数理ファイナンスの基礎

西岡 國雄

はじめに

1970 年代頃から, 米国の金融機関では金融派生商品 (derivatives) が売買されるようになった. 金融派生商品は, 株式・債券・通貨など本来の金融商品から派生した商品で, その価格変動を数値化して取引の対象とするものである.

本来は価格変動によるリスク回避の手段として開発されたが, 最近では金融派生商品自体を投機対象とする投資顧問会社 (=ヘッジ・ファンド) による取引が拡大している. 実際, 代表的な金融派生商品であるオプションの取引は巨額にのぼり, 想定投資金額は 50 兆ドル以上といわれ, 一国の経済活動にも大きな影響を及ぼすようになっている[1].

金融派生商品の公式な取引は, 1973 年米国のシカゴ取引所で最初に行われた. 日本でも 1988 年 5 月の証券取引法改正で株式への導入が認められ, "日経 225 ""日経 300 ""TOPIX "等の先物取引やオプション[2]がある.

これらの金融派生商品は実際に販売されているので,「その販売価格, なかでもオプションの販売価格をどの様に設定するか?」の理論的裏付けが 1970 年代から研究されるようになった. Merton, Black-Scholes, Cox-Ross-Rubinstein などにより行われた一連の研究は, 金融市場の変動を確率過程とみなして, "最適の投資行動とオプションの価格付け "を解析することであり, 今日 "数理ファイナンス "として数学の確固たる研究分野となっている.

とりわけ, オプションの価格を理論的に決定する公式は, Black-Scholes 式とよばれ実際の金融取引で広く使われ, ついに Merton と Scholes[3] が 1997 年に ノーベル経済学賞を受賞[4]するに至った.

---

[1] 1992 年のヨーロッパ通貨危機, 1994 年のメキシコ通貨危機, 1997 年のアジア通貨危機の一因との指摘もある.

[2] 日本では, まだ先物取引が主体で, それに比べオプション取引は少ない.

[3] F. Black は既に死去していた.

[4] 受賞スピーチが
http://www.nobel.se/economics/laureates/1997/ merton-autobio.html 及び
http://www.nobel.se/economics/ laureates/1997/Scholes-autobio.html
のウエッブサイトにある.

現代の経済活動では数理ファイナンスの問題点を避けて通ることができないので, 欧米 (最近では日本でも) の金融機関では多数の数理ファイナンス研究者を雇用している[5].

数理ファイナンスは, 確率論とりわけ“時間変動する確率現象”を対象とする確率過程論を基礎としている. そのため, 本書では確率過程論の基礎からはじめて,

- 裁定機会の不存在とマルチンゲール測度の存在が同値,
- 裁定機会の無い証券市場では, 市場の完備性とマルチンゲール測度の一意存在が同値,

という“数理ファイナンスの基礎定理”を厳密な形で証明する事を目標とした. この基本定理から, オプションの価格付けに関する“Black-Scholes 式”は容易に導かれる.

本書は筆者が東京都立大学でおこなった数学科 2 年次向けの講義“数理統計 I および II”原稿を基とした. 数学的に厳密な議論を展開しているが, まだ測度論に習熟していない数学科 2 年生を対象としたために, 本書では話題を“有限要素からなる確率空間”の場合に限った.

そのため, ここでの確率過程論の理解のためには一般の測度論を必要としない. 一方, 通常の確率空間での“数理ファイナンスの基本定理”の理解と証明には大変な準備と知識が必要である上, 現段階ではまだ完全な結果は得られていない.

最後になりますが, 本書の出版に際し, 下記の方々から多大の助力を頂きました. ここに氏名を記し, 感謝の意を表します:

東京都立大学大学院 理学研究科 数学専攻の大学院生: 波止元 仁,
下山 由貴子, 矢吹 琢己, 丹羽 和範, 中村 真人, 田中 賢,
同研究員: 上野 敏秀.

2004 年春

西岡 國雄

[5] ちなみに筆者の研究仲間でも, 幾人もが銀行/信託会社に所属している.

記 号

$I_A(w) \equiv \begin{cases} 1 & w \in A \\ 0 & w \notin A \end{cases}$	集合 A の特性関数，1
$\mathbf{R}^d$	d-次元ユークリッド空間
Ω	事象空間，1
W	事象空間，11
$\mathcal{F}$	べき集合族，1
$\mathcal{M}$	加法族，2
$\mathfrak{B}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{B}(n)$	族基底，3
$\mathcal{A}[\mathfrak{B}_{\mathcal{M}}]$	族基底 $\mathfrak{B}_{\mathcal{M}}$ から 生成される加法族，3
$\mathbf{P}$	確率測度，2
$\mathbb{F} \equiv \{F(n) : n = 0, \cdots, N\}$	フィルター, 増大情報系，6
$\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P}\big)$	フィルター付き確率空間，6
$X(w), Y(w), \cdots$	確率変数，7
$\mathbf{E}^P[\ \cdot\ ], \mathbf{E}[\ \cdot\ ]$	確率測度 $\mathbf{P}$ による平均，7
$Var[X]$	確率変数 $X(w)$ の分散，9
$\mathbf{P}[\ \cdot\ /\mathcal{F}(n)](w)$	条件付き確率，19
$\mathbf{E}[\ \cdot\ /\mathcal{F}(n)](w)$	条件付き平均，21
$\{X_n(w)\}, \{Y_n(w)\}, \cdots$	離散確率過程，27
$\mathbb{F}$-適合	27
$\{M_n(w)\}$	マルチンゲール，28
$\{Y_n(w)\}$	予測可能な離散確率過程，28
$\{T_n(w)\}$	ベルヌイ・ランダム・ウォーク，29

$\sum Y_k(w)\,\Delta M_k(w)$	確率積分，37
$G_n(w;M), G_n(w;N), \cdots$	指数関数マルチンゲール，46
A_F	債券の額面価格，49
r	債券の年利，49
A_P	債券の売買価格，49
γ	債券の収益率，49
$\{B_n(w), S_n(w)\}$	証券市場，57
$B_n(w)$	時刻 n での債券価格を表す離散確率過程，57
$S_n(w)$	時刻 n での株価を表す離散確率過程, 57
$S_n^d(w)$	時刻 n の株価の現在価値，59
$\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\cdots$	ポートフォリオ，58
$X_n^B(w)$	ポートフォリオ $\mathbb{X}$ で時刻 n での債券保有量，58
$X_n^{\mathrm{S}}(w)$	ポートフォリオ $\mathbb{X}$ で時刻 n での株式保有量，58
$V_n(w;\mathbb{X})$	ポートフォリオ $\mathbb{X}$ による時刻 n での資産，58
$V_n^d(w;\mathbb{X})$	ポートフォリオ $\mathbb{X}$ による資産の現在価値，59
$\mathbf{Q}$	マルチンゲール測度，62
$F(w)$	オプションの価値，62
$\mathbb{U}(F(w), C_0)$	64
$(F(w), C_0)$-複製ポートフォリオ	64
C_F	オプションの適正販売価格，64
$\mathbf{H}$	Hilbert 空間, 89
$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$	内積，88
$\|\|\,\cdot\,\|\|$	ノルム，88

第1章　確率の基礎理論

今後の議論で必要となる確率論の基礎を述べるが, 確率過程と呼ばれる“時間と共に変化する確率現象”を扱うことを念頭に置いて解説する. 時間と共に変化する確率現象”では得られた情報がどの時刻までのものか特定することが重要であり, フィルターや条件付き確率の概念が導入された.

1.1　フィルター付き確率空間

本書では集合 $A \subset \Omega$ にたいし, その特性関数を

$$I_A(w) \equiv \begin{cases} 1 & w \in A \\ 0 & w \notin A \end{cases}$$

と定義し, 今後は記号 $I_A(w)$ を説明抜きで使用する.

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を考える. まず確率空間を構成する Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbf{P}$ の意味を説明しよう.

Ω は**事象空間 sample space** といい, 本書では有限個の要素

$$\Omega = \{w^1, w^2, \cdots, w^L\} \tag{1.1}$$

からなる“ある集合”であり, 取り上げる問題に適した集合を Ω としてその都度選ぶ[1]. また Ω の要素を特定する必要が無い場合には, 単に $w \in \Omega$ とも表記する.

$\mathcal{F}$ は, Ω の**べき集合族** (= すべての部分集合の集まり) である. つまり

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, w^1, \cdots, w^L, w^1 \cup w^2, \cdots, w^1 \cup w^2 \cup w^3, \cdots, \Omega\}. \tag{1.2}$$

[1] §1.3, 定義 1.17 を参照.

