解説と練習問題

1　場合の数、数え上げ

階乗（かいじょう、ファクトリアル）の記号とは $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 (n \geqq 1), 0! = 1$ とする。「r 種類の箱に n 個のボールの中から選んで入れること」が場合の数を計算するための基本のことがらです。

順列「区別のある箱」に「区別のあるボール」を入れる

重複順列「重複を許してひとつの箱に何個入れてもよい場合」という条件で取り出された場合の数。

$$n^r = \overbrace{n \times n \times \cdots n}^{r} \tag{1}$$

順列(permutation)「重複は許さずにひとつの箱には高々ひとつしか入れない場合」という条件で取り出された場合の数。

$$\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}^{r} = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{2}$$

組合せ「区別のある箱」に「区別のないボール」を入れる

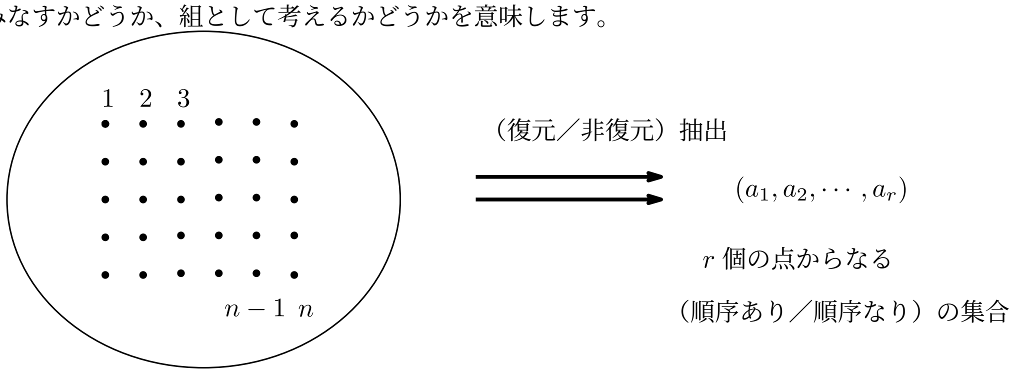
重複組合せ「重複を許してひとつの箱に何個入れてもよい場合」という条件。

$$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(r-1))}{r!} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} \tag{3}$$

組合せ(combination)「重複は許さずにひとつの箱には高々ひとつしか入れない場合」という条件。

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}{r!} = \frac{(n)_r}{r!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \tag{4}$$

復元抽出 (sampling with replacement) とは、取り出したボールの結果を記録してから戻し、つぎの取り出しをおこなうことで、一方、非復元抽出 (sampling without replacement) とは取り出したら、もとに戻さずに、残りの中からつぎの取り出しを行う方法です。順序あり、なしとは、1 回目、2 回目、などを異なるものとみなすかどうか、組として考えるかどうかを意味します。



復元	順序あり	n^r
復元	順序なし	$\binom{n+r-1}{r}$
非復元	順序あり	$(n)_r$
非復元	順序なし	$\binom{n}{r}$

問 1.1

箱とボールがそれぞれ $n = 5, r = 2$ のとき、重複順列、順列、重複組合せ、組合せについてすべての場合を書き並べてみなさい。そして答えが一致していることを確かめよ。たとえば 5 個のボールを a, b, c, d, e としてそれぞれ書き上げてみなさい。

2　パスカル三角形と２項係数

数式 $(a+b)^3$ を展開してみれば、

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

となることは知られている。ここでそれぞれの係数をみると、$1, 3, 3, 1$ となっている。$(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b) \times (a+b)$ であるから、たとえば $3a^2b$ という項は 第 1 項から a, 第 2 項から a, 第 3 項から b としたときには a^2b が得られ、これを他の取り出しかた、第 1 項から a, 第 2 項から b, 第 3 項から a ととしても同じ a^2b を得る。もうひとつの取り出し、第 1 項から b, 第 2 項から a, 第 3 項から a として、これらの 3 通りがすべて a^2b になるから、結局 a^2b の係数は 3 で、$3a^2b$ となることがわかる。つまり次のような塊りとしてくくることで理解できるでしょう。

$$(a+b)^3 = \quad aaa \quad \begin{array}{c} +aab \\ +aba \\ +baa \end{array} \quad \begin{array}{c} +abb \\ +bab \\ +bba \end{array} \quad +bbb$$

