

<http://mcobaya.hp.infoseek.co.jp/kisotokei/index.htm> 講義の Web site、

kiso.tokei@gmail.com レポート送付先

2008 年度 基礎統計 傾向と対策

以下では大文字で確率変数、小文字で定数を示す。

相関係数

練習問題：

0 でない a に対して、 $Y=aX+b$ が成立するとき、 $\text{cov}(Y, X)$, $V(Y)$ を $a, b, V(X)$ を使って表せ。

$\text{cov}(Y, X) / (V(X)V(Y))^{1/2} = a/|a|$ を示せ。

分布関数と密度関数の練習問題

X, Y が独立に $(0, 1)$ 上の一様分布に従うとき、 $T=\max(X, Y)$ の分布関数 $F_T(t)$ と密度関数 $f_T(t)$ を求めよ。

解答例： $F_T(t)=\Pr(T \leq t) = \Pr(\max(X, Y) \leq t) = \Pr(X \leq t \text{ and } Y \leq t) = \Pr(X \leq t)\Pr(Y \leq t) = t \cdot t$
($0 < t < 1$)

$f_T(t) = 2t$ ($0 < t < 1$) それ以外は 0

p.139 の練習問題（多変量分布の期待値と分散の導出）はやっておこう。

期待値と分散、共分散の練習：以下では確率変数を X, Y とし、 b, c は定数とする。

1. $E[(X-c)^2]$ を最小にする定数 c を求めよ。

解答例： $E[(X-c)^2] = E[X^2 - 2cX + c^2] = E[X^2] - 2c E[X] + c^2$ 。これを c についての微係数を 0 とおくと、 $c=E(X)$ を得る。

2. $S=Y-bX$ の分散を最小にする定数 b を求め、この b を X, Y の分散、共分散で表せ。そのときの $V(S)$ と $\text{Cov}(S, X)$ を求めよ。

3. $\text{cov}(X, Y-X)=0$ のとき、 $V(Y-X)=V(Y)-V(X)$ を示せ。

解答例： $V(Y)=V(X+Y-X)=V(X)+V(Y-X)+2\text{cov}(X, Y-X) = V(X)+V(Y-X)$

4. $\text{cov}(Y, X)=0$ で、 $V(X)=V(Y)=1$ とする。 $\text{Cov}(Y, rY+(1-r^2)^{1/2}X)=r$, $V(rY+(1-r^2)^{1/2}X)=1$ を示せ。

応用例： X, Y はそれぞれ Xerox, Sony 株を一単位もっているときの収益とする。Xerox を 1 単位、Sony を t 単位所有したときの、収益合計の期待値を m , 標準偏差を d とする。 m/d , もしくは $(E(X+tY))^2/V(X+tY)$ を最大にする t を $E[X], E[Y], V(X), V(Y), \text{cov}(X, Y)$ で表せ。(存在するとして)

二項分布の問題

1. $0 \leq p \leq 1$ のとき、 $p(1-p) \leq 1/4$ を示せ。

解答例： $p(1-p) - 1/4 = -p^2 + p - 1/4 = -(p - 1/2)^2 \leq 0$

2. $X_1, \dots, X_N$ が独立なベルヌーイ分布にしたがうとき、 $(X_1, \dots, X_N)/N$ の分散を求め、 $N=200$ のときの分散と標準偏差を $P=1/2$ において求めよ。

難 p.129(6.43) の密度関数を求めよ。

和の分布の練習問題(難)

X, Y が独立な $(0, 1)$ 上の一様分布に従う場合、 $T=X+Y$ の分布関数 $F_T(t)$ と密度関数 $f_T(t)$ を求めよ。

解答例: $t < 1$ のときと $t > 1$ の時で分けて考える。 $t < 1$ のとき、下のピンク色をつけた部分

$(x+y < t, 0 < x < 1, 0 < y < 1)$ では、 x は 0 から t まで動き、 y は 0 から $t-x$ まで動くことができる。

