

応用解析学

2007/12/14, 西岡 國雄

nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp

http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/~nishioka/

1 偏微分

I. 偏微分

2次元空間 $\mathbf{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y)$ にたいし, y を固定し x のみを動かして微分する:

$$(1.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

この極限が存在するとき, “ $f(x, y)$ は点 (x, y) で x に関して偏微分可能” といい,

$$(1.1) = f_x(x, y) \quad \text{もしくは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

と表す. 同様に x を固定し y のみを動かして微分したときの極限が存在するとき, “ $f(x, y)$ は点 (x, y) で y に関して偏微分可能” といい,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = f_y(x, y) \quad \text{もしくは} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

と表す.

$f(x, y)$ の偏微分 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ が, 再び x, y に関して偏微分可能であるとき, 次の4種類の偏微分

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(x+h, y) - f_x(x, y)}{h} &= f_{xx}(x, y) \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \text{ とも表す} \right), \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y+k) - f_x(x, y)}{k} &= f_{xy}(x, y) \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \text{ とも表す} \right), \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x+h, y) - f_y(x, y)}{h} &= f_{yx}(x, y) \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \text{ とも表す} \right), \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_y(x, y+k) - f_y(x, y)}{k} &= f_{yy}(x, y) \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \text{ とも表す} \right) \end{aligned}$$

を “2 階の偏微分” という.

ここで (1.2) の $f_{xy}(x, y)$ と (1.3) の $f_{yx}(x, y)$ とは, 偏微分の順序を逆にしただけなので, “両者は同じものか?” との疑問が生じる.

定理 1.1. $f_{xy}(x, y)$ と $f_{yx}(x, y)$ が共に連続なら, 両者は等しい. $\diamond$

$f(x, y)$ の2階偏微分 $f_{xx}(x, y), \dots, f_{yy}(x, y)$ が, x, y に関してさらに偏微分可能で, それらはすべて連続とする. このとき前と同様の記号を使って,

$$f_{xxx}(x, y), \quad f_{xxy}(x, y), \quad f_{xyy}(x, y), \quad f_{yyy}(x, y)$$

という4種類の “3 階偏微分” が定義できる. 以下, “4 階偏微分, $\dots$, n 階偏微分” が次々と定義できる^{*1}.

^{*1} 2 階以上の偏微分を “高階偏微分” と総称する.

問題 1.2. 次の関数 $f(x, y)$ にたいし, すべての 2 階偏微分 $f_{xx}(x, y), \dots, f_{yy}(x, y)$ を求めよ. また, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ となることを確かめよ.

$$(i) f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3, \quad (ii) f(x, y) = e^{x+y}, \quad (iii) f(x, y) = e^x \cos y. \quad \heartsuit$$

II. Taylor の定理

1 変数の関数 $f(x)$ にたいして, “Taylor の定理” は大変有用な定理であった. 同様に 2 変数の関数 $f(x, y)$ にも “Taylor の定理” が成立している:

定理 1.3 (Taylor 展開). 関数 $f(x, y)$ には $n + 1$ 階までの連続な偏導関数が存在する. このとき, ある $0 < \theta < 1$ にたいし, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \left(h f_x(a, b) + k f_y(a, b) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b) \right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b) + R_{n+1}, \\ R_{n+1} &\equiv \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(a + \theta h, b + \theta k). \end{aligned}$$

ただし

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b) = \sum_{\ell=0}^n {}_k C_{\ell} h^{n-\ell} k^{\ell} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\ell} \partial y^{\ell}}(a, b)$$

である*2. $\diamond$

Taylor の定理 1.3 を “2 変数関数の極大/極小” に応用してみよう.
偏微分可能な関数 $f(x, y)$ にたいし, 関数 $H(x, y)$ を

$$(1.4) \quad H(x, y) \equiv f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - \left(f_{xy}(x, y) \right)^2$$

で定義する.

定理 1.4. 関数 $f(x, y)$ は 2 階までの連続な偏導関数が存在している.

(i) 関数 f が点 $P = (a, b) \in D$ で極値をとる. $\Rightarrow$

$$(1.5) \quad f_x(a, b) = 0 \quad f_y(a, b) = 0.$$

(ii) 逆に, 関数 f がある点 $P = (a, b)$ で (1.5) を満たしている.

(ii-a) $H(a, b) > 0$, $f_{xx}(a, b) > 0$. *3 $\Rightarrow f$ は点 P で極小値をもつ.

(ii-b) $H(a, b) > 0$, $f_{xx}(a, b) < 0$. $\Rightarrow f$ は点 P で極大値をもつ.