という 2^L 個の部分集合の集まりである.

一般には, $(\Omega, \mathcal{F})$ の $\mathcal{F}$ は加法族と呼ばれる集合族なら, どんなものでも良い. そこで加法族の定義を与えよう.

定義 1.1. **加法族** $\mathcal{M}$ とは, “Ω の部分集合 $A \subset \Omega$ の集まり (= 部分集合の集合) ”で次の条件を満たすものである;

$$\emptyset, \Omega \in \mathcal{M}, \tag{1.3a}$$

$$A \in \Omega \ \Rightarrow A^c \equiv \Omega - A \in \mathcal{M}, \tag{1.3b}$$

$$A^k \in \mathcal{M}, k = 1, \cdots, n \ \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A^k \in \mathcal{M}, \ \bigcap_{k=1}^{n} A^k \in \mathcal{M}. \quad \diamondsuit \tag{1.3c}$$

注意 1.2. 我々のべき集合族 $\mathcal{F}$ が, この (1.3) の条件を全てみたしていることは, 簡単に確かめられる.　$\diamondsuit$

$\mathcal{F}$ に属する集合 A にたいして定義された集合関数 $\mathbf{P}[A] \in [0,1]$ は, 次の条件を満たすとき**確率測度 probability measure** と呼ばれる:

$$\mathbf{P}[\Omega] = 1, \tag{1.4a}$$

$$\text{すべての } A \in \mathcal{F} \text{ で} \quad \mathbf{P}[A] \geq 0, \tag{1.4b}$$

$$A^j \in \mathcal{F}, j = 1, \cdots, m. \quad i \neq j \ \text{ の場合 } \ A^i \cap A^j = \emptyset \tag{1.4c}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}[\bigcup_{j=1}^{m} A^j] = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}[A^j].$$

ここで今後の議論を簡潔にするため, (1.4b) よりさらに強い条件

$$\text{すべての空でない } A \in \mathcal{F} \text{ にたいし } \mathbf{P}[A] > 0 \tag{1.4d}$$

を仮定する.

通常, 加法族 $\mathcal{M}$ の要素は膨大な数になるので, それを全て書き下すのは困難である. そこで, 適当な集合族 $\mathfrak{B}_{\mathcal{M}} \equiv \{B^1, \cdots, B^n\}$ を上手に選べば,

$$\emptyset \notin \mathfrak{B}_{\mathcal{M}}, \tag{1.5a}$$

$$B^j, B^k \in \mathfrak{B}_{\mathcal{M}} \text{ かつ } j \neq k \ \Rightarrow \ B^j \cap B^k = \emptyset, \tag{1.5b}$$

$$
\text{空でない任意の } A \in \mathcal{M} \text{ にたいし} \\
B^{1'}, \cdots, B^{k'} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{M}} \text{ があり } A = \bigcup_{j=1'}^{k'} B^j \tag{1.5c}
$$

という良い性質を持たせる事ができる. このことを一般的に定義しよう.

定義 1.3. $\mathcal{M}$ を加法族とする. $\mathcal{M}$ のある部分集合族

$$
\mathfrak{B}_{\mathcal{M}} \equiv \{B^1, \cdots, B^n\}, \quad B^j \in \mathcal{M}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,
$$

が (1.5a) 〜 (1.5c) を満たすとき, $\mathfrak{B}_{\mathcal{M}}$ を“ $\mathcal{M}$ の**族基底**”と呼ぶ.

逆に (1.5a) 〜 (1.5c) を満たす集合族 $\mathfrak{B}$ が与えられたとき, $\mathfrak{B}$ を含む最小の加法族を

$$
\mathcal{M} = \mathcal{A}[\mathfrak{B}_{\mathcal{M}}]
$$

と表記し, “ 族基底 $\mathfrak{B}_{\mathcal{M}}$ から**生成される**加法族 ”と言う. ◇

もし任意の加法族 $\mathcal{M}$ にたいし, その族基底 $\mathfrak{B}_{\mathcal{M}}$ が存在すれば, 今後の議論で必要となる“ 条件付き確率 ”などの定義が大幅に易しくなる. ところが都合の良い事に, 族基底の存在は保証できる.

命題 1.4. 任意の加法族にたいし, その族基底が唯一つ存在する. ◇

証明 加法族 $\mathcal{M}$ を与える.

Step 1. まず $w \in \Omega$ ごとに

$$
B(w) \equiv \bigcap_{\{B' \in \mathcal{M} : B' \ni w\}} B' \tag{1.6}
$$

とおく. $\mathcal{M}$ は (1.3) を満たしているから, $\Omega \in \mathcal{M}$ である. これより, 任意の w にたいし“ $B \ni w$ となる $B \in \mathcal{M}$ ”は少なくとも一つ存在するので, (1.6) の右辺は空ではない.

つまり任意の $w \in \Omega$ にたいして, (1.6) の $B(w)$ は存在し, 加法族の性質 (1.3c) から $B(w) \in \mathcal{M}$ となる.

Step 2. (1.6) で与えられた $B(w)$ の全体 $\mathfrak{B} \equiv \{B(w) : w \in \Omega\}$ が族基底の性質 (1.5a) 〜 (1.5c) を満たすことを示す.

$B^1, B^2 \in \mathfrak{B}$ にたいし, $B^1 \cap B^2 \neq \emptyset$ とする. もし $B^1 \neq B^2$ ならば $B^1 - B^2 \neq \emptyset$ か $B^2 - B^1 \neq \emptyset$ となる. まず $B^1 - B^2 \neq \emptyset$ としよう.

すると (1.3c) より $B^1 \cap B^2 \in \mathcal{M}$ であり, しかも

$$\emptyset \neq B^1 \cap B^2 \subset B^1, \quad B^1 \cap B^2 \neq B^1$$

だから, B^1 の真部分集合である $B^1 \cap B^2$ が $\mathcal{M}$ に含まれることになる.

これは (1.6) を考えると $B^1 \in \mathfrak{B}$ に矛盾する. $B^2 - B^1 \neq \emptyset$ の場合も同様にして矛盾が導かれる. よって "$B^1 \cap B^2 \neq \emptyset \Rightarrow B^1 = B^2$" となり, その対偶をとると (1.5b) が成立する.

次に $A \in \mathcal{M}, A \neq \emptyset$ とする. $u \in A$ を任意に選ぶと, (1.6) より

$$B(u) \equiv \bigcap_{\{B' \in \mathcal{M} : B' \ni w\}} B' \subset A$$

となるので, $\cup_{u \in A} B(u) \subset A$ である. 一方, $u \in B(u)$ だから明らかに $\cup_{u \in A} B(u) \supset A$ ともなる. この二つより (1.5c) が成立する.

Step 3. 最後に族基底の一意性をいう.
$\mathfrak{B}$ と $\mathfrak{B}'$ をともに, $\mathcal{M}$ の族基底とする. いま "ある $B \in \mathfrak{B}$ にたいし, どの $B' \in \mathfrak{B}'$ をとっても $B \cap B' = \emptyset$" とする. ここで $B \neq \emptyset$ に注意すると,

$$\bigcup_{B' \in \mathfrak{B}'} B' \subset \Omega - B \neq \Omega \tag{1.7}$$

となる. ところが常に $\Omega \in \mathcal{M}$ だから (1.5c) は $A = \Omega$ でも成立しなければならないが, この事と (1.7) とは矛盾している.

これより, "任意の $B \in \mathfrak{B}$ にたいし, ある $B' \in \mathfrak{B}'$ があり, $B \cap B' \neq \emptyset$" となる. ここで, もし $B - B' \neq \emptyset$ なら

$$\emptyset \neq B \cap B' \in \mathcal{M}, \ B \cap B' \subset B, \ B \cap B' \neq B$$

となり, $B \cap B' \in \mathcal{M}$ は $B \in \mathfrak{B}$ の真部分集合である. これは族基底である $\mathfrak{B}$ が満たすべき (1.5b), (1.5c) と矛盾する.