一様分布の密度関数は $f_{X,Y}(x,y) = 1$ ($0 < x, y < 1$) $= 0$ (それ以外) であらわされるので、

$$F_T(t) = \Pr(X+Y < t) = \Pr(Y < t-X, 0 < X < t) = \int_0^t \left[\int_0^{t-x} 1 dy \right] 1 dx = \int_0^t (t-x) dx = t^2 - (1/2)t^2 = (1/2)t^2$$

$$f_T(t) = t$$

$t > 1$ の時、 $x+y > t$, $0 < x < 1, 0 < y < 1$ の領域 (黄色の部分) では x は $t-1$ から 1 まで動き、 y は $t-x$ から 1 まで動く。したがって、

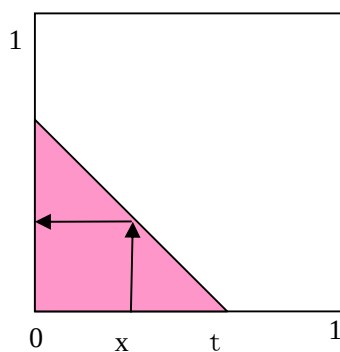
$$\Pr(X+Y > t) = \Pr(1 > Y > t-X, 1-t < X < 1) = \int_{t-1}^1 \left[\int_{t-x}^1 1 dx \right] 1 dy = \int_{t-1}^1 (1-t+x) dx = (1-t) * (2-t) + (1/2)[1 - (1-t)^2] = (1/2)(2-t)^2$$

$$F_T(t) = \Pr(X+Y < t) = 1 - \Pr(X+Y > t) = 1 - (1/2)(2-t)^2$$

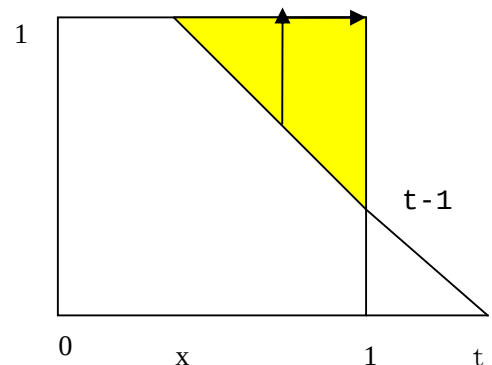
$$f_T(t) = 2-t$$

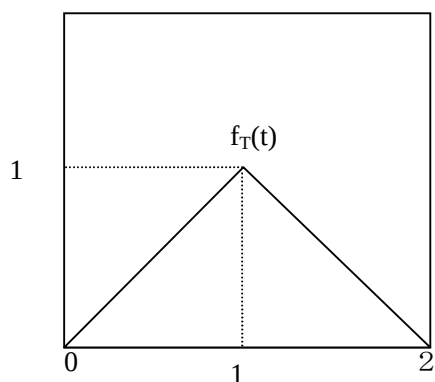
以上まとめると、 $f_T(t) = t$ ($0 < t < 1$), $f_T(t) = 2-t$ ($1 < t < 2$) $f_T(t) = 0$ それ以外 0 となる。(下の一番右の図のとおり)

$t < 1$ のケース



$t > 1$ のケース





例題：指数分布の変数の和の分布

$f(x)=\exp(-x)$ ($x>0$), $=0$ ($x<0$), $E[x]=1$, $V(x)=1$

$y=kX$ の分布の密度関数は $f(y)=(1/k)\exp(-y/k)$, 期待値は k , 分散 k^2

X と Y が独立に期待値 1 の指数分布に従うならば, convolution の公式から

$X+Y$ の密度関数は $f(x)f(t-x)$ を x について積分したもの $0<x<\infty$ かつ $0<t-x<\infty$ すなわち, $x<t$ のとき,

$f(x)f(t-x)=\exp(-x)\exp(-t+x)=\exp(-t)$ であり, その他のときは 0. したがって,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)f(y)dy = f(t) = \int_0^t \exp(-t)dx = t \cdot \exp(-t)$$