(ii-c) $H(a, b) < 0$. $\Rightarrow$ 点 P は f の極値ではない.

(ii-d) $H(a, b) = 0$. $\Rightarrow$ これだけでは極値かどうか判定できない. $\diamond$

*2 ${}_k C_{\ell} = k! / (\ell! (k - \ell)!)$.

*3 (ii-a) と (ii-b) では, $f_{xx}(a, b)$ を $f_{yy}(a, b)$ で代用してもよい.

2 最適化問題

I. 等式制約条件付き最適化問題

前節の 定理 1.4 で論じた“極大/極小”より難しい問題を論ずる.

問題 2.1 (等式制約条件付き最適化問題). 二つの滑らかな関数

$$(2.1) \quad f(x, y) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^1, \quad g(x, y) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^1$$

と実数 b が与えられている. このとき

$$(2.2) \quad \max_{(x, y)} f(x, y) \quad \text{subjects to} \quad g(x, y) = b$$

の値 (= **最適値**) をもとめよ. なお, 最適値を実現する (x^*, y^*) を **最適解** とよぶ. ♠

最適解を完全に求める方法は複雑だが, その候補者だけなら次の方法でほぼ満足のいく結果が得られる. まず, 問題 2.1 にたいし

$$(2.3) \quad L(x, y, \lambda) \equiv f(x, y) + \lambda (b - g(x, y))$$

を **ラグランジュ関数** と呼ぶ.

定理 2.2 (ラグランジュの乗数法). 等式制約条件付き最適化問題 (2.2) の最適解 (x^*, y^*) が

$$(2.4) \quad |g_x(x^*, y^*)| + |g_y(x^*, y^*)| \neq 0$$

を満たしている. このとき, ある $\lambda^* \in \mathbf{R}^1$ が存在して, 次が成立する:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} L_x(x^*, y^*, \lambda^*) &= f_x(x^*, y^*) - \lambda^* g_x(x^*, y^*) = 0, \\ L_y(x^*, y^*, \lambda^*) &= f_y(x^*, y^*) - \lambda^* g_y(x^*, y^*) = 0, \\ L_\lambda(x^*, y^*, \lambda^*) &= b - g(x^*, y^*) = 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

この 定理 (ラグランジュの乗数定理) から, 問題 2.1 の解 (x^*, y^*) が次の手順で求められることが判った:

=====

Step 1. (2.5) を満たす (x^*, y^*, λ^*) をすべて見つける. 定理 2.2 より, これらの (x^*, y^*, λ^*) が最適解の候補者である.

Step 2. Step 1 で求めた (x^*, y^*, λ^*) を実際に $f(x, y)$ に代入し, 真の最適解を決定する.

=====

例 2.3. 等式制約条件付きの最適値問題 (2.2) で

$$(2.6) \quad f(x, y) = xy, \quad g(x, y) = 2x^2 + y^2, \quad b = 3$$

とする. この“(2.6) をラグランジュの乗数法で解く.

ラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(3 - 2x - y^2)$$

である. (2.5) より

$$\begin{aligned} 0 &= L_x(x, y, \lambda) = y - 2\lambda \\ 0 &= L_y(x, y, \lambda) = x - 2\lambda y \\ 0 &= L_\lambda(x, y, \lambda) = 3 - 2x - y^2 \end{aligned}$$

だから,

$$0 = 3 - 2 \times (4\lambda^2) - (2\lambda)^2$$

が得られ, $\lambda = \pm 1/2$ となる. つまり最適解の候補者は

$$(x, y, \lambda) = (1, 1, 1/2), \quad (1, -1, -1/2).$$

これを $f(x, y) = xy$ に代入して, 最適解 = $(1, 1, 1/2)$, 最適値 = 1 となる. $\square$

II. 不等式制約条件付きの最適化問題

“真に不等式の制約条件” が付いた最適化問題を考える. この問題は “等式制約条件付きの最適化問題” より格段に複雑である.

問題 2.4 (不等式制約条件付きの最適化問題). (2.1) であるような滑らかな関数 $f(x, y), g(x, y)$ と実数 b が与えられている. このとき

$$(2.7) \quad \max_{(x, y)} f(x, y) \quad \text{subjects to} \quad g(x, y) \leq b$$

の値と最適解 (x^*, y^*) をもとめよ. $\spadesuit$

この問題も最適解 (x^*, y^*) の満たす十分条件を調べて, 最適解の候補者を探す方法で解決できる. ただ一般に, 等式制約条件の場合より “候補者の数” が多くなる.

