区間推定

母集団の未知母数 θ の推定には，標本の関数で定めた推定量を用いた。しかし，ある適当な範囲内にあるだろうと考えることも自然に思いつく。１つの推定量でなく，２つの推定量をもちいて，未知母数を推定するための区間をつくる。実際の区間を定めるには，推定の精度と関連する。正確さを求めれば，どうしても区間の幅は広くなり，区間の幅が小さくしようとすれば，正確さを緩やかにしなければならない。正確さ（未知母数を含む確率）を信頼係数とよび，この条件でなるべく最短な区間を定めようとすることが区間推定である。

標本値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ から区間を作るために２つの統計量で区間 $[T_1, T_2]$ をつくり, この区間に対し，推定した精度の基準となる確率 $P(T_1 \leq \theta \leq T_1)$ が一定の値 $1-\alpha$ を保証してなるべく短い区間に定める。端点の統計量 T_1, T_2 を信頼限界とよび，正確さの基準のなる確率は，経験的に９０%，９５%，９９%にとることが多い。以下，公式としてまとめよう。いづれも信頼係数は $1-\alpha 100\%$ とし, 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_i X_i$,　標本不偏分散 $u^2 = \dfrac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2$,　標本比率（平均）$\overline{p} = \dfrac{1}{n}\sum_i X_i, (where X_i = 0 or 1)$ とする。また正規分布，ｔ－分布，カイ２乗分布それぞれのパーセント点の値 z_α, $t_\alpha(n)$, $\chi^2_\alpha(n)$ をもちいる。これらは統計学のテキスト（たとえば「統計学演習」村上正康他著，倍風館，付表 203，205，206 ページを参照，http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/ yasuda/index-j.html）には載っている。

(1) 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ において未知母数が平均 μ の信頼区間:

分散が既知のばあい;

$$\overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

分散が未知で，大標本のばあい（正規近似）;

$$\overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{u^2}{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{u^2}{n}}$$

分散が未知で，小標本のばあい：

$$\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{u^2}{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{u^2}{n}}$$

(2) 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ における分散の信頼区間：

分散が未知で，大標本のばあい;

$$\frac{(n-1)u^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)u^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$$

(3) ２項母集団における比率（割合）の信頼区間

大標本のばあいの信頼区間：

$$\overline{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \leq p \leq \overline{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$$