正規分布の和を直接計算

1　正規分布の密度関数

　独立な２つの正規分布に対して、和がやはり正規分布になることを示す。証明の方法はいくつか知られているが、直接計算しても導かれることをつぎで示そう。

確率変数 X, Y は独立であり、$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ならば、$X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

（証明）まず和の公式：

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

をもちいる。積分される関数は

$$\begin{aligned} f_X(z-y)f_Y(y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(z-y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\{\frac{(z-y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\}\right) \end{aligned}$$

　この指数部を計算していくと、

$$\begin{aligned} \frac{(z-y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} &= \frac{1}{\sigma_1^2}\left\{y^2 - 2(z-\mu_1)y + (z-\mu_1)^2\right\} + \frac{1}{\sigma_2^2}\left\{y^2 - 2\mu_2 y + \mu_2^2\right\} \\ &= \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)y^2 - 2\left(\frac{z-\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}\right)y + \frac{(z-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} \\ &= Ay^2 - 2By + C = A\Big(y - \frac{B}{A}\Big)^2 - \frac{B^2}{A} + C \end{aligned}$$

ここで　$A = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}, \quad B = \frac{z-\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}, \quad C = \frac{(z-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2}$ とおく。さらにこれを計算する。

$$\begin{aligned} \frac{B^2}{A} - C &= \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\left(\frac{z-\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}\right)^2 - \left(\frac{(z-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2}\right) \\ &= \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\left(\frac{(z-\mu_1)^2}{\sigma_1^4} + 2\frac{(z-\mu_1)\mu_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^4}\right)^2 - \frac{(z-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} \\ &= \frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(z-\mu_1)^2 + \frac{2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(z-\mu_1)\mu_2 + \frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\mu_2^2 - \frac{(z-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} \\ &= \left\{\frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right\}(z-\mu_1)^2 + 2\frac{z-\mu_1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\mu_2 + \left\{\frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right\}\mu_2^2 \\ &= \frac{-1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} + 2\frac{z-\mu_1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\mu_2 - \frac{-1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\mu_2^2 \\ &= \frac{-1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(z-\mu_1-\mu_2)^2 \end{aligned}$$

したがって指数部は

$$A\Big(y-\frac{B}{A}\Big)^2-\frac{B^2}{A}+C=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(y-\frac{B}{A}\right)^2+\frac{-1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(z-\mu_1-\mu_2)^2$$

正規分布の密度関数は積分をすると１になることから、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx=\sqrt{2\pi}\sigma$$

右辺は μ に依存しないことに注意する。つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}(y-\frac{B}{A})^2\right)dy=\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

したがって

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy\\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}(y-\frac{B}{A})^2\right)dy\times\exp\left(-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left(-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)
\end{aligned}$$

最後の式は $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ に対する密度関数であることを示している。(証明終わり）

問 1.1

定数 a,c に対し、確率変数 X が $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ならば、

$$aX+c\sim N(a\mu+c,a^2\sigma^2)$$

であることを示せ。

問 1.2

定数 a,b に対し、確率変数 X,Y は独立であり、$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ ならば、

$$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$$

であることを示せ。