$B' - B \neq \emptyset$ の場合も同様な議論で矛盾が導かれる. つまり, $B = B'$ となり, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$ である. □

確率空間 $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbf{P})$ で, 加法族 $\mathcal{M}$ に族基底 $\mathfrak{B}_{\mathcal{M}}$ があれば, 確率測度 $\mathbf{P}$ もこの $\mathfrak{B}_{\mathcal{M}}$ の要素にたいして定義すれば十分である. 実際, 次の命題がこのことを保証している:

命題 1.5. 加法族 $\mathcal{M}$ の族基底を $\mathfrak{B}_{\mathcal{M}}$ とする. 任意の $A \in \mathcal{M}$ にたいし,

$$\mathbf{P}[A] = \sum_{B \subset A, B \in \mathfrak{B}_{\mathcal{M}}} \mathbf{P}[B]. \quad \diamondsuit$$

証明 族基底の性質 (1.5b) より, “ $B, B' \in \mathfrak{B},\ B \neq B' \Rightarrow\ B \cap B' = \emptyset$ ”となることに注意する. あとは (1.5c) と確率測度の性質 (1.4c) から命題が導かれる. □

系 1.6. (1.2) のべき集合族 $\mathcal{F}$ の族基底 $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ は (1.1) の $\{w^1, w^2, \cdots, w^L\}$ で, $\mathcal{F} = \mathcal{A}[\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}]$ となる. つまり, 事象空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mathbf{P}$ は, 各 $w \in \Omega$ にたいして定義出来ればよい. ♢

ここで, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ の確率測度 $\mathbf{P}$ の性質を纏めてみよう.

命題 1.7. $A, A' \in \mathcal{F}$ とする.

(a) $\mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[A^c] = 1$.

(b) $A \subset A'$ ならば $\mathbf{P}[A] \leq \mathbf{P}[A']$.

(c) $\mathbf{P}[A \cup A'] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[A'] - \mathbf{P}[A \cap A']$. ♢

証明 集合論の演算より

$$A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = \Omega$$

だから, 確率測度の性質 (1.4b) より **(a)** が示される. また $A \subset A'$ ならば

$$A' = (A' - A) \cup A, \quad (A' - A) \cap A = \emptyset$$

なので, 確率測度の性質 (1.4c) を使うと **(b)** が判る.

最後の証明のために, 集合論の演算を考えると

$$A = (A \cap A') \cup (A \cap (A')^c), \quad (A \cap A') \cap (A \cap (A')^c) = \emptyset$$
$$A' = (A \cap A') \cup (A' \cap (A)^c), \quad (A \cap A') \cap (A' \cap (A)^c) = \emptyset$$

である. さらに

$$(A \cap (A')^c) \cup (A \cap A') \cup (A' \cap A^c) = A \cup A'$$

に注意して, 確率測度の性質 (1.4b) を使うと

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[A'] = \mathbf{P}[A \cap A'] + \mathbf{P}[A \cap (A')^c] + \mathbf{P}[A \cap A'] + \mathbf{P}[A' \cap A^c] \\
&= \mathbf{P}[A \cap A'] + \Big(\mathbf{P}[A \cap (A')^c] + \mathbf{P}[A \cap A'] + \mathbf{P}[A' \cap A^c]\Big) \\
&= \mathbf{P}[A \cap A'] + \mathbf{P}[\big(A \cap (A')^c\big) \cup \big(A \cap A'\big) \cup \big([A' \cap A^c\big)] \\
&= \mathbf{P}[A \cap A'] + \mathbf{P}[A \cup A']
\end{aligned}$$

となり, **(c)** が証明された. □

株価の時間変動などいろいろな確率事象を調べる上で, 事象がどの時点で起こったかを特定することが大切になる. “時点 n までに起こった事象の全体”を $\mathcal{F}(n)$ とし, n を 0 から N まで動かした $\mathcal{F}(n)$ の集まりを $\mathbb{F}$ とする.

つまり $\mathbb{F}$ は, “加法族を要素とする集合”である.

定義 1.8. **(a)** $\mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}(n) : n = 0, 1, \cdots, N\}$ が次の条件を満たしているとき, **フィルター filter**[2] という:

(1.8a) 各 $n = 0, 1, \cdots, N$ を固定すると $\mathcal{F}(n)$ は加法族,

(1.8b) $\mathcal{F}(0) \equiv \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{F}(N) \equiv \mathcal{F}$,

(1.8c) $\mathcal{F}(n-1) \subset \mathcal{F}(n),\ n = 1, \cdots, N$.

(b) フィルター $\mathbb{F}$ の定義された確率空間を, **フィルター付き確率空間** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ という. ◇

今後はとくに断らない限り, フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ を考えることにする.

命題 1.4 より, 各々の $\mathcal{F}(n)$ にたいし, その族基底 $\mathfrak{B}(n)$ が存在するが, 二つの族基底の間には, つぎの関係が成立している.

[2] **増大情報系**とも呼ばれる.

命題 1.9. $0 \leq m \leq n \leq N$ とし, $\mathcal{F}(m), \mathcal{F}(n) \in \mathbb{F}$ の族基底をそれぞれ $\mathfrak{B}(m), \mathfrak{B}(n)$ と表す. このとき各 $B' \in \mathfrak{B}(m)$ にたいし, 次をみたす $B^{1'}, \cdots, B^{\ell'} \in \mathfrak{B}(n)$ が存在する:

$$B' = \bigcup_{k=1'}^{\ell'} B^k. \quad \diamondsuit$$

証明 フィルターの性質 (1.8c) から, $m \leq n$ のとき $B' \in \mathcal{F}(n) \subset \mathcal{F}$ となる. あとは (1.5c) より, この命題の成立が簡単にわかる. □

1.2 確率変数

各々の $w \in \Omega$ にたいし実数の値を対応させる関数を確率変数と呼ぶ. フィルター付きの確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ 上で, その厳密な定義を与えよう.

定義 1.10. (a) 次のように表現できる関数 $X : \Omega \to \mathbf{R}^1$ を $\mathcal{F}(n)$**-可測な確率変数**と呼ぶ.

$$X(w) = \sum_{B \in \mathfrak{B}(n)} C_B \; I_B(w) : \Omega \to \mathbf{R}^1. \tag{1.9}$$

ここで $\mathfrak{B}(n)$ は $\mathcal{F}(n)$ の族基底であり, C_B は $B \in \mathfrak{B}(n)$ 毎に決まる実数である.

(b) $\mathcal{F}$-可測な確率変数 $X(w)$ は, 単に**確率変数 random variable** とよぶ. $\diamondsuit$

確率変数 $X(w)$ が $\mathcal{F}(n)$-可測という (1.9) の意味は, “ 時刻 n までの情報を知れば $X(w)$ の値が決まる ” ことである.

確率変数を特徴付ける量の一つとして, 平均がある.

定義 1.11. $X(w)$ は $\mathcal{F}(n)$-可測な確率変数で (1.9) と表されている. このとき

$$\mathbf{E}^P[X(w)] \equiv \sum_{w \in \Omega} X(w) \; \mathbf{P}(w) = \sum_{B \in \mathfrak{B}(n)} C_B \; \mathbf{P}[B]$$

を確率変数 X の $\mathbf{P}$ による平均という. 確率測度 $\mathbf{P}$ が固定され混同の恐れがないとき, 単に**平均**[3] **mean** と呼び, $\mathbf{E}[\cdot]$ の記号を使う. $\diamondsuit$

ここで平均の持つ性質を述べよう.

命題 1.12. a, b を実数, $X(w), Y(w)$ を $\mathcal{F}(n)$-可測な確率変数とすると, 次の等式 (=線形性) が成立する:

$$\mathbf{E}[a\,X(w) + b\,Y(w)] = a\,\mathbf{E}[X(w)] + b\,\mathbf{E}[Y(w)]. \quad \diamondsuit$$

証明 $\mathcal{F}(n)$ の族基底を $\mathfrak{B}(n)$ とすると, 確率変数の定義 1.10 より $B \in \mathfrak{B}(n)$ 毎に決まる実数 C_B, C'_B があり

$$X(w) = \sum_{B \in \mathfrak{B}(n)} C_B\, I_B(w), \quad Y(w) = \sum_{B \in \mathfrak{B}(n)} C'_B\, I_B(w)$$

となっている. すると平均の定義 1.11 から

$$\mathbf{E}[a\,X(w) + b\,Y(w)] = \sum_{B \in \mathfrak{B}(n)} \left(a\,C_B + b\,C'_B\right) \mathbf{P}[B]$$
$$= \sum_{B \in \mathfrak{B}(n)} a\,C_B\,\mathbf{P}[B] + \sum_{B \in \mathfrak{B}(n)} b\,C'_B\,\mathbf{P}[B] = a\,\mathbf{E}[X(w)] + b\,\mathbf{E}[Y(w)]. \quad \square$$

つぎの“独立”という概念は, 確率論で重要な考え方である.

定義 1.13. **(a)** 事象 $A, B \in \mathcal{F}$ が**独立 independent** とは,

$$\mathbf{P}[A \cap B] = \mathbf{P}[A]\ \mathbf{P}[B] \tag{1.10}$$

が成立することである.

