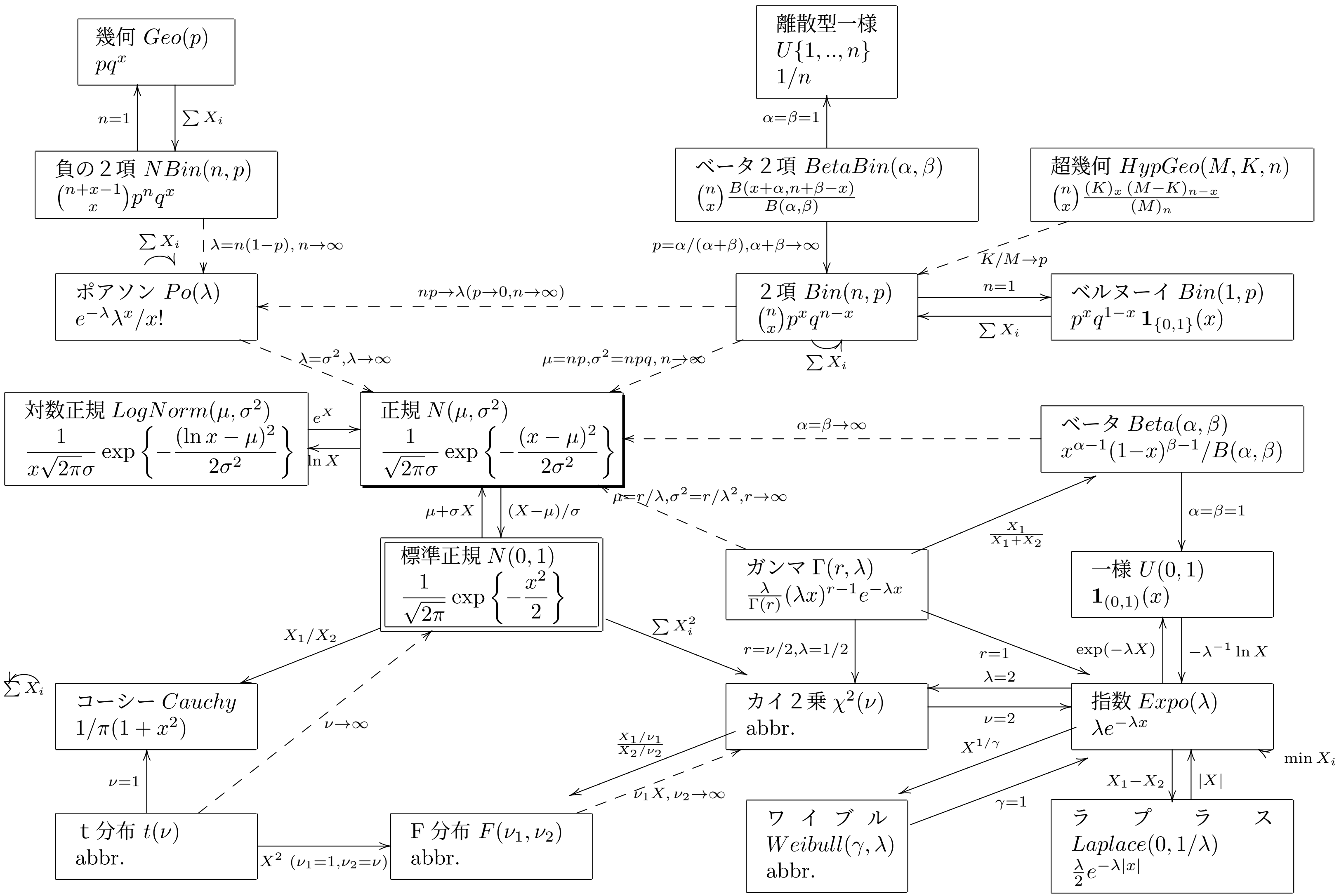
いろいろな統計分布

離散型分布	確率密度 $p_X(x)$	変数 x のとり得る値	X の平均	分散
一様分布 $U\{1,2,\cdots,N\}$	$\frac{1}{N}$	$\{1,2,\cdots,N\}$	$\dfrac{N+1}{2}$	$\dfrac{N^2-1}{12}$
ベルヌーイ分布 $Bin(1,p)$, $q=1-p$	$p^x\,q^{1-x}$	$\{0,1\}$	p	pq
2 項分布 $Bin(n,p)$, $q=1-p$	$\dbinom{n}{x}p^x\,q^{n-x}$	$\{0,1,2,\cdots,n\}$	np	npq
超幾何分布 $HypGeom(M,K,n)$	$\dfrac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}$ $=\dbinom{n}{x}\dfrac{(K)_x(M-K)_{n-x}}{(M)_n}$	$\{0,1,\cdots,n\}$	$n\frac{K}{M}$	$n\frac{K}{M}\left(1-\frac{K}{M}\right)\left(\frac{M-n}{M-1}\right)$
ポアソン分布 $Po(\lambda)$	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	$\{0,1,2\cdots\}$	λ	λ
幾何分布 $Geom(p)$, $q=1-p$	$p\,q^x$	$\{0,1,2,\cdots\}$	q/p	q/p^2
負の 2 項分布 $NegBin(r,p)$, $q=1-p$	$\dbinom{-r}{x}p^r(-q)^x=\dfrac{[r]^x}{x!}p^r q^x$ $=\dbinom{r+x-1}{x}p^r q^x$	$\{0,1,2,\cdots\}$	rq/p	rq/p^2
ベータ 2 項分布 $BetaBin(n,\alpha,\beta)$	$\dbinom{n}{x}\dfrac{B(x+\alpha,n+\beta-x)}{B(\alpha,\beta)}$	$\{0,1,2,\cdots,n\}$	$\dfrac{n\alpha}{\alpha+\beta}$	$\dfrac{n\alpha\beta(n+\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
対数分布 $Loga(p)$	$\dfrac{-q^x}{x\ln p}$	$\{1,2,\cdots\}$	$\dfrac{-q}{p\ln p}$	$\dfrac{-q(q+\ln p)}{(p\ln p)^2}$

連続型分布	**密度関数** $f_X(x)$	**変数** x **の範囲**	X **の平均**	**分散**
一様分布 $U[a,b]$	$\frac{1}{b-a}$	$[a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ $-\infty<\mu<\infty,\sigma>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$(-\infty,\infty)$	μ	σ^2
指数分布 $Expo(\lambda)\quad\lambda>0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$[0,\infty)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
ガンマ分布 $Gamma(r,\lambda)$ $r=1,2,\cdots,\lambda>0$	$\frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}$	$[0,\infty)$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$
ベータ分布 $Beta(a,b),\ a,b>0$	$\frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$[0,1]$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$
コーシー分布 $Cauchy$	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$(-\infty,\infty)$	存在しない	存在しない
対数正規分布 $LogNorm(\mu,\sigma^2)$ $-\infty<\mu<\infty,\sigma>0$	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$(0,\infty)$	$e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$	$e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$
ラプラス分布 $Laplace(\alpha,\beta)$ $-\infty<\alpha<\infty,\beta>0$	$\frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{\|x-\alpha\|}{\beta}\right)$	$(0,\infty)$	α	$2\beta^2$
