

推定のレポート問題

正規分布, t -分布, カイ 2 乗分布それぞれのパーセント点の値 $z_\alpha, t_\alpha(n), \chi_\alpha^2(n)$ については統計学のテキスト(たとえば「統計学演習」村上正康他著, 倍風館, 付表 203, 205, 206 ページを参照, あるいはホームページに <http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/yasuda/index-j.htm>) には載っている。

問 1 . 平均 μ , 分散 σ^2 をもつ母集団から, 独立な大きさ 3 の標本 X_1, X_2, X_3 を得たとき,

$$\begin{aligned} T_1 &= X_1, \\ T_2 &= \frac{X_1 + X_3}{2}, \\ T_3 &= \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \end{aligned}$$

つぎの問いに答えよ。

- (1) いずれも平均 μ の不偏推定量であることを示せ。
- (2) これらの分散を計算して, このなかでは T_3 がもっとも分散が小さくなることを示せ。

問 2 .

- (1) つぎの命題を示せ。 $a, b, c > 0, a + b + c = 1$ のとき, $a^2 + b^2 + c^2$ が最小となるのは, $a = b = c = 1/3$ であることを示せ。
- (2) 平均 μ , 分散 σ^2 をもつ母集団から, 独立な大きさ 3 の標本 X_1, X_2, X_3 を得たとき, $T = aX_1 + bX_2 + cX_3$ が μ の不偏推定量となるためにはどういう条件があればよいか? またそのとき最小となる分散を計算せよ。

問 3 . あるクラス 40 人の試験得点分布は正規分布にしたがうという。得点の平均が 58.2, 標準偏差は 10.3 であった。母平均の 90% 信頼区間を求めよ。

問 4 . 平均がゼロという正規母集団から大きさ 10 の標本 $X_i, i = 1, 2, \dots, 10$ を抽出した。データの和と 2 乗和を計算すると, $\sum_{i=1}^{10} X_i = 3.192, \sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 37.983$, であった。このとき, 分散の 95% 信頼区間を求めよ。

問 5 . ある集団の喫煙率を調べるために, 300 人に質問をしたところ, 72 人が喫煙をしていた。このとき, 集団の喫煙率に対する, 90% 信頼区間を求めよ。