前と同様に (2.7) に対応するラグランジュ関数を

$$(2.8) \quad L(x, y, \lambda) \equiv f(x, y) + \lambda(b - g(x, y))$$

で定義する*4.

定理 2.5 (クーン・タッカー). 不等式制約条件付き最適化問題 (2.7) の最適解 (x^*, y^*) が (2.4) を満たしている. このとき, ある $\lambda^* \in \mathbf{R}^1$ が存在して, 次が成立する:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} L_x(x^*, y^*, \lambda^*) &= f_x(x^*, y^*) - \lambda^* g_x(x^*, y^*) = 0, \\ L_y(x^*, y^*, \lambda^*) &= f_y(x^*, y^*) - \lambda^* g_y(x^*, y^*) = 0, \\ L_\lambda(x^*, y^*, \lambda^*) &= b - g(x^*, y^*) \geq 0 \quad \text{and} \quad \lambda^* \geq 0, \\ \lambda^* L_\lambda(x^*, y^*, \lambda^*) &= \lambda^*(b - g(x^*, y^*)) = 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

*4 (2.7) で制約条件が逆の不等式 $g(x, y) \geq b$ ならラグランジュ関数は (2.8) と別のものとなる. この点が, “等式制約条件の場合” と異なる.

この定理 (クーン・タッカー) から, 問題 2.1 の解 (x^*, y^*) が次の手順で求められることが判った:

=====

Step 1. (2.9) を満たす (x^*, y^*, λ^*) をすべて見つける. 定理 2.5 より, これらの (x^*, y^*, λ^*) が最適解の候補者である.

Step 2. Step 1 で求めた (x^*, y^*, λ^*) を実際に $f(x, y)$ に代入し, 真の最適解を決定する.

=====

例 2.6. 不等式制約条件付きの最適化問題 (2.7) で

$$f(x, y) = x^2 + y, \quad g(x, y) = x^2 + y^2, \quad b = 1$$

とし, クーン・タッカーの定理により最適値と最適解を求める.

この場合のラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

となる. (2.9) より最適解の候補者を求めよう.

$$\begin{aligned} 0 &= L_x(x, y, \lambda) = 2x - 2\lambda x, & 0 &= L_y(x, y, \lambda) = 1 - 2\lambda y, \\ 0 &\leq L_\lambda(x, y, \lambda) = 1 - x^2 - y^2, & \lambda &\geq 0, \\ 0 &= \lambda L_\lambda(x, y, \lambda) = \lambda(1 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

第 1 式より, “ $x \neq 0, \lambda = 1$ ” もしくは “ $x = 0$ ”. 一方, 第 2 式より, “ $\lambda \neq 0, y = 1/2\lambda$ ” が判る. 第 3~第 5 式も考慮すると,

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ の場合} &\Rightarrow (x, y, \lambda) = (0, 1, \frac{1}{2}), \\ x \neq 0, \lambda = 1 \text{ の場合} &\Rightarrow (x, y, \lambda) = (\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1) \end{aligned}$$

が最適解の候補者となる. この候補者を実際に $f(x, y)$ に代入して, $(x^*, y^*) = (\pm\sqrt{3}/2, 1/2)$ が最適解 (二つある), 最適値は $5/4$ である. $\square$

3 最適化問題の応用

企業および消費者の行動を最適化問題の立場から説明する.

I. 消費者の行動

個人の消費者が 2 種類の商品 X, Y を量 x, y だけ消費する. 彼は

予算制約の下で, 自己の満足 (=効用) が最大になる

ように行動する. ここで満足の度合いは, 効用関数 $u(x, y)$ で表現出来るとする. 効用関数は “消費が多ければ, 満足が大きい” ので,

$$u(x, y) \text{ は } x, y \text{ の増加関数} \Leftrightarrow u_x(x, y) \geq 0, u_y(x, y) \geq 0$$

を満たしている.

例 3.1. 消費者の予算を m , 効用関数を $u(x, y) = x^2 y$ としたときの, 消費者の行動を調べる.