(b) $X(w), Y(w)$ を確率変数とする. $X(w)$ と $Y(w)$ が独立とは, 任意の $a, b \in \mathbf{R}^1$ にたいし, 事象 $\{w : X(w) = a\}$ と $\{w : Y(w) = b\}$ が独立となることである.

(c) n 個の事象 $A^1, \cdots, A^n \in \mathcal{F}$ が独立とは,

$$\mathbf{P}[A^1 \cap \cdots \cap A^n] = \mathbf{P}[A^1] \times \cdots \times \mathbf{P}[A^n]$$

[3] しばしば **期待値 expectation** とも呼ばれる.

が成立することである.

n 個の確率変数 $X_1(w), \cdots, X_n(w)$ が独立とは, 任意の $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^1$ にたいし, 事象 $\{w : X_1(w) = a_1\}$, $\{w : X_2(w) = a_2\}$, $\cdots$, $\{w : X_n(w) = a_n\}$ が常に独立となることである. $\diamondsuit$

通常, 確率変数の積の平均を求めることは容易ではないが, それらが独立な場合には簡単に計算できる.

命題 1.14. $X(w), Y(w)$ を独立な確率変数とすると, 次が成立する:

$$\mathbf{E}[X(w)\,Y(w)] = \mathbf{E}[X(w)]\ \mathbf{E}[Y(w)] \quad \diamondsuit$$

証明 $\Omega = \{w^1, \cdots, w^L\}$ に注意して,

$$R_X \equiv \{X(w) : w \in \Omega\}, \quad R_Y \equiv \{Y(w) : w \in \Omega\}$$

とおくと, R_X, R_Y は有限個の要素からなる $\mathbf{R}^1$ の集合である. ここで独立の定義 1.13 から,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[X(w)\,Y(w)] = \sum_{a \in R_X} \sum_{b \in R_Y} a\ b\ \mathbf{P}[\{w : X(w) = a, Y(w) = b\}] \\
&= \sum_{a \in R_X} \sum_{b \in R_Y} a\ b\ \mathbf{P}[\{w : X(w) = a\} \cap \{w : Y(w) = b\}] \\
&= \sum_{a \in R_X} \sum_{b \in R_Y} a\ b\ \mathbf{P}[\{w : X(w) = a\}]\ \mathbf{P}[\{w : Y(w) = b\}] \\
&= \mathbf{E}[X(w)]\ \mathbf{E}[Y(w)]
\end{aligned}$$

となり命題の主張が成立する. $\square$

確率変数を特徴付ける別の量として " 分散 " がある.

定義 1.15. 確率変数 $X(w)$ にたいし

$$Var[X] \equiv \mathbf{E}[\big(X(w) - \mathbf{E}[X(w)]\big)^2] \tag{1.11}$$

をその**分散 variance** と呼ぶ. また $\sqrt{Var[X]}$ を標準偏差と言う. $\diamondsuit$

大雑把に言うと, 分散の大小は確率変数のとる値の散らばり具合を表している. 分散の性質を纏めてみよう.

命題 1.16. $X(w), Y(w)$ を確率変数, a, b を実数とする.

(a) $Var[X] = \mathbf{E}[X(w)^2] - \big(\mathbf{E}[X(w)]\big)^2$.

(b) $Var[a\,X + b] = a^2\,Var[X]$.

(c) 確率変数 $X(w)$ と $Y(w)$ が独立ならば

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]. \quad \diamondsuit$$

証明 $\alpha \equiv \mathbf{E}[X(w)]$, $\beta \equiv \mathbf{E}[Y(w)]$ とおく.
まず **(a)** を示そう. 命題 1.12 より

$$\begin{aligned} Var[X] &= \mathbf{E}[\big(X(w)-\alpha\big)^2] = \mathbf{E}\big[X(w)^2 - 2\,X(w)\;\alpha + \alpha^2\big] \\ &= \mathbf{E}[X(w)^2] - 2\alpha^2 + \alpha^2 = \mathbf{E}[X(w)^2] - \big(\mathbf{E}[X(w)]\big)^2. \end{aligned}$$

上で証明したばかりの **(a)** と命題 1.12 より

$$\begin{aligned} Var[a\,X+b] &= \mathbf{E}\Big[(a\,X(w)+b)^2 - (a\alpha+b)^2\Big] \\ &= a^2\;\mathbf{E}[X(w)^2 - \alpha^2] + 2ab\;\mathbf{E}[X(w)-\alpha] = a^2\;Var[X] \end{aligned}$$

となるので, **(b)** が示された.
　最後に **(c)** を証明する. 命題 1.12 と **(a)** から

$$\begin{aligned} Var[X+Y] &= \mathbf{E}\Big[\big(X(w)+Y(w)\big)^2 - (\alpha+\beta)^2\Big] \\ &= \mathbf{E}[X(w)^2-\alpha^2] + \mathbf{E}[Y(w)^2-\beta^2] - 2\;\mathbf{E}[X(w)\;Y(w) - \alpha\beta] \end{aligned}$$

となる. ここで $X(w)$ と $Y(w)$ は独立だから, 命題 1.14 を確かめると

$$\mathbf{E}[X(w)\,Y(w) - \alpha\beta] = 0$$

である. 結局,

$$Var[X+Y] = \mathbf{E}[X(w)^2-\alpha^2] + \mathbf{E}[Y(w)^2-\beta^2] = Var[X] + Var[Y]$$

となり, **(c)** が得られた.　$\square$

第4章　証券市場と数理ファイナンスの基本定理

我々が扱う証券市場では, “危険の無い資産である債券”と“危険な資産である株式”との2種類が自由に売買されている. また, 最近いろいろと話題になる金融派生商品のなかでもオプションと呼ばれる商品もこの証券市場に存在する.

そういう証券市場を理想化して, 簡潔な数学モデルを構成することがこの章の目的である.

4.1　証券

広くは“財産法上の権利を記載した書類”をさすが, ここでは有価証券を意味する. 証券市場で売買される有価証券として, 我々は次の3種類を取り上げよう.

(a) **株式 stock**: 株や株券とも言われる. 株式の保有者 stock holder (= 株主) は, 発行した会社にたいし, 持ち株数に比例して監督や議決する権利の他, 利益の配当を請求する権利を持つ. ただし, 優先株, 後配株など権利の異なる株式もある.

株式が証券市場で売買される際の価格を**株価 stock price** という. 実際の株価は, 企業収益の見通しなどによって絶えず変動している. また, 会社の運営に参加する目的で株式を大量に所得するなど, 株式の需給に関わる要因も株価の変動に複雑に関係する.

そこで我々は,

ある確率法則に従って株価は変動する

と見なす.

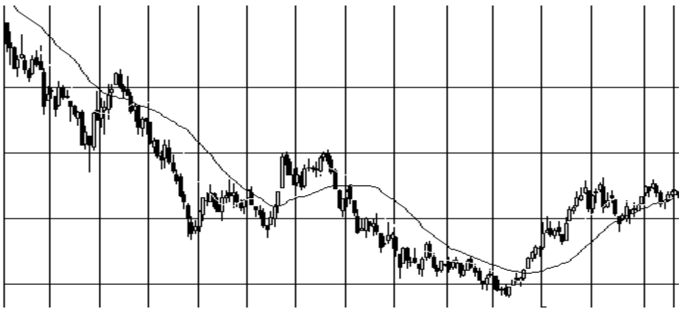

図 4.1: 日経平均株価 225 種: 2000 年 10 月〜2004 年 2 月. (２項モデル市場での株価シミュレーション 図 5.1 と比較せよ.)

(b) 債券 bond : 国や地方公共団体などが発行する公債と, 法人が発行する社債がある. 社債は発行者により, 金融債 (日本では７つの金融機関が発行できる), 公社債, 特殊法人債, 事業債 (こちらがいわゆる社債) などに分類できる.

債券の保有者は, 一定の定期的所得（＝配当）が満期まで見込めるが, 発行者の事業での議決権を持たない点が株式とは異なる.

債券も, 証券市場で売買されている.

(c) 金融派生商品 derivatives: 通貨, 株式, 債券, 金利, 商品など本来の金融商品の価格を関数として, 証券市場で取引される商品を金融派生商品と呼ぶ.

金融派生商品は先物取引, スワップ取引, オプション取引などの総称で, もともとは危険回避の手段だったが, 近年この金融派生商品自身を投資の対象とする取引が大幅に増加している.

現実に売買されている金融派生商品は極めて多様だが, 本書では**オプション**[1] と呼ばれるものだけを扱う.

[1] §4.2 で説明する

4.1.1　債券

前節で述べた証券のなかで, 債券の特徴を詳しく見てみよう.

