正規分布の問題とその解答

$\boxed{\mathbf{1}}$　確率変数 X は $N(3,1)$ にしたがう。このときつぎの確率を求めよ。

(1) $P(\,2.5 < X < 3\,)$　　(2) $P(\,0.5 < |X-3|\,)$

$\boxed{\mathbf{2}}$　確率変数 Y は 正規分布 $N(10,4)$ にしたがう。つぎを正規分布表から求めなさい。

(1) $P(\,Y \geq 11\,)$　　(2) $P(\,9 < Y \leq 12\,)$　　(3) $P(\,Y < c\,) \geq 0.85$ を満たす c の値。

$\boxed{\mathbf{3}}$　「中心極限定理」について、約１５０字から２００字程度で述べよ。数式等をもちいてよい。

$\boxed{\mathbf{4}}$　２つの独立な正規分布にしたがう確率変数 $X \sim N(5,9)$, $Y \sim N(7,16)$ が与えられている。

(1) $X-Y$ はどういう分布にしたがうか。　　(2) $P(|X-Y| < 3)$ を求めよ。

1 確率変数 X は $N(3,1)$ にしたがう。このときつぎを求めよ。
(1) $P(\,2.5 < X < 3\,)$ (2) $P(\,0.5 < |X-3|\,)$

(解) 正規分布に関する確率計算は、正規分布表をもちいる。仮定から $X \sim N(3,1)$ であるから、$Z = \dfrac{X-3}{1} = X-3$ は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがう確率変数である。またその分布関数を ϕ とおくと (1) は $P(2.5 < X < 3) = P(-0.5 < X-3 < 0) = P(-0.5 < Z < 0) = P(0 < Z < 0.5) = \Phi(0.5) - 0.5 = 0.6915 - 0.5 = 0.1915$ ここで標準正規分布は原点で対称となることをもちいている。(2) については、絶対値が表れているから、これを不等式に直す必要がある。$P(0.5 < |X-3|) = P(0.5 < |Z|) = 1 - P(|Z| < 0.5) = 1 - P(-0.5 < Z < 0.5) = 1 - 2P(0 < Z < 0.5) = 1 - 2 \times 0.1915 = 0.6170$ と計算される。

コメント 最も基本的な正規分布の確率を計算する統計の問題である。一般の正規分布から、その平均と分散を用いて、標準正規分布へと変換する形も覚えておかねばならない。問いの（２）では不等式をいれて多少難があるかも知れないが、絶対値は誤差として用いられる基本量であるから、よく理解しておいてほしい。

2 確率変数 Y は 正規分布 $N(10,4)$ にしたがう。つぎを正規分布表から求めなさい。

(1) $P(\,Y \geq 11\,)$ (2) $P(\,9 < Y \leq 12\,)$ (3) $P(\,Y < c\,) \geq 0.85$ を満たす c の値。

(解) 新たに確率変数 $Z = \dfrac{Y-10}{\sqrt{4}}$ を定めると、仮定からこれは平均 0, 分散 1 の標準正規分布にしたがう。したがって、正規分布表から Z の確率計算ができる。また正規分布の場合には等号を含む不等号であっても、等号のない不等号であっても同じ確率であることに注意する。
(1) $P(Y \geq 11) = P\left(\dfrac{Y-10}{\sqrt{4}} \geq \dfrac{11-10}{\sqrt{4}}\right) = P(Z \geq 1/2) = 1 - P(Z \leq 1/2) = 1 - 0.6915 = 0.3085$
(2) $P(9 < Y \leq 12) = P\left(\dfrac{9-10}{\sqrt{4}} < \dfrac{Y-10}{\sqrt{4}} \leq \dfrac{12-10}{\sqrt{4}}\right) = P(-0.5 < Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 0.5)) = 0.6413 - 1 + 0.6915 = 0.5328$
(3) 正規分布表から $P(Z \leq 1.04) = 0.8508,\ P(Z \leq 1.03) = 0.8485$ の関係をもちいる。 この 2 点の線形補間をすると $\dfrac{1.04-1.03}{0.8508-0.8485}(0.85-0.8485) + 1.03 = 1.037$ よって $\dfrac{c-10}{2} = 1.037$ より、$c = 12.074$ となる。この値 c より大きくすると $P(Y < c)$ はより大きくなるから、12.074 以上の値であればよい。正確にはこれが最小の値でこれよりも大きい値であればよいから、４捨五入ではなく切り上げをする。

3 は適当な参考書をみてください。

4 2 つの独立な正規分布にしたがう確率変数 $X \sim N(5,9),\ Y \sim N(7,16)$ が与えられている。
(1) $X - Y$ はどういう分布にしたがうか。 (2) $P(|X-Y| < 3)$ を求めよ。

(解) (1) 新しい確率変数の分布は正規分布で、平均は $5-7=-2$, 分散は和となり、$9+16=25=5^2$ である。したがって $X-Y \sim N(-2,25)$ となる。(2) は $X-Y \sim N(-2,25)$ より、いま $Z = \dfrac{(X-Y)-(-2)}{\sqrt{25}} = \dfrac{X-Y+2}{5}$ とおけばこれは標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがうことになる。よって $P(|X-Y| < 3) = P(-3 < X-Y < 3) = P(\dfrac{-3+2}{\sqrt{25}} < Z < \dfrac{3+2}{\sqrt{25}}) = P(-0.2 < Z < 1)$ 正規分布表から、これは $\Phi(1) + \Phi(0.2) - 1 = 0.8413 + 0.5793 - 1 = 0.4206$ に等しい。

コメント 2 つの独立な正規分布にしたがう確率変数 X, Y から任意の定数 a, b をもちいて新しい確率変数 $Z = aX + bY$ を定まると、この Z の分布も正規分布にしたがう。つまり

$$\begin{array}{l} X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array} \quad \Rightarrow \quad Z = aX + bY \sim N\left(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2\right)$$

ここで注意することは 定数が負の値であってもよいが、$a=1, b=-1$ がこのときの問題であるが、平均は差になるが、分散は２乗をするから、和になることである。