商品 X の価格を P_X , Y の価格を P_Y とすると, 消費者の行動は, 次の最適解である:

$$(3.1) \quad \max_{x \geq 0, y \geq 0} u(x, y) \quad \text{subjects to} \quad P_X x + P_Y y \leq m$$

この (3.1) に対応するラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda) = x^2 y + \lambda(m - P_X x - P_Y y)$$

となり, クーン・タッカーの定理 2.5 から

$$\begin{aligned} 0 &= L_x(x, y, \lambda) = 2xy - \lambda P_X, & 0 &= L_y(x, y, \lambda) = x^2 - \lambda P_Y, \\ 0 &\leq L_\lambda(x, y, \lambda) = m - P_X x - P_Y y, & \lambda &\geq 0 \\ 0 &= \lambda L_\lambda(x, y, \lambda) = \lambda(m - P_X x - P_Y y). \end{aligned}$$

$u(0, y) = 0$ だから $x \neq 0$. よって第 1 式と第 2 式から

$$\frac{2xy}{P_X} = \lambda = \frac{x^2}{P_Y} \Rightarrow x = \frac{2P_Y}{P_X} y$$

第 5 式から

$$0 = m - P_X \times \frac{2P_Y}{P_X} y - P_Y y \Rightarrow y = \frac{m}{3P_Y}, \quad x = \frac{2m}{3P_X}$$

つまり最適解 (x^*, y^*) は $(2m/3P_X, m/3P_Y)$. $\square$

II. 企業の行動

企業は, 資本 K と労働 L から製品を量 q だけを生産する. ここで企業は

資本と労働量の制約の下で, 利潤が最大になる

ように行動する.

例 3.2. 生産量 q は

$$q = 6 K^{1/3} L^{1/2}$$

で表される (=生産関数). いま, 生産物の価格 p , 資本の価格^{*5} r , 労働の価格^{*6} w とすると,

$$\text{企業の利潤 } \pi(K, L) = pq - rK - wL = 6p K^{1/3} L^{1/2} - rK - wL$$

制約条件 $K \geq 0, L \geq 0$ の下で, $\pi(K, L)$ を最大にする.

まず極値は次式を満たしている.

$$0 = \pi_K(K, L) = 2p K^{-2/3} L^{1/2} - r, \quad 0 = \pi_L(K, L) = 3p K^{1/3} L^{-1/2} - w$$

^{*5} 資本を借りるための貸貸率.

^{*6} 賃金率

これから,

$$(K^*, L^*) = \left(\frac{6^3 p^6}{r^3 w^3}, \frac{18^2 p^6}{r^2 w^4} \right)$$

が最適解の候補者である.

この (K^*, L^*) で極大値をとるか調べる.

$$\begin{aligned} \pi_{KK}(K, L) &= -\frac{4}{3} p K^{-5/3} L^{1/2} \Rightarrow \pi_{KK}(K^*, L^*) < 0 \\ \pi_{LL}(K, L) &= -\frac{2}{3} p K^{1/3} L^{-3/2} \Rightarrow \pi_{LL}(K^*, L^*) < 0 \\ H(K, L) &\equiv \pi_{KK}(K, L) \times \pi_{LL}(K, L) - \pi_{KL}(K, L)^2 = p^2 K^{-4/3} L^{-1} \\ &\Rightarrow H(K^*, L^*) > 0 \end{aligned}$$

となるから, 定理 1.4 より極大値となることが示された. $\square$

4 練習問題

問題 4.1. 次の関数の極値をもとめ, 極大/極小の判定を行え.

$$(i) \ f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3, \quad (ii) \ f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x. \quad \heartsuit$$

問題 4.2. つぎの等式制約条件つき最適化問題を解け.

- (i) $\max(x + y)$ subject to $2x^2 + y^2 + y = 3$.
(ii) $\min(-x^2 y)$ subject to $x + y^2 = 5$.
(iii) 制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で $x^3 + y^3$ の最大値と最小値をもとめよ.
(iv) $\max(xy + yz + zx)$ subject to $x + y + 2z = 3$ and $x + 3y = 1$.
[ヒント]: ラグランジュ関数は

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz + zx + \lambda_1(3 - x - y - 2z) + \lambda_2(1 - x - 3y).$$

- (v) $\max(x + 2y + z)$ subject to $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and $x + z = 1$. $\heartsuit$

問題 4.3. 次の不等式制約条件付き最適化問題を解け.

- (i) $\max(x^2 + y^2)$ subject to $2x^2 + y^2 \leq 4$.
(ii) $\max(x^2 + y)$ subject to $2x^2 + y^2 \leq 4$.
(iii) $\max(2(x - y)^2 - x^4 - y^4)$ subject to $x^2 + y^2 \leq 5$. $\heartsuit$

問題 4.4. 次の不等式制約条件付き最適化問題を解け.