債券は次の量で特徴付けられる:

(4.1a)　償還 (=満期) の期間 expiration $\big(\equiv N$ とおく$\big)$

(4.1b)　額面価格 face value $\big(\equiv A_F$ とおく$\big)$

(4.1c)　償還までの配当 coupon　$\big(\equiv$ 年利 r とする$\big)$

債券を保有することによる価値は, 上の特徴 (4.1) から決まる**収益率 rate of return** γ で決定される. 債券の現時点での売買価格を A_P とすると,

$$A_P = \frac{A_F}{(1+\gamma)^N} + \sum_{k=1}^{N} \frac{r \cdot A_F}{(1+\gamma)^k}. \tag{4.2}$$

をみたす γ がこの債券の収益率となる.

債券の中でもとくに国債の収益率は, 長期金利の指標であり金融機関の金利などに大きく影響する.

例 4.1. 次の債券 B が売買されている:

償還期間 $N = 10$ 年, 額面価格 $A_F \equiv 100$ 万円, 年利 $r = 5\%$ の配当.

この債券 B の現時点での売買価格を $A_P = 105$ 万 円とする. (4.2) をみたす γ がこの債券の収益率となるが, それを求めよ.

解　$x \equiv 1/(1+\gamma)$ とおいて, (4.2) は次のように変形できる.

$$(1+r)A_F\, x^{N+1} - A_F\, x^N - (r \cdot A_F + A_P)x + A_P = 0$$

この代数方程式の解を求めればよいが, 数学用のソフトウェア Mathematica をつかえば, 以下のように入力して簡単に数値解がもとめられる:

NSolve[$(100+5)x$^(11) $-100x$^(10) $-(105+5)x+105 == 0$]

この 11 次の代数方程式の解 x として

$$\begin{array}{ll} x=-1.00477, & x=-0.812901-0.590561I, \\ x=-0.812901+0.590561I, & x=-0.31057-0.95557I, \\ x=-0.31057+0.95557I, & x=0.310341-0.95564I, \\ x=0.310341+0.95564I, & x=0.812652-0.590857I, \\ x=0.812652+0.590857I, & x=0.958111, \\ x=1 & \end{array}$$

の 11 個の数値が出力されるが, その中から妥当なものを選ぶと

$$x=0.95811\cdots \iff \gamma=0.0437204\cdots,$$

となる. つまり, もとめる収益率 γ は約 4.4% である.　$\diamondsuit$

注意 4.2. この例から判るように (4.2) から, 収益率 γ を手計算でもとめるのは難しい. そこで, N, A_F, A_P, r が与えられたとき γ を求めるプログラムを付録の CD に収納した.　$\diamondsuit$

このように債券の将来価格は, 利率の変動が無い限りは購入の時点で決定論的に予測できる. 一方, 株式の価値の変動は予測不可能なので, “危険な資産”とみなされ, 債券は株式との比較の意味で“危険のない資産”とみなされる.

注意 4.3. 利率の変動や発行者の倒産などがあるので, 債券も危険な資産である. 実際, 1929 年の世界大恐慌では, 会社の倒産により多くの債券が紙屑同然になった. 日本でも 1990 年代に, 不良債券問題による銀行の信用低下や山一証券の経営危機などが起こり, 多くの債券の価値が大幅に低下した.

しかし短期的には, 債券の価値の変動は株価の変動と比べて緩やかな場合が多いので, 前者を“危険のない資産”, 後者を“危険な資産”と呼んでいる. $\diamondsuit$

4.1.2　現在価値と割引率

証券取引で重要な三つの概念を説明する.

(a)　キャッシュ・フロー cash flow：　ごく簡単に言えば, 資産や取引に関わる資金の流れを言う. “例 4.1 の債券 B”のキャッシュ・フローは

$$
\begin{aligned}
&\text{当初に債券 } B \text{ の購入代金 105 万円の支払い} \\
&\to \text{ 9 年間, 毎年決められた日時に 5 万円の配当の受け取り} \\
&\to \text{ 10 年目の決められた日時に元本 100 万円} \\
&\qquad\qquad \text{と最後の配当 5 万円の受け取り}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

となる. このように, “資金の受け渡しの額と時期”を厳格に決めたものを**キャッシュ・フロー**という.

個人の貯蓄では, 配当が適宜払い込まれ元本がきちんと返還されことが重要で, その正確な日時はあまり問題ではない. しかし証券取引ではキャッシュ・フローを厳格にきめることが重要である.

1998 年, ロシア通貨の切下げとアジア市場でのオプション取引失敗などで, 大手ヘッジ・ファンド[2] LTCM (Long Term Capital Management) が巨額の損失を出し破産したが, これは取引の決済が多少遅ければ回避できたと言われている.

(b)　現在価値[3] discounted value:　キャッシュ・フローのすべての資金を“取引する時点の価値”に計算しなおしたものを, **現在価値**という.

- 現在 105 万円持っている,
- 10 年後に 105 万円手に入る

の両者を比較しよう. 現在 105 万円あれば“例 4.1 の債券 B ”が買えるので 10 年後には 10 回の配当と元本で,

$$10 \times 5 \text{ 万円} + 100 \text{ 万円} = 150 \text{ 万円}$$

手に入る.

[2] 大口の投資家から資金を集め, 投資する投資顧問業者の私的な投資信託のこと. 高度な数理ファイナンスの知識と多様な金融派生商品とを利用し, 多額の資金を投機的に運用することで知られる. 年利 30 % 以上の高い投資収益をあげることもある. [2], [7] を参照せよ.

[3] しばしば**割引価値**とも呼ばれる

逆に言うと, “ 例 4.1 の債券 B ” の収益率 4.4% を採用すると, 10 年後の 105 万円 (=将来価値) は

$$\frac{105\,\text{万円}}{(1+0.044)^{10}} \simeq 68.2\,\text{万円}$$

となる. つまり, 現在 68.2 万円 で収益率 4.4 % の債券を購入すれば 10 年後には 105 万円確実に手に入るから, 10 年後の将来価値 105 万円は 68.2 万円の現在価値しかないことになる.

すなわち,

> 将来価値はある**割引率** γ で共通の尺度である現在価値に変換しなければならない

し, その変換をきちんと行うためにはキャッシュ・フローが必要となる.

例 4.4. “ 例 4.1 の債券 B ” では 10 年後に総額 150 万円を手にできるが, この債券の時刻 n での価値 B_n をキャッシュ・フロー (4.3) に従って計算してみよう.

ここで割引率として債券 B の収益率 $\gamma = 4.4\%$ を使う. すると

$$B_n \equiv (1+\gamma)^n A_P = \frac{A_F}{(1+\gamma)^{N-n}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{r\,A_F}{(1+\gamma)^{k-n}} \tag{4.4}$$

となる. 実際 B_{10} を計算すると

$$B_{10} \simeq 161.5\,\text{万円}$$

となり債券の総収入額 150 万円より多くなる. これは 1 年目の配当 5 万円は債券に再投資すれば, 9 年後には 7.4 万円になる. こういった配当の再投資が累積して, 債券 B の 10 年後の将来価値は総収入の 150 万円より多くなるのである.

(c) 割引率 discount rate: 先物取引やオプション取引などいろいろな時点での取引が行われる証券市場では, 将来価値を “ 共通の尺度である現在価値 ” に変換することが必要となる. そのためには, “ 現在価値への割引率 ” が重要であるがこれは “ 債券の収益率 ” として自動的に決まる.

その理由は次節 §4.1.3 で述べる.

4.1.3　裁定機会と一物一価の原則

いま“例 4.1 の債券 B ”の他に, 次のキャッシュ・フローで表される債券 C が市場で自由に売買されているとする:

(4.5)
当初に債券 C の購入代金 105 万円を支払い
→ 9 年間, 毎年決められた日時に 7 万円の配当を受け取り
→ 10 年目の決められた日時に元本 100 万円
と最後の配当 7 万円を受け取り

公式 (4.2) よりこの債券 C の収益率は 6.3 % になる. ところで債券 C の存在は奇妙な事態を招く.

まず我々は, “例 4.1 の債券 B ”を 105 万円で人に売る
→ その代金 105 万円で債券 C を購入し
→ 1 年目から 9 年目には“例 4.1 の債券 B ” の保有者に
配当を払っても, 毎年 2 万円の利益を得る
→ 10 年目にも債券 C の元本と配当で, “例 4.1 の債券 B ”
の保有者に元本と配当を払い, 2 万円の利益を得る

と行動すると, 元手 0 から始めて総額 20 万円の利益が得られる.

