試験問題、解答用紙(裏面使用可)　学籍番号：＿＿＿＿＿＿　名前：＿＿＿＿＿＿＿＿

問１.　平均 μ, 分散 σ^2 をもつ母集団から，独立な大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を得たとき，統計量 $T = \sum_i a_i X_i$ について

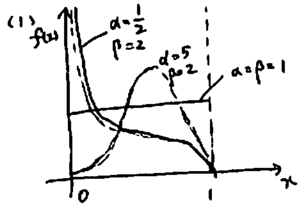
(1)　平均 μ の不偏推定量となる条件を求めよ。

(2)　この分散を計算して最も小さくなる場合は何か。

(1) $ET = \sum a_i EX_i = \mu \sum a_i = \mu$.　$\sum a_i = 1$

(1) $Var(T) = \sum a_i^2 Var(X_i) = \sigma^2 \sum a_i^2 \geq \frac{\sigma^2}{n}$　　$a_i = \frac{1}{n}$ $i=1,\dots,n$ のとき

問２.　ベータ分布 Beta(α,β) において、(1) $\alpha = 1, \beta = 1$ (2) $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (3) $\alpha = 5, \beta = 2$ に対する大体の形状を図示せよ。また平均と分散を求めよ。



$f(x) \propto x^{\alpha-1}\, \beta(1-x)^{\beta-1}$　　$0<x<1$

$$EX = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x\cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}}{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$Var(X) = \frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}}{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

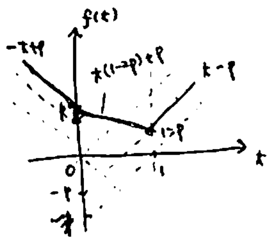
問３.　確率変数 $X \sim$ Bern$(1,p)$（ベルヌーイ分布）にしたがうとき、

(1)　$f(t) = E|X-t|$ を求め、図示せよ。

(2)　$f(t)$ の最小値は何か。

(1) $f(t) = \sum_{x=0,1} |x-t|\, p^x(1-p)^{1-x} = |t|(1-p) + |1-t|p$

$$= \begin{cases} -t(1-p) + (1-t)p & : t<0 \\ t(1-p) + (1-t)p & : 0<t<1 \\ t(1-p) - (1-t)p & : 1<t \end{cases} = \begin{cases} -t+p & : t<0 \\ t(1-2p)+p & : 0<t<1 \\ t-p & : 1<t \end{cases}$$



$$\min_t f(t) = \begin{cases} 1-p & 1-2p<0 & \frac{1}{2}<p & \text{at } t=1 \\ p & 1-2p>0 & \frac{1}{2}>p & \text{at } t=0 \end{cases}$$

問４.　$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ における μ, σ^2 は未知であるとする。この２つのパラメータの MLE を計算して求めよ。

$$\log f(x|\mu,\sigma^2) = \log \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

$\frac{\partial \log f(x)}{\partial \mu} = \frac{\partial \log f}{\partial \sigma^2} = 0$ より

$-\frac{1}{2\sigma^2}\, 2\sum_i (x_i-\mu) = 0$,　$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum(x_i-\mu)^2 = 0$

$\mu = \frac{1}{n}\sum x_i$,　$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2$

問５.　X, Y, Z は３項分布 $f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{n!}{x!y!z!}p_1^x p_2^y p_3^z$ ただし $x+y+z=n, 0 \leq x,y,z \leq n$, $0 < p_1, p_2, p_3 < 1, p_1+p_2+p_3 = 1$ とする。この平均ベクトル（各変数の平均を要素としたベクトル）、分散共分散行列（分散、共分散を要素とした行列）を計算せよ。

$$EX = \sum_{x,y,z} x\frac{n!}{x!y!z!}p_1^x p_2^y p_3^z = \sum_{x,y,z}\frac{n!}{(x-1)!y!z!}p_1^x p_2^y p_3^z = np_1\sum_{x,y,z}\frac{(n-1)!}{(x-1)!y!z!}p_1^{x-1}p_2^y p_3^z = np_1$$

$$EXY = \sum_{x,y,z} xy\frac{n!}{x!y!z!}p_1^x p_2^y p_3^z = n(n-1)p_1p_2\sum_{x,y,z}\frac{(n-2)!}{(x-1)!(y-1)!(z)!}p_1^{x-1}p_2^{y-1}p_3^{z} = n(n-1)p_1p_2$$

$Var(X) = EX(X-1) + EX - (EX)^2 = n(n-1)p_1^2 + np_1 - (np_1)^2 = -np_1^2 + np_1 = np_1(1-p_1)$

$Cov(X,Y) = EXY - EX\cdot EY = n(n-1)p_1p_2 - np_1np_2 = -np_1p_2$

$$E\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} np_1 \\ np_2 \\ np_3 \end{pmatrix}\qquad \Sigma = \begin{pmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 & -np_1p_3 \\ -np_1p_2 & np_2(1-p_2) & -np_2p_3 \\ -np_1p_3 & -np_2p_3 & np_3(1-p_3) \end{pmatrix}$$

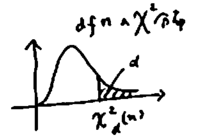
問６.　$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ における μ は既知とする。σ^2 に関する帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = 1$, 対立仮説 $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2\, (1 < \sigma_1^2)$ について

(1) 尤度比を求めよ。 (2) ネイマン・ピアソンの補題による検定を定めよ。

(1) $$L_x(H_0,H_1) = \frac{f(x|\mu,\sigma_1^2)}{f(x|\mu,1)} = \frac{(2\pi\sigma_1^2)^{-n/2}\exp\{-\sum_i(x_i-\mu)^2/2\sigma_1^2\}}{(2\pi)^{-n/2}\exp\{-\sum_i(x_i-\mu)^2/2\}} = \sigma_1^{-n}\exp\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\sum_i(x_i-\mu)^2\right\}$$

(2) $1<\sigma_1^2$ より　$\{L_x(H_0,H_1) > k\} \Leftrightarrow \{\sum_i(x_i-\mu)^2 > k'\}$

H_0 のもとでは $\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \sim \chi_n^2$ だから



検定統計量　$T = \sum(x_i-\mu)^2$

棄却域　$\{x=(x_1, \dots, x_n) : L_x(H_0,H_1) > k\} = \{t : t > \chi_\alpha^2(n)\}$