いくつかの項を計算してみます。最初の０次（ゼロ乗）が 0 となるのは計算ではなく、このように定めると考えていてください。順次に計算していけることがつぎの定理にある命題に結びついてくるはずです。

$$\begin{array}{llllllll}
(a+b)^0 \cdots\cdots & 1 & & & & & & \\
(a+b)^1 \cdots\cdots & 1 & 1 & & & & & \\
(a+b)^2 \cdots\cdots & 1 & 2 & 1 & & & & \\
(a+b)^3 \cdots\cdots & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
(a+b)^4 \cdots\cdots & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
(a+b)^5 \cdots\cdots & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
(a+b)^6 \cdots\cdots & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllllll}
\binom{0}{k} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}$$

三角形に並べられてこの表をパスカル三角形とよびます。パスカルは確率論ではよく出てきますが、日本の有名な江戸時代の数学者、関孝和もこの関係式を導いています。

ここで２項係数とはある自然数 n に対して $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ について

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

と表したものです。したがって一般式では

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

と表現できます。あるいは x の多項式にあらわすと、

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

となります。なぜ２項という理由は、$(a+b)$ の２つの項を展開しているからで、$(a+b+c)$ とか $(a+b+c+d)$ などの３項、４項もあって当然です。もし興味があれば、調べてみることもよいでしょう。

定理　つぎの関係式が成り立つ；

1. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ ·········　（加法性）
2. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ ·········　（対称性）

問 2.1
加法性の性質は、パスカル三角形を n が負の整数でも逆に順次書き並べていき、$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ が成り立つことを確かめ、さらにこの式は、どういうことを意味しているか、パスカル三角形の表で考えなさい。

問 2.2
つぎの式は定義に代入して計算すれば得られますが、パスカル三角形の表から考えてみなさい。さらに積和の計算式, $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ などとの関係を考えてみなさい。

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \cdots + \binom{r-1}{r-1}$$

問 2.3
定義の式を代入して計算してみて確かめなさい。

1. $\binom{m}{0}\binom{n-m}{r} + \binom{m}{1}\binom{n-m}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n-m}{0} = \binom{n}{r}$
(ヒント) $(1+x)^m(1+x)^{n-m} = (1+x)^n$ における x^r の係数比較。
2. $1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$ (ヒント)$(1+x)^n$ の展開式にて $x=-1$ を代入する。
3. $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$ (ヒント) $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n.$

(補足) トランプ５２枚のカードから、５枚取り出した場合、どの位の多くの種類ができるでしょうか？とくに見かけは大したことがないような $\binom{52}{5}$ の値が驚くほどの約 259 万通り (正確には 2598960) にも大きな数になりますが、この概算の計算を試みてみます。スターリングの公式

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

では

$$\begin{aligned}
&52! \\
&= 80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000 \\
&\sim 8.0658 * 10^{67} \\
&n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = 8.05290203838866 * 10^{67}
\end{aligned}$$

このようなたいへんな計算もパソコンのレベルでも計算できます。

問 2.4
いままで 2 項係数の表し方は ${}_nC_k$, C_k^n とも表したかもしれませんが、同じものです。しかしこれを拡張した意味を上の式ではこめているのです。たとえば、自然数 n のかわりに 実数 α としても意味をもちます。

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

これをもちいて、$k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して $\binom{-1}{k} = (-1)^k, \binom{-2}{k} = (-1)^k(k+1)$ などを計算してみなさい。どんなことが気づきますか？

3　和の記号

足し算をする一般項が規則的に表現できるときには、足し算を表す記号（シグマとよび） $\sum$ で書き表します。とくに範囲を指定しなくても自明であれば、和をとるインデックスの範囲を省略することもあります。またインデックスそのものを省略してしまうこともよくあります。

