点推定

母集団分布の密度関数 $f(x;\theta)$ における未知母数 θ を推定するために，この母集団からの無作為抽出された大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$（標本は確率変数であるから，大文字をつかうが，小文字で表すこともある）のある関数 $T = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を定めることで，θ を推定することを考える。これを **点推定** をいい，この関数で定める統計量のことを**推定量**，実際の標本値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ から T を計算した値 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ のことを**推定値** という。では推定量をどのように定めればよいか？未知の母数に相応しい推定量としては，つぎの性質をもつことが望ましい。

(1) 統計量の期待値が推定する未知の値に等しい。つまり

$$E[T(X_1, X_2, \cdots, X_n)] = \theta$$

のときを，**不偏推定量**という。推定量の期待値（平均）を推定したい母数（パラメータ）の値に等しくさせることである。つまり平均的な意味で偏りがないこと。

(2) 任意の正数 ϵ に対して，

$$P(|T_n - \theta| > \epsilon) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ここで T_n は n 個の標本から計算された推定量とし，これを**一致推定量**という。標本の大きさが大きくなればなるほど，推定量は母数とのズレが少なくなることである。

(3) 不偏性に加えて，さらに分散を小さくする意味でよい推定量を考える。分散を比較して小さいほうがより有効な推定量という。すべての不偏推定量のなかで分散が最小な推定量を**有効推定量（分散最小推定量）**という。適当な条件があると，不偏推定量に対する分散の最小値が求められる。

$$Var\{T\} \geq \frac{1}{nE\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(X;\theta)\right)^2\right]}$$

この評価の下限をクラメル・ラオの不等式という。ただしつねに有効推定量が存在するわけではない。

与えられた推定量がどのような性質をもつかが，代表的な３つの推定量であるが，実際に推定量を見つける方法として，最尤（さいゆう）推定法（ＭＬ法）がある。

母集団分布を $f(x;\theta)$ とするとき，この母集団から標本値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を得る確率は $L(\theta) = f(X_1;\theta)f(X_2;\theta)\cdots f(X_n;\theta)$ で，この確率を尤度とよぶ。これを最大にするような θ を考えると標本の関数であって，このように定めた推定量を **最尤推定量** という。最大を求める計算には，直接求めることと対数をとって求めることとは同値であるから，対数尤度 $\log L(\theta) = \sum_i \log f(X_i;\theta)$ を使うことがよく行われる。これを最大 $\max_\theta \log L(\theta)$ にするものを最大対数尤度という。またこの最尤推定量を求めるために（いわゆる極値（最大最小）となる必要条件）$\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta) = 0$ を最尤方程式という。

つぎの命題が成り立つ：

（1） 標本平均は母平均（母集団分布の平均）の不偏推定量である。

（2） 標本分散は，母分散（母集団分布の分散）の不偏推定量とはならないが，標本不偏分散は不偏推定量である。

（3） 母集団分布が分散をもつと仮定すれば，標本平均は母平均の一致推定量である。

（4） もし n 個の標本から標本平均をつくると，すべてデータを用いた場合がもっとも分散が小さくなる。すなわちより有効な推定量である。

（5） 分散を既知とした正規母集団において，平均に対する有効推定量は標本平均である。