ワイブル分布 $Weibull(\lambda,\gamma)$ $\lambda,\gamma>0$	$\lambda\gamma\,x^{\gamma-1}\exp\{-\lambda x^\gamma\}$	$(0,\infty)$	$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/\gamma}\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})$	$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2/\gamma}\left[\Gamma(1+\frac{2}{\gamma})-\Gamma^2(1+\frac{1}{\gamma})\right]$
カイ 2 乗分布 $\chi^2(\nu)$ $\nu=1,2,\cdots$	$\frac{1}{\Gamma(\nu/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu/2}x^{\nu/2-1}e^{-x/2}$	$[0,\infty)$	ν	2ν
F 分布 $F(m,n)=\frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n}$ $m,n=1,2,\cdots$	$\frac{1}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\frac{\left(\frac{m}{n}x\right)^{m/2}}{x\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{(m+n)/2}}$	$(0,\infty)$	$\frac{n}{n-2}\ (n>2)$ m に依らない	$\frac{2(m+n-2)n^2}{(n-2)^2(n-4)m}\ (n>4)$
スチューデントの t 分布 $t(\nu)$ $\nu=1,2,\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{\nu}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$	$(-\infty,\infty)$	$0\quad(\nu>1)$, $\nu=1$ は存在しない	$\frac{\nu}{\nu-2}\quad(\nu>2)$

多変量の分布	密度関数	平均ベクトル	分散共分散行列
多項 (k 項) 分布 Poly(n,p) $p=(p_1,p_2,\cdots,p_k)$ 変数 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$	$\dfrac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_k^{x_k}$ $p_1+p_2+\cdots+p_k=1, p_i\geq 0$ $x_1,x_2,\cdots,x_k\geq 0,$ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$	$\begin{pmatrix} np_1 \\ np_2 \\ \vdots \\ np_k \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} np_1q_1 & -np_1p_2 & \cdots & \cdots & -np_1p_k \\ -np_2p_1 & np_2q_2 & \vdots & \vdots & -np_2p_k \\ \vdots & -np_sp_t(s\neq t) & \vdots & np_sq_t(s=t) & \vdots \\ -np_{k-1}p_1 & -np_{k-1}q_2 & \vdots & \vdots & -np_{k-1}p_k \\ -np_kp_1 & -np_kp_2 & \cdots & \cdots & np_kq_k \end{pmatrix}$
2 変量正規分布 $N(\mu,\Sigma)$, Bi-Normal$X=(X_1,X_2)$ 変数 $z_i=\dfrac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}, i=1,2$	$\dfrac{1}{2\pi\sqrt{det\|\Sigma\|}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}$ $0<\rho<1,\sigma_1,\sigma_2>0,$ $(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)=z^T\Sigma^{-1}z$ $=\dfrac{1}{1-\rho^2}\{z_1^2-2\rho z_1z_2+z_2^2\}$	$\mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$	$\Sigma=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ Note:$\sqrt{det\|\Sigma\|}=\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$
n 変量正規分布 $N(\mu,\Sigma)$ n variate Normal 変数 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$	$\dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{det\|\Sigma\|}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}$ $\mu=(\mu_i),\Sigma=(\sigma_{ij})$	$\mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$	$\Sigma=(\sigma_{ij})$