定義 4.5. “元手 0 から始めて確実に利益をえる投資方法”は, **裁定機会 arbitrage opportunity** [4] と呼ばれる.　◇

ごく例外的な状況以外では, 裁定機会は存在しない (これは数理ファイナンスの基本的な仮定でもある). 簡単に言えば, 同じ条件で“収益率 4.4 % の債券 B ”と“収益率 6.3 % の債券 C ”があれば, 債券 B を購入する人はいない. よって裁定機会は成立しない.

今後の議論で, 我々は次の公理を採用する.

公理 4.6 (一物一価の原則).　証券市場では, 同じ条件の債券の収益率は一意に決まる.　◇

[4] 後の 定義 4.19 で, 厳密に定義する

系 4.7. “一物一価の原則”より, 証券市場では債券の収益率が一意に決まるので, それを“現在価値へ変換するための割引率”として, 使うことにする. ♢

4.2　オプション

株式や債券など本来の金融商品の価格変動を数値化して, それを取引の対象としたものが**金融派生商品 derivatives** である.

1970 年代に米国で開発されたが, 近年では金融派生商品自体を主な投機対象とするヘッジ・ファンドなどの取引が拡大しており, 本来の債券や株式の規模以上にまで大きな取引高となることもある.

金融派生商品には, ワラント, 転換債, スワップなどが知られている. その他にもいろいろなタイプの商品があるが, ここではオプション option に話を絞る.

オプションにもいろいろあるが, 次のタイプのオプションが基本である:

(a) **コール・オプション call option**: “ある会社の株式を, ある決まった価格で買う”権利をいう. 権利行使の日時が決まっているものを**ヨーロピアン・コール・オプション European call option** という. 一方, ある決まった日時以前の好きなときに権利行使ができるものを**アメリカン・コール・オプション American call option** という.

(b) **プット・オプション put option**: “ある会社の株式を, ある決まった価格で売る”権利をさす. 権利行使の日時が決まっているものを**ヨーロピアン・プット・オプション European put option** , ある決まった日時以前の好きなときに権利行使ができるものを**アメリカン・プットオプション American put option** と呼ぶのは前と同様である.

注意 4.8. オプションの性質で注意することは, “その権利を行使するかしないかは持ち主の自由”という点である. ♢

4.2.1 オプションの行使

オプションの行使方法を述べる．

“時点 N に 1 個の株式を価格 K で買う権利”というヨーロピアン・コール・オプションを持っている．時刻 n での株式の価格を S_n とし，今が時点 N とする．

このときこのヨーロピアン・コール・オプションの保有者は次のように行動する．

$$\begin{aligned} K \geq S_N &\quad\Longrightarrow\quad \text{権利を放棄する}, \\ K < S_N &\quad\Longrightarrow\quad \text{権利を行使して}, K \text{ の価格で株式を買い}, \\ &\qquad\qquad \text{即座に価格 } S_N \text{ で売る}. \end{aligned}$$

つまり，時点 N で，このヨーロピアン・コール・オプションの価値 F は

$$F = \max\{S_N - K, 0\}$$

となるので，株価が上昇した場合には，

$$\max\{S_N - K, 0\} - \text{ヨーロピアン・コール・オプションの販売価格}$$

の利益[5]が得られる．

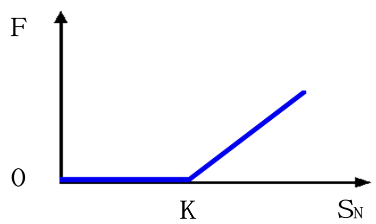

図 4.2: 株価 S_N とコール・オプションの価値

[5] ここ及び今後の議論では，株式売買の手数料は考えない．

一方, “時点 N に 1 個の株を価格 K で売る権利”というヨーロピアン・プット・オプションを持っている. 前と同じ設定で, 今が時点 N とすると

$$\begin{aligned} K > S_N \quad &\Longrightarrow \quad \text{権利を行使して, } S_N \text{ の価格で株式を買い,} \\ &\qquad\quad \text{即座に価格 } K \text{ で売る,} \\ K \leq S_N \quad &\Longrightarrow \quad \text{権利を放棄する.} \end{aligned}$$

つまり, 時点 N でのこのヨーロピアン・プット・オプションの価値 F は

$$F = \max\{K - S_N, 0\}$$

となり, 株価が下降した場合に

$$\max\{K - S_N, 0\} - \text{ヨーロピアン・プット・オプションの販売価格}$$

の利益が得られる.

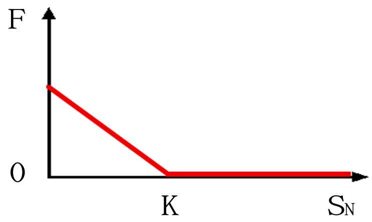

図 4.3: 株価 S_N とプット・オプションの価値

このようにオプションを上手く組み合わせると, 株価が上昇した時だけでなく, 下降した時にも利益を得ることが出来る.

4.2.2　商品としてのオプション

今度はオプション自身を販売する場合を考えてみよう. オプションを売買する時刻 0 では株の時刻 N での価格 S_N は判っていない. そこでオプションを販売する場合の問題点は次に要約できる:

ヨーロピアン・コール・オプションを販売する場合,“時刻 $n = N$ に価値が $\max\{S_N - K, 0\}$ になるオプション”を時刻 $n = 0$ ではどんな価格で売ればよいか？

株価の変動がある確率法則に基づいているとして,“オプションの適正販売価格の決定”と“オプション行使に伴う損得の評価”を決めることが, 有名な Black-Scholes の理論である.

注意 4.9. 株式のオプション取引は 1973 年米国のシカゴ取引所で最初に行われたとされている. 日本でも 1988 年の証券取引法改正でその導入が認められ, 現在は広く利用されている. オプション取引が一般的になった理由として, 次の二つが挙げられる:

- 通常オプションの価格は株価よりずっと低いので, 株式や債券を直接取引するよりも, より少ない費用で取り引きできる[6]. つまり資金が豊富でなくても, 金融市場に参加できる.
- いろいろなオプションをうまく組み合わせれば, 株価や債券価値の変動による損失の危険を回避できる[7]. $\diamondsuit$

4.3 ポートフォリオ

以下の議論では, 確率空間を具体的には構成しないが, (1.1) 〜 (1.4d) と (1.8) をみたしているフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ が与えられている.

証券市場 4.10. 我々の証券市場 $\{B_n(w), S_n(w)\}$ は, 一種類の債券 $B_n(w)$ と一種類の株式 $S_n(w)$ から構成されている.

ここで $B_n(w)$ は時点 n での債券一口の価格, $S_n(w)$ は株式一株の価格をあらわし, 以下の条件を満たす離散確率過程である:

(4.6a) $\{B_n(w), S_n(w)\}$ は $\mathbb{F}$-適合な離散確率過程,

(4.6b) すべての n と w にたいし $B_n(w) > 0,\ S_n(w) > 0.$ $\diamondsuit$

[6] 例 5.14, 5.16 を参照せよ.
[7] **リスク・ヘッジ**と言う. オプションの本来の利用法である.

注意 4.11. (4.6a) は, 時点 n で, 我々が知っている情報が

$$B_1(w), \cdots, B_n(w), \quad S_1(w), \cdots, S_n(w)$$

だけということを意味する. また (4.6b) は, 債券と株の価格が正であることを要請している. ◇

定義 4.12. ポートフォリオ portfolio とは離散確率過程

$$\mathbb{X} \equiv \left\{ \left(X_n^B(w), X_n^S(w) \right) : n = 0, 1, \cdots, N \right\}$$

で, $X_n^B(w)$ は“時点 n での債券の保有量”, $X_n^S(w)$ は“時点 n での株式の保有量”をあらわす.

ここで $\mathbb{X} = \{X_n^B(w), X_n^S(w)\}$ は予測可能な離散確率過程である. つまり,

(4.7a) $X_0^B(w) \in \mathcal{F}(0),\ X_0^S(w) \in \mathcal{F}(0),$

(4.7b) $X_n^B(w) \in \mathcal{F}(n-1),\ X_n^S(w) \in \mathcal{F}(n-1) \quad n = 1, 2, \cdots, N.$ ◇

注意 4.13. (a) portfolio はイタリア語で“紙ばさみ”の意味であるが, 有価証券の一覧表をあらわすようになった.

(b) (4.7) から, 時点 $n+1$ でのポートフォリオ $\left(X_{n+1}^B(w), X_{n+1}^S(w) \right)$ は, 時点 n までの債券の価格と株価の情報で決定される.