インデックス変数 $k(=1,2,3,\cdots,N)$ に対応する第 k 項が a_k ならば

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k + \cdots + a_N$$

と表します。和の計算にはいろいろ使う場合があり、略してつかうときもあります。

1. $\sum_j x^{(j)} = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} + \cdots + x^{(k)} + \cdots$
2. $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} = \{a_{11}+a_{12}\} + \{a_{21}+a_{22}\} + \{a_{31}+a_{32}\}$
3. $\begin{aligned}\sum_{i,j} a_{ij} = \quad & a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+\cdots \\ & +a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+\cdots \\ & +a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}+\cdots \\ & +\cdots\end{aligned}$
4. $\begin{aligned}\sum_{i\le j} a_{ij} = \quad & a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+\cdots \\ & \qquad +a_{22}+a_{23}+a_{24}+\cdots \\ & \qquad\qquad +a_{33}+a_{34}+\cdots \\ & \qquad\qquad\qquad +a_{44}+\cdots\end{aligned}$

という意味を表しています。範囲があらかじめ分かっている場合には省略をすることが多いです。インデックス変数には自然数がよく用いられます。

<u>和を求める計算式</u>

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = nc$ （n 個の定数和）
3. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)}/k = 1 - 1/2 + 1/3 + \cdots + (\pm 1)^n/n$
4. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
5. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ （2 乗和の公式）
6. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n\times(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} = 2\dbinom{n+2}{3}$

問 3.1

つぎの数列の和をシグマにより表現しなさい。

1. $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{31}$
2. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$
3. $\frac{1}{1} + (\frac{2}{1} + \frac{2}{2}) + (\frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3}) + (\frac{4}{1} + \frac{4}{2} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4}) + \cdots$

問 3.2

（積が 3 つ）各項が 3 個の積のとき、$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ がどういう式にまとめられるか考えなさい。そして実際いくつかについて確かめてみなさい。

問 3.3

(3 乗和の計算) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ を、上の問いで得られた結果ももちいて、求めてみなさい。ヒント：$k^2 = k(k-1)+k$

（三角型の和）正の整数 n が与えられたとき、$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{kj}$ をそれぞれの項で書き並べてみましょう。この和のとり方の順序がはじめ、列をとってから、行で加える順ですが、この順序を逆にしてはじめは行でとり、あとから列を加えることにすると、シグマを用いるとどういう式になりますか？ これを $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij}$ と書くことにします。インデックス j の始まりが i であることに注意します。また $\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}$ はどうなりますか？ i j の関係には等号が含まれていません。 さらに $\sum_{1\le i\le j\le k\le n} a_{ijk}$ を 3 つの和で表してみましょう。

２つの場合を書き並べれば、意味が理解できるはずです。

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+a_{i(i+1)}+a_{i(i+2)}+\cdots+a_{in}) \\
&= \quad a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+\cdots+a_{1n} \\
&\qquad\quad +a_{22}+a_{23}+a_{24}+\cdots+a_{2n} \\
&\qquad\qquad\quad +a_{33}+a_{34}+\cdots+a_{3n} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +a_{nn} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j}+a_{3j}+\cdots+a_{jj}) \\
&= \quad a_{11} \\
&\quad\ +a_{12}+a_{22} \\
&\quad\ +a_{13}+a_{23}+a_{33} \\
&\quad\ \vdots \\
&\quad\ +a_{1n}+a_{2n}+a_{3n}+a_{3n}+\cdots+a_{nn}
\end{aligned}
$$

問 3.4

正の整数 n に対して、つぎの数列の和を求めなさい。。

1. $\sum_{1\le i\le j\le n} 1$ （答え）$\dfrac{n(n+1)}{2} = \dbinom{n+1}{2}$
2. $\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j)$ （答え）$\dfrac{n(n+1)^2}{2} = (n+1)\dbinom{n+1}{2}$
3. $\sum_{1\le i\le j\le k\le n} 1$ （答え）$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} = \dbinom{n+2}{3}$
4. $\sum_{1\le i\le j\le k\le n}(i+j+k)$ （答え）$\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{4} = \dfrac{3(n+1)}{2}\dbinom{n+2}{3}$