2 変量ベータ分布 $B(p,q)$ Bi-Beta distribution 変数 (x,y),	$\dfrac{\Gamma(p+q+r)}{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1},$ $(p,q,r):p,q,r\geq 0$ $x+y+z=1,x,y,z\geq 0$	$A\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ 定数 $A=\dfrac{1}{p+q+r}$	$B\begin{pmatrix} p(p+r) & pq & pr \\ pq & q(q+r) & qr \\ pr & qr & r(p+q) \end{pmatrix}$ 定数 $B=\dfrac{1}{(p+q+r)^2(p+q+r+1)}$



幾何 $Geo(p)$
pq^x
$n{=}1$
$\sum X_i$
負の２項 $NBin(n,p)$
$\binom{n+x-1}{x}p^n q^x$
$\sum X_i$
$\lambda{=}n(1{-}p),\ n{\to}\infty$
ポアソン $Po(\lambda)$
$e^{-\lambda}\lambda^x/x!$
離散型一様
$U\{1,..,n\}$
$1/n$
$\alpha{=}\beta{=}1$
ベータ２項 $BetaBin(\alpha,\beta)$
$\binom{n}{x}\frac{B(x+\alpha,n+\beta-x)}{B(\alpha,\beta)}$
$p{=}\alpha/(\alpha{+}\beta),\alpha{+}\beta{\to}\infty$
超幾何 $HypGeo(M,K,n)$
$\binom{n}{x}\frac{(K)_x\,(M-K)_{n-x}}{(M)_n}$
$K/M{\to}p$
$np{\to}\lambda(p{\to}0,n{\to}\infty)$
２項 $Bin(n,p)$
$\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$
$n{=}1$
$\sum X_i$
ベルヌーイ $Bin(1,p)$
$p^x q^{1-x}\,\mathbf{1}_{\{0,1\}}(x)$
$\sum X_i$
$\lambda{=}\sigma^2,\lambda{\to}\infty$
$\mu{=}np,\sigma^2{=}npq,\ n{\to}\infty$
対数正規 $LogNorm(\mu,\sigma^2)$
$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$
e^X
$\ln X$
正規 $N(\mu,\sigma^2)$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$
$\alpha{=}\beta{\to}\infty$
ベータ $Beta(\alpha,\beta)$
$x^{\alpha-1}(1{-}x)^{\beta-1}/B(\alpha,\beta)$
$\mu{+}\sigma X$
$(X{-}\mu)/\sigma$
$\mu{=}r/\lambda,\sigma^2{=}r/\lambda^2,r{\to}\infty$
$\frac{X_1}{X_1+X_2}$
$\alpha{=}\beta{=}1$
標準正規 $N(0,1)$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$
ガンマ $\Gamma(r,\lambda)$
$\frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}$
一様 $U(0,1)$
$\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$
X_1/X_2
$\sum X_i^2$
$r{=}\nu/2,\lambda{=}1/2$
$r{=}1$
$\exp(-\lambda X)$
$-\lambda^{-1}\ln X$
$\sum X_i$
コーシー $Cauchy$
$1/\pi(1+x^2)$
$\nu{\to}\infty$
カイ２乗 $\chi^2(\nu)$
abbr.
$\lambda{=}2$
$\nu{=}2$
指数 $Expo(\lambda)$
$\lambda e^{-\lambda x}$
$\min X_i$
$\frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$
$X^{1/\gamma}$
$\nu{=}1$
$\nu_1 X,\nu_2{\to}\infty$
$X_1{-}X_2$
$|X|$
$\gamma{=}1$
t 分布 $t(\nu)$
abbr.
$X^2\ (\nu_1{=}1,\nu_2{=}\nu)$
F 分布 $F(\nu_1,\nu_2)$
abbr.
ワ イ ブ ル
$Weibull(\gamma,\lambda)$
abbr.
ラ プ ラ ス
$Laplace(0,1/\lambda)$
$\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$