つまり (4.7) は市場が公平なことを意味し, インサイダー取引などのような“時点 $n+1$ での株価の変化を知ったうえで, 時点 $n+1$ のポートフォリオを決める”ことは許さない.

(c) $\mathcal{F}(0) = \{\emptyset, \Omega\}$ だから, (4.7a) と (4.7b) より $X_0^B(w)$, $X_1^B(w)$, $X_0^S(w)$, $X_1^S(w)$ はそれぞれ定数となる. 今後はとくに X_0^B, X_0^S と w を省いて書き表す. ◇

証券市場 4.10 で, 債券の価格をあらわす離散確率過程 $B_n(w)$ が果たす役割を説明する. 時点 n にポートフォリオ $(X_n^B(w), X_n^S(w))$ を実行する. するとその時点 n での資産 $V_n(w; \mathbb{X})$ は

(4.8) $$V_n(w; \mathbb{X}) \equiv X_n^B(w)\, B_n(w) + X_n^S(w)\, S_n(w),\ n = 0, \cdots, N$$

で与えられる.

“例 (4.1) の債券 B ”が市場にあるとしよう. 債券 B の価値は決定論的に変化し, そのキャッシュフローは (4.3) で表され, 収益率 $\gamma = 4.4\%$ である. n 年目の債券 B の価格は公式 (4.4) から

$$B_n(w) = (1+\gamma)^n A_P, \quad n = 0, 1, \cdots, N,$$
$$\gamma = 0.044,\ A_P = 105 \text{ 万円}$$

となる. 一方“ n 年目に得る S 円 ”の現在価値が $S/(1+\gamma)^n$ となることは既に説明した. つまり, 定数倍 A_P を無視すれば,

$$\text{“ } n \text{ 年目に得る } V_n(w) \text{ 円 ” の現在価値} = \frac{V_n(w)}{B_n(w)}$$

となる.

(4.8) の $V_n(w; \mathbb{X})$ は時点 n での資産だから, これを共通の尺度である現在価値へ変換してみよう. 我々の証券市場では債券がただ一つ存在し, $B_n(w)$ が時点 n でのその債券の価格だから, 時点 0 での債券価格 $B_0(=$ 定数$)$ を常に 1 とすれば, (4.8) の $V_n(w; \mathbb{X})$ の現在価格 $V_n^d(w; \mathbb{X})$ は次のようになる:

$$V_n^d(w; \mathbb{X}) \equiv \frac{V_n(w; \mathbb{X})}{B_n(w)} = X_n^B(w) + X_n^S(w)\, S_n^d(w) \tag{4.9a}$$

$$S_n^d(w) \equiv \frac{S_n(w)}{B_n(w)},\ n = 0, \cdots, N. \tag{4.9b}$$

ここで, $S_n^d(w)$ は“ 時点 n の株価の現在価値 ”である.

今後, ポートフォリオ $\mathbb{X}$ を次の性質のものに限り, 我々の 証券市場 4.10 をさらに簡略化しよう.

定義 4.14. ポートフォリオ $\mathbb{X}$ が**自己資金的 self-financing** とは

$$\begin{aligned} V_n(w; \mathbb{X}) &= X_{n+1}^B(w)\, B_n(w) + X_{n+1}^S(w)\, S_n(w), \\ n &= 0, \cdots, N \end{aligned} \tag{4.10}$$

が成立することである. ◇

注意 4.15. 時点 n でのポートフォリオ $\big(X_n^B(w), X_n^S(w)\big)$ を時点 $n+1$ では $\big(X_{n+1}^B(w), X_{n+1}^S(w)\big)$ に切り替える. その切り替え時に

> 時点 n での資産を時点 $n+1$ にもすべて再投資する. その再投資のとき他からの資金流入も, 他への資金流出も無い

というのが, (4.10) の意味である.　$\diamondsuit$

命題 4.16. 証券市場 4.10 では次の三つは同値.

(a) ポートフォリオ $\mathbb{X}$ が自己資金的.

(b) すべての $n = 1, \cdots, N$, で

$$V_n(w;\mathbb{X}) = V_0(\mathbb{X}) + \sum_{k=1}^{n} \Big(X_k^B(w)\,\Delta B_k(w) + X_k^S(w)\,\Delta S_k(w) \Big)$$
$$\Delta B_k \equiv \big(B_k(w) - B_{k-1}(w)\big),\ \Delta S_k(w) \equiv \big(S_k(w) - S_{k-1}(w)\big) \tag{4.11}$$

(c) すべての $n = 1, \cdots, N$, で

$$V_n^d(w;\mathbb{X}) = V_0^d(\mathbb{X}) + \sum_{k=1}^{n} X_k^S(w)\,\Delta S_k^d(w)$$
$$\Delta S_k^d(w) \equiv \frac{S_k(w)}{B_k(w)} - \frac{S_{k-1}(w)}{B_{k-1}(w)}, \quad V_0^d(\mathbb{X}) \equiv X_0^B + X_0^S\,\frac{S_0}{B_0} \quad \diamondsuit \tag{4.12}$$

(この命題の証明は §6.1.1 でおこなう.)

この式 (4.12) から, ポートフォリオが自己資金的ならば, “ 時点 n での資産 ” は “ 債券の価格と株価と株式への投資量 ” の三つだけで決まることが判る. 逆に, 株式への投資量がどうであれ, 債券への投資量を適切に選びなおせば, 両方を併せたポートフォリオを自己資金的とすることが出来る.

命題 4.17. 証券市場 4.10 で, $\{Y_n(w)\}$ を任意の予測可能な確率過程, C_0 を任意な定数 (負でもよい) とする.

このとき, 次をみたす予測可能な離散確率過程 $\{Y_n^B(w) : n = 0, 1, \cdots, N\}$ が存在する:

$$Y_0^B(w) + Y_0\,\frac{S_0}{B_0} = C_0, \tag{4.13a}$$

(4.13b)　$\mathbb{Y} = \{(Y_n^B(w), Y_n(w)) : n = 0, 1, \ldots, N\}$ は自己資金的.　$\diamondsuit$

(この命題の証明は §6.1.2 でおこなう.)

4.4 数理ファイナンスの基本定理

証券市場 4.10 でおこなわれる“ 取引の方法 ”を論ずる.

“ 債券の空売り ”とは, 実際には保有していない債券を売ることである. 実際の金融市場では信用貸しや空売りが行われているので, 我々の証券市場でも

債券や株式の空売りを許す.

このことをポートフォリオ $\mathbb{X}$ で表現すると, ある時点 n で

$$X_n^B(w) < 0 \quad \text{もしくは} \quad X_n^S(w) < 0 \tag{4.14}$$

となることである. ただしここで,

自己資産で空売りを清算できる

ことは要請する. つまり資産 $V_n(w;\mathbb{X})$ が負になる

$$\text{破産} \equiv \text{ある時点 } n \text{ と } w \text{ で } \ V_n(w;\mathbb{X}) < 0 \ \text{ となること}$$

は禁止する.

定義 4.18. ポートフォリオ $\mathbb{X}$ が**実行可能** とは, 次が成立していることである:

(a) $\mathbb{X}$ が自己資金的.

(b) どの時点でも破産していない. つまり

$$\text{すべての } n,\, w \text{ で } \quad V_n(w;\mathbb{X}) \geq 0. \quad \diamondsuit$$

今後はこの“ 実行可能なポートフォリオ ”を扱うが, その中でも“ 裁定機会 ”という特別なポートフォリオについては, 定義 4.5 で既に述べた. この“ 裁定機会 ”を, 我々の証券市場 4.10 で厳密に定義しなおそう:

定義 4.19. つぎの条件をみたすポートフォリオ $\mathbb{X} = \left\{X_n^B(w), X_n^S(w)\right\}$ を**裁定機会 arbitrage opportunity** と呼ぶ.

(a) $\mathbb{X}$ は実行可能なポートフォリオ.

(b) 元手 $V_0(\mathbb{X}) = 0$ だが, 時点 N では $\mathbf{E}[V_N(w;\mathbb{X})] > 0$. $\diamondsuit$

実際の証券市場では, 短期かつ小規模にはこの裁定機会は実在することが報告されている. しかし, 大規模や長期には存在しない.

今後は“ 裁定機会が存在しない ”として議論を展開するが, このことは我々の証券市場 4.10 では, 次の必要十分条件で言い換えられる.

定理 4.20 (マルチンゲール測度の存在). 証券市場 4.10 では, 次の二つは同値.

(a) 裁定機会が存在しない.

(b) 与えられたフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ で, 確率測度 $\mathbf{P}$ の代わりに, 次をみたす確率測度 $\mathbf{Q}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ 上に存在する:

(4.15a)　すべての空でない $A \in \mathcal{F}$ にたいし　$\mathbf{Q}[A] > 0$.

