ファーガソン博士によるゲーム理論テキスト

星雄樹 (訳)　安田正實（校正）

2006 年 2 月 21 日

ゲーム論、はじめの一歩

ゲーム理論は魅力的な題目テーマである。すばらしい響きをもっている。最近では映画になった「ビューティフル・マインド」で有名になったし、往年の歌手ビートルズは「Love is a easy game to play」といっている。またゲームの勝負には勝ち負けがあり、だれしも勝ち組だけではなく、負け組の経験をもっている理由かも知れない。チェス、将棋、ポーカー、tic-tac-toe(○×ゲーム)、コントラクト・ブリッジ、野球、サッカー、コンピュータ・ゲームなど数多くの面白いゲームを知っていて、その結末は限りがない。加えて、Myerson(1991) や Kreps(1990) で議論された経済学ゲームには極めて広大な範囲があり、Ordeshook(1986) や Shubik(1982)、Taylor(1995) による政治学ゲームにも関連している。身近なことがらだけではなく、会社との争い、経営者と労働者の衝突、会議で法案を通すための争い、裁判官の権力、国間の戦争と平和の交渉等、いろいろな全ての活動の中に例が見出せる。武器は言葉である、人間同士の心理学ゲームもあり、利得は良い感情、悪い感情をもつ (Berne(1964)) といわれている。遺伝子間でプレーされるゲームとして、自然淘汰をモデル化した種の競争の生物学ゲーム (Smith(1982)) も聞いたことがあるだろう。ゲーム理論と論理学の数学的領域、コンピューター科学の間には、深いつながりがある。数理統計学では、自然がプレイヤーの 1 人になる 2 人ゲームとみなすことで理解できる (Blackwell/Girshick(1954)、Ferguson(1968))。

ゲームは、互いに影響しあう、つまり互いに脅しあったり、提携を結んだりと不確かな条件の下で行動して、最終的に何らかの利益または褒美を受け取ったり、何らかの罰や金銭的な損失を受け取ったりするプレイヤー、つまり決定者の数によって述べられる。このテキストでは、ゲームの様々なモデルを学び、理論または起こる事象の構造を創造することにしよう。ある場合によっては、プレイヤーが起こすべき行動の進行を提案することができる。他方では、未来についての予測をより正確にするため、何が起こるのかを理解できるようにしたい。

このテキストの内容を説明する際、ゲーム理論において使われる基本用語としてのキーワードを紹介する。まず最初は、**プレイヤー数**で、正の整数 n で表される。プレイヤーには整数で 1 から n までの番号を付け、$N = \{1, 2, ..., n\}$ によって、**プレイヤーの集合**を表す。おおよその概念が明らかで結論がより明確に定義される 2 人ゲーム、$n = 2$ を学ぶ。1 人のプレイヤーをモデルと考えるときには、ゲーム理論は単純に決定理論とよばれる。ソリティアやパズルでみられる様々な連続的な最適化問題、また最適化 (Papadimitriou/Steiglitz(1982))、線形計画法 (1983)、いわゆるギャンブルの賭け (Dubins/Savage(1965)) は 1 人ゲームの典型例である。「人生のゲーム」(Conwey(Berlekamp er al. (1982) Chap.25)) のような、「0 人ゲーム」というものすらある。これら誰かの決定が無しのままでも自動的に**動作の集合**を得ることとなる。ここでは、少なくとも 2 人のプレイヤーが参加する、つまり $n \geq 2$ と仮定する。マクロ経済学では、プレイヤーの数が非常に多く、100 万にも達することがある。そのようなモデルでは、結果において各プレイヤーが無限小の影響をもち、プレイヤーらの連続体があると仮定すると、多くの状況で有効であることがわかる (Aumann と Shapley(1974))。この過程では、常に n は有限であるとする。

ゲームの学習で使われる 3 つの主な数学的モデル、またはタイプに分類される。**展開形、戦略形、提携**

形である。これらはモデルを作るゲームのプレーでの詳細な意味を考えると異なっている。多くの詳細な説明は展開形で与えられており、その構造はゲームの現実のルールに密接に結びついている。展開形ゲームでは、ゲームにおける**状態**について明確に説明でき、1 つの状態から他へと動いていくゲームの動作についても述べることができる。状態からの可能な動作の集合は、その状態において動作をおこなうプレイヤーに依存している。展開形ゲームでは、カードを引いたり、さいころを転がしたりするような**無作為動作**がある。ゲームのルールは、無作為動作の概念を確率によって明確に述べることができる。動作をするときのプレイヤーの**情報**について考える。基本的はとらえ方として、つぎの 2 点の知識情報が重要である他のプレイヤーによって、ゲームでの全ての過去の動作を知っているか。無作為動作によるその結果を知り得ているか。

全てのプレイヤーと全ての過去の無作為動作によって、プレイヤーが全ての過去の動作を知っているとき、ゲームは**完全情報**であるという。勝ちか負けの結果があり、無作為動作がない 2 人完全情報ゲームは、**組合せゲーム**として知られている。そのようなゲームには、素晴らしく、深い数学的な理論のものがある。Conway(1976) と Berlekamp er al.(1982) で見つけられるだろう。2 人のプレイヤーの、各状態からの動作の集合が同じなら**偏りのないゲーム (impartial)**、 そうでなければ**ゲリラ的（遊撃隊）ゲーム (partizan)** であるという。このテキストの第　部では、偏りのない組合せゲームの理論の紹介をしている。他の組合せゲームの初歩的な取り扱いとしては、Guy(1989) の本がある。

第　部は、ゲームの戦略形、または標準形を表すことから始めよう。戦略形では、状態や動作のようなゲームの多くの詳細を省き、それらの戦略と利得に主眼をおく。したがって戦略形では、各プレイヤーは、可能な戦略の集合から戦略を選ぶ。$A_i(i = 1, 2, ..., n))$ によって、プレイヤー i の**戦略集合**、または**行動空間**を表す。各プレイヤーは、他の全てのプレイヤーと可能な戦略を考え、自分の戦略集合から適切な戦略を選ぶ。全てのプレイヤーは、そのような選択を同時に行い、その選択は各プレイヤーが何らかの利得を受け取るゲームの最後に明かされる。各プレイヤーの選択は、全てのプレイヤーの最終結果に影響を及ぼすかもしれない。

利得を数の値としてモデル化する。一般的に、利得はかなり複雑な題目であることに違いはない。各プレイヤーはそのような利得を数値に置き換えることができるという仮定の、数学的かつ哲学的根拠は、**効用理論**という名前でよばれ、ここでは付録で議論することにする。この理論は、Savage(1954) と Fishburn(1988) の本で詳細に扱われている。したがって各プレイヤーは、全てのプレイヤーによって選ばれた行動に依存する数値の利得を受け取ると仮定する。プレイヤー 1 は $a_1 \in A_1$ を選び、プレイヤー 2 は $a_2 \in A_2$ を選び、と続けていき、プレイヤー $a_n \in A_n$ を選んだとする。そのときプレイヤー j への利得を、$f_j(a_1, a_2, ..., a_n)(j = 1, 2, ..., n)$ と表し、**プレイヤー j の利得関数**という。

戦略形ゲームは、次の 3 つの対象によって定義される。

(1) プレイヤーの集合 $N = \{1, 2, ..., n\}$
(2) プレイヤーの戦略集合の数列 $A_1, ..., A_n$
(3