立する:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(a, b) + R_{n+1},$$

$$R_{n+1} \equiv \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k).$$

ただし

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(a, b) = \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} h^{m-\ell} k^\ell \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-\ell} \partial y^\ell}(a, b)$$

である. $\diamond$

6.2 極値

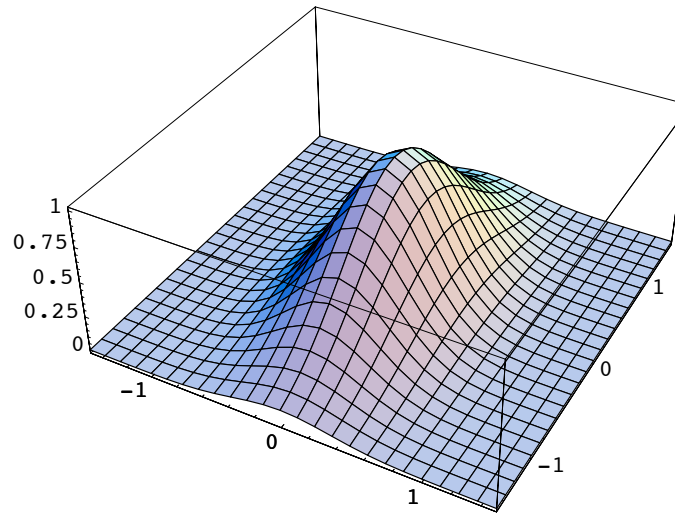
領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y)$ が点 $P = (a, b)$ で極大値をとるとは、ある $\varepsilon > 0$ があり

$$f(a, b) \geq f(x, y), \quad (x, y) \in B_\varepsilon(P).$$

一方、点 $P = (a, b)$ で極小値をとるとは、ある $\varepsilon > 0$ があり

$$f(a, b) \leq f(x, y), \quad (x, y) \in B_\varepsilon(P).$$

注意 6.2. イメージとしては立体地図を考えればよい。関数 f の値は標高だから、極大値をとる点 P は山頂になる。



関数 f は連続な 2 階偏導関数を持つとし、 2×2 行列式⁶を

$$(6.1) \quad H(x, y) \equiv \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

で定義する。

定理 6.3. 関数 $f(x, y)$ はある領域 D で定義され、そこで 2 階までの連続な偏導関数が存在している。

(i) 関数 f が点 $P = (a, b) \in D$ で極値をとるなら、

$$(6.2) \quad f_x(a, b) = 0 \quad f_y(a, b) = 0.$$

(ii) 逆に、関数 f はある点 $P = (a, b)$ で (6.2) を満たしている。

(a) $H(a, b) > 0$, $f_{xx}(a, b) > 0$ ⁷ なら、 f は点 P で極小値をもつ。

(b) $H(a, b) > 0$, $f_{xx}(a, b) < 0$ なら、 f は点 P で極大値をもつ。

⁶ ヘッセの行列式と呼ばれる。

⁷ (a) と (b) で、 $f_{xx}(a, b)$ を $f_{yy}(a, b)$ で代用してもよい。

(c) $H(a, b) < 0$ なら, 点 P は f の極値ではない.

(d) $H(a, b) = 0$ なら, これだけでは極値かどうか判定できない. $\diamond$

例 6.4. $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ の極値を求める.

Step 1. まず

$$f_x(x, y) = y(1 - y^2 - 3x^2), \quad f_y(x, y) = x(1 - x^2 - 3y^2)$$

だから, $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$ を同時に満たす点

$$(0, 0), \quad (\pm 1, 0), \quad (0, \pm 1), \quad \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$$

という 9 個の点が極値の候補である.

Step 2. $f_{xx}(x, y) = -6xy = f_{yy}(x, y), f_{xy}(x, y) = 1 - 3x^2 - 3y^2$ だから,

$$H(x, y) = 36x^2y^2 - (1 - 3x^2 - 3y^2)^2$$

である. これより 4 個の点 $(1/2, \pm 1/2), (\pm 1/2, 1/2)$ だけで $H > 0$ となり,

$$f_{xx}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = f_{xx}\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{3}{2}, \quad f_{xx}\left(\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right) = f_{xx}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}$$

と計算できる. 結局, f は $(1/2, 1/2), (-1/2, -1/2)$ で極大値, $(1/2, -1/2), (-1/2, 1/2)$ で極小値をとる. $\diamond$