(4.15b)　(4.9b) で与えられる株価の現在価値 $\{S_n^d(w)\}$ は新しい
フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{Q})$ 上のマルチンゲール. $\diamondsuit$

(この定理の証明は §6.3.1 でおこなう.)

次にヨーロピアン・オプションを取り上げる. 今後の議論ではヨーロピアン・コール・オプションで行うが, すべての結論は簡単にヨーロピアン・プット・オプションの場合に置き換えられる.

定義 4.21. (a) 時点 N でのヨーロピアン・コール・オプションの価値 $F(w)$ は

$$F(w) \equiv \max\left\{S_N(w) - K, 0\right\} \geq 0, \quad w \in \Omega$$

である. もし実行可能なポートフォリオ $\mathbb{X}$ で

$$V_N(w;\mathbb{X}) = F(w), \quad w \in \Omega$$

となるものが存在するとき, “ このヨーロピアン・コール・オプション $F(w)$ は**複製可能** ”と言う.

(b) どんなヨーロピアン・コール・オプション $F(w) \geq 0$ も複製可能なとき, “ 証券市場 4.10 が**完備 complete** ”と言う. $\diamondsuit$

いま我々の証券市場 4.10 では裁定機会が存在しないとする. すると 定理 4.20 より (4.15a) と (4.15b) をみたす確率測度 $\mathbf{Q}$ が存在する. さらに“ 証券市場が完備 ”と仮定すると (4.15a) と (4.15b) をみたす確率測度は一意に決まる.

定理 4.22 (マルチンゲール測度の一意性). 証券市場 (4.10) では裁定機会が存在しないとする. このとき, 次の二つは同値.

(a) 証券市場は完備.

(b) (4.15a) と (4.15b) をみたす確率測度 $\mathbf{Q}$ が唯一つ存在する. $\diamondsuit$

(この定理の証明は §6.3.2 でおこなう.)

4.5 オプションの適正販売価格

証券市場 4.10 が“ 裁定機会が存在せず完備 ”とする. このときのヨーロピアン・オプションの販売価格をどうすればよいか論じよう.

なお以下の議論ではヨーロピアン・コール・オプションで行うが, すべての結論は簡単にヨーロピアン・プット・オプションの場合に置き換えられることは前節と同じである.

定義 4.23. **(a)** ヨーロピアン・コール・オプション

$$F(w) = \max\{S_N(w) - K, 0\} \geq 0, \quad w \in \Omega \tag{4.16}$$

と正数 C_0 にたいし, 実行可能なポートフォリオ $\mathbb{X}$ で

$$\begin{aligned} &\text{元手 } V_0(\mathbb{X}) = C_0 \geq 0 \ \text{ であり,} \\ &\text{すべての } w \in \Omega \text{ にたいし } V_N(w;\mathbb{X}) \geq F(w) \end{aligned} \tag{4.17}$$

をみたすものの全体を $\mathbb{U}(F(w), C_0)$ であらわす.

(b) あるポートフォリオ $\mathbb{X} \in \mathbb{U}(F(w), C_0)$ にたいし (4.17) で等号

$$V_N(w; \mathbb{X}) = F(w), \quad w \in \Omega$$

が成立しているとき, それを $(F(w), C_0)$**-複製ポートフォリオ** と言う. ◇

定義 4.24. (4.16) のヨーロピアン・コール・オプション $F(w)$ にたいし, $F(w)$ の**適正販売価格** C_F を次で与える:

$$C_F \equiv \inf\{C_0 : \mathbb{U}(F(w), C_0) \neq \emptyset\} \quad \diamondsuit \tag{4.18}$$

注意 4.25. 証券市場 4.10 で元金 C_0 のポートフォリオ $\mathbb{X}$ を実行する. この $\mathbb{X}$ が $\mathbb{U}(F(w), C_0)$ に属するなら, “$\mathbb{X}$ による時点 N での利益 $V_N(w; \mathbb{X})$” は “時点 N でのオプションの価値 $F(w)$” を上回ることになる.

そこで我々は, オプションの適正販売価格 C_F を

“時点 N での利益が, オプションの価値 $F(w)$ を上回るポートフォリオ” を実行するために必要な元金 C_0 の下限

と決定した. この価格決定法は, オプションの販売側と購入側の双方にとり適正なものと言える. ◇

“裁定機会が存在しない完備な証券市場” では, ヨーロピアン・コール・オプション $F(w)$ の適正販売価格をきめる方程式が存在する.

定理 4.26 (オプションの価格付け). 証券市場 4.10 は裁定機会が存在せず完備とする. $F(w)$ を (4.16) のヨーロピアン・コール・オプションとおく.

(a) $F(w)$ の適正販売価格 C_F は

$$C_F \equiv B_0 \ \mathbf{E}^Q[\frac{F(w)}{B_N(w)}]$$

となる. ただし, $\mathbf{Q}$ は定理 4.22 の確率測度.

(b) $(F(w), C_F)$-複製ポートフォリオ $\mathbb{Z} = \{(Z_n^B(w), Z_n^S(w))\}$ が存在する. ◇

(この定理の証明は §6.4 でおこなう.)

文 献

[1] Black, F. and Scholes, M., The Pricing of options and corporate liabilities, J. Political Economy 81 (1973), 637-654.

[2] Berstein, P., Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street, The Free Press, 1992; 証券投資の思想革命 – ウォール街を変えたノーベル賞経済学者たち (訳=青山 護, 山口 勝業), 東洋経済新報社, 1993.

[3] Cox, J. C., Ross, R. A., and Rubinstein, M., Option pricing: a simplified approach, J. Financial Economics, 7 (1979), 229-263.

[4] Cox, J. C. and Rubinstein, M., Options Markets, Pretince-Hall, 1985.

[5] Dalang, R. C., Morton, A., and Willinger, W., Equivalent martingales measures and no-arbitrage in stochastic securities market model, Stoch. and Stoch. Rep., 29 (1990), 185-202.

[6] Delbaen, F. and Schachermayer, W., A general version of the fundamental theorem of asset pricing, Math. Ann., 300 (1994), 463-520.

[7] Dunbar, N., Inventing Money, John Wiley & Sons, 2000; LTCM 伝説 – 怪物ヘッジファンドの栄光と挫折 (監訳=寺沢 芳男 / 訳=グローバル・サイバー・インベストメント), 東洋経済新報社, 2001.

[8] Harrison, M. J. and Kreps, D. M., Martingales and arbitrage in multiperiod secuirity markets, J. Economic Theory, 29 (1979), 381-408.

[9] Harrison, M. J. and Pliska, S. R., Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, Stoch. Pr. and its Appl., 11 (1981), 215-260.

[10] Harrison, M. J. and Pliska, S. R., A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets, Stoch. Pr. and its Appl., 15 (1983), 313-316.

[11] Karatzas, I. and Shreve, S. E., Methods of Mathematical Finance, Springer-verlag, 1998.

[12] Lamberton, D. and Lapeyre, B., Introduction to Stochastic calculus Applied to Finance, Chapman & Hall, 1996.

[13] Melnikov, A. V., Finacial Markets: Stochastic Analysis and the Pricing of Derivative Securities, Translation of Math. Monog., AMS 184, 1997.

[14] Musiela, M. and Rutokowski, P., Martingale Methods in Finacial Modeling, Springer-verlag, 1997.

[15] Revue, D. and Yor, M., Continuous Martingales and Brownian Motion, Third Ed., Springer-verlag, 1999.

[16] Shiryaev, A. N., On some basic concepts and stochastic models in financial models in financial mathematics, Teor. Prob. Appl., 39 (1994), 5-22.

[17] Stricker, C., Arbitrage er lois de martingales, Ann. Inst. Henri Poincarre, 26 (1990), 451-460.

- 本格的に数理ファイナンスを勉強するためには, [15] などで確率解析を学習した後に, [11], [12], [13], [14] などの専門家向けの本を読むとよい.
- 一方, 肩の凝らない読み物としては [2], [7] があり, 数理ファインナンスの開拓史やそれを実務に応用したヘッジ・ファンドの興亡などを物語風に記述している.

- 有名な Black-Scholes の公式は [1] で発表された.
- 無限確率空間での完備な証券市場の特徴付けは [5] で行われた.
- 時間が連続な場合, いろいろな評価が大変デリケートになる. 連続時間の証券市場は [8], [17], [6] で扱われている.

  そして連続時間での, 完備な証券市場の特徴付けは [9], [10] で扱われているが, まだ満足のいく結果は得られていない.