幾何分布と指数分布

1　幾何分布と指数分布の密度

パラメータ p の幾何分布：$\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\cdots$
　平均　$E(X)=1/p$、分散　$var(X)=(1-p)/p^2$
パラメータ λ の指数分布：$f_X(t)=\lambda e^{-\lambda t}, t>0$
　平均　$E(X)=1/\lambda$、分散　$var(X)=1/\lambda^2$
　問 1 幾何分布、指数分布の平均と分散を確かめよ。

2　メモリーレス

　分布が「メモリーレス」とは条件付確率についての性質：

$$\mathbb{P}(X\geq t+s|X\geq t)=P(X\geq s)$$

が成り立つときをいう。
　問 2 指数分布と幾何分布については、「メモリーレス」の性質をもつことを示せ。

3　和の分布

「和の分布」独立な確率変数 X,Y に対して和 $X+Y$ の分布の密度関数 f_{X+Y} あるいは離散密度 $p_{X+Y}(k)=\mathbb{P}(X+Y=k)$ はつぎで与えられる：
（連続型）$F_X(x)=\mathbb{P}(X\leq x)$ (事象が不等号で定められ、向きに注意) $f_X(x)=\dfrac{dF_X(x)}{dx}$, x は実数。（微分して得られた導関数）

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \end{aligned}$$

(離散型)$p_X(k)=\mathbb{P}(X=k)$ (等号に対する事象の確率)k は整数値。

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(z) &= \sum_k p_X(k)p_Y(z-k) \\ &= \sum_j p_X(z-j)p_Y(j) \end{aligned}$$

　問 3 2 つの独立な 2 項分布 $B(n,p)$, $B(m,p)$ の和も 2 項分布 $B(n+m,p)$ になることを示せ。
　問 4 2 つの独立な正規分布 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$, $i=1,2$ の和の分布を計算せよ。

4　ポアソン過程

　互いに独立で同じパラメータ λ の指数分布にしたがう $X_1,X_2,\cdots$ から $S_0=0$, $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n, n=1,2,\cdots$ とおく。これから新しいポアソン過程とよぶ $N_t, t\geq 0$ をつぎで定める：

$$N(t)=\sup\{k\geq 1|S_k\leq t\}$$

つまり $N(t)=n \quad\Leftrightarrow\quad S_n\leq t, S_{n+1}>t$。ここで inf は最小 min を拡張した下限（かげん）（下界のうちで最大のもの）の記号。sup は上限（じょうげん）を表し、上界のうち最小なもの。
　問 5 $\mathbb{P}(N_t=k)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$, $k=0,1,2$ を示せ。
　(注意）ポアソン過程におけるジャンプの間隔は指数分布に従う。