- (i) $\max(x^2 + y^2)$ subject to $x^2 + y^2 \leq 4$ and $x \leq 1$.
[ヒント]: ラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 \lambda_1 (4 - x^2 - 2y^2) + \lambda_2 (1 - x).$$

(ii) $\max(xy)$ subject to $2x + y^2 \leq 3$ and $x \geq 0$.

(iii) $\max(2x - y)$ subject to $x^2 - y \leq 1$ and $x \geq 0$. ♡

付録 A 多次元の制約条件付きの最適値問題

この節は付録であり、講義/試験の対象外である。

I. 後で述べる“陰関数定理”を使うと、多次元の等式制約条件をつけた最適値問題が解ける。

問題 付録 A.1 (多次元の等式制約条件付き最適値問題). N, M を $N \geq M$ なる自然数とする. 滑らかな関数

$$f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}, \quad g_1: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}, \quad \dots, \quad g_M: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R},$$

と実数 $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_M)$ が与えられている. このとき

$$(\text{付録 A.1}) \quad \max_{(x_1, \dots, x_N)} f(x_1, \dots, x_N) \quad \text{subject to} \quad g_k(x_1, \dots, x_N) = b_k \quad k = 1, \dots, M,$$

の解と最適解 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ をもとめよ. ♠

この (付録 A.1) に対応する ラグランジュ関数は

$$(\text{付録 A.2}) \quad \begin{aligned} L(x_1, \dots, x_N, \lambda_1, \dots, \lambda_M) \equiv & f(x_1, \dots, x_N) + \lambda_1 (b_1 - g_1(x_1, \dots, x_N)) \\ & + \dots + \lambda_M (b_M - g_M(x_1, \dots, x_N)) \end{aligned}$$

である.

定理 付録 A.2 (ラグランジュの乗数法). 多次元の“等式制約条件付き最適化問題 (付録 A.1)”の最適解 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ にたいし

$$\mathbf{v}_1 \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_N}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_N}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{v}_M \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial G_M}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial G_M}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial G_M}{\partial x_N}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}$$

とおくとき、ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M$ は線形独立である.

このとき、ある $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_M^*)$ が存在して、次が成立する:

$$(\text{付録 A.3}) \quad \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j}(x_1^*, \dots, x_N^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_M^*) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^*, \dots, x_N^*) \\ &\quad - \lambda_1^* \frac{g_1}{\partial x_j}(x_1^*, \dots, x_N^*) - \dots - \lambda_M^* \frac{g_M}{\partial x_j}(x_1^*, \dots, x_N^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k}(x_1^*, \dots, x_N^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_M^*) &= b_k - g_k(x_1^*, \dots, x_N^*) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad \diamond \end{aligned}$$

===== 参考 =====

定理 付録 A.3 (陰関数定理). N, M を $N \geq M$ なる自然数とする. 関数

$$\mathbb{G} = (G_1, G_2, \dots, G_M) : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^M$$

は連続微分可能. ある $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \in \mathbf{R}^N$ があり,

$$\mathbb{G}(\mathbf{x}^*) = 0.$$

さらに

$$\mathbf{v}_1 \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_N}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_N}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{v}_M \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial G_M}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial G_M}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial G_M}{\partial x_N}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}$$

とおくとき, ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M$ は線形独立.

このとき, 微分可能な関数

$$\mathbb{H} = (H_1, H_{N-M+1}, \dots, H_M) : \mathbf{R}^{N-M} \rightarrow \mathbf{R}^M$$

が存在し, $x_j^* = H_j(x_{M+1}^*, x_{M+2}^*, \dots, x_N^*)$, $j = 1, 2, \dots, M$. つまり

$$\mathbb{G}(H_1(x_{M+1}^*, x_{M+2}^*, \dots, x_N^*), \dots, H_M(x_{M+1}^*, x_{M+2}^*, \dots, x_N^*), x_{M+1}^*, \dots, x_N^*) = 0. \quad \diamond$$

=====

II. “複数の不等式制約条件を付けた最適化問題” を考える場合がある.

問題 付録 A.4 (多次元の不等式制約条件付き最適値問題). $f(x, y), g^{(1)}(x, y), \dots, g^{(m)}(x, y)$ を与えられた滑らかな関数, $b^{(1)}, \dots, b^{(m)}$ を与えられた実数とする. このとき

$$\max_{(x, y)} f(x, y) \quad \text{subjects to} \quad g^{(1)}(x, y) \leq b^{(1)}, \dots, \text{and } g^{(m)}(x, y) \leq b^{(m)}$$

の値と最適解 (x^*, y^*) をもとめよ. ♠

これに対応するクーン・タッカーの定理もあるが, ここでは取り上げない.