仮説検定の例題

例題 1.（平均値の検定）正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ において，分散 $\sigma^2 = 15^2 = 225$ は既知であるとして，100 個のデータから計算された標本平均が $\overline{x} = 38.0$ であった。このとき，帰無仮説 $H_0 : \mu = 40$，対立仮説 $H_0 : \mu \neq 40$ の有意水準 $\alpha = 0.05$ の検定をおこなえ。

（解）母集団分布は正規分布であり，$\sigma^2 = 15^2 = 225$ は既知として与えられているから，検定統計量は，$z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \dfrac{\overline{x} - 40}{\sqrt{225/100}} = -1.33$, 対立仮説から両側検定を考える。有意水準は $\alpha = 0.05$ で，両側にそれぞれ $\alpha/2 = 0.025 = 2.5\%$, に対する標準正規分布のパーセント点を正規分布表（インターネットのホームページ，統計テキストの付表など）から 読み取ると，$z_{\alpha/2} = z_{0.0025} = 1.960$ である。したがって棄却域は $|z| > 1.960$ を得る。この棄却域と検定統計量の値，すなわち $z = -1.33$ との大小関係を比較すると，棄却域に含まれない（棄却域に落ちない）ので，帰無仮説は棄却されない，いいかえると，帰無仮説は採択される。つまり 100 個の標本平均値 $\overline{x} = 38.0$ を得たが，このデータは正規分布 $N(40, 225)$ からの抽出されたと判断される。(終)

例題２ ある技師がニッケルの融点を 9 回測定して，つぎの値を得た（単位：^oC)。

1475 1420 1433 1452 1441 1466 1432 1453 1414

この結果はニッケルの真の融点とされている 1455^oC に矛盾しないという仮説を有意水準 5% で検定せよ。

（解）分布は明記されていないが，正規分布であるとする。また対立仮説は問題の意図から，両側検定，すなわち

$$H_0 : \mu = 1455 \qquad H_1 : \mu \neq 1455$$

とすることが適当である。与えられたデータから，検定統計量の値を計算する。まず変量を $x_1, x_2, \cdots, x_9$ とおき，$n = 9, \sum_i x_i = 12986, \sum_i^2 = 18740684$ となる。(注意；このデータのように，2 乗すると桁数が多くなる。電卓等の有効計算桁数を正確にするためには，分散の計算は，直接 2 乗するのでなく，変数変換，つまり各データから 1400 を引いて，小さい数字の平均と分散を計算して，もとにもどすこと，を行うべきである。）題意より，分散が未知の場合であり，$\alpha = 0.05, \nu = 9 - 1$ のｔ－分布表を用いる。$t_{0.025}(8) = 2.306$ であるから，棄却域は $|t| > 2.306$ つまり，$(-2.306 < t < 2.306)$。与えられた標本値から検定統計量の値は，

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{u^2/n}} = \frac{1442.9 - 1455}{\sqrt{416.1/9}} = -1.78$$

この値は棄却域に落ちないから，帰無仮説 H_0 は棄却されず，採択となる。したがってこの実験結果は真の融点とされている値と矛盾していない。(終)

例題３． ある年に行われたレスリングの重量別大会で，36 試合中の勝者の平均体重は 64.5Kg, 標準偏差は 3.2Kg であった。一方敗者はそれぞれ平均 62.8Kg, 標準偏差は 2.5Kg であったという。選手の体重は試合の勝ち負けに影響するといえるか？

(解)「体重は試合の結果に影響しない」という帰無仮説を立て，また選手の体重は正規分布に従うとして，有意水準を 5% として解く（問題には水準が要求されていないから，1% などとして解いてもよい)。帰無仮説をいいかえると,「すべての勝者の平均体重 μ_1 とすべての敗者の平均体重 μ_2 との間には差がない」ということであり，体重の多いほうが有利と考えられるので，ここでは右側検定を用いる。すなわち

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

また $n_1 = n_2 = 36$ だから，大標本による 2 つの平均値の差の検定における統計量と棄却域をもちいる。与えられた標本値から検定統計量の値は,

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{64.5 - 62.8}{\sqrt{\dfrac{3.2^2}{36} + \dfrac{2.5^2}{36}}} = 2.51$$

$\alpha = 0.05$ の右側 (片側）検定で，$z_0.05 = 1.645$ だから，棄却域は，$\{z : z > 1.645\}$ の区間である。したがって $z = 2.51 > 1.645$ より，帰無仮説は棄却される。体重はレスリングの試合結果に影響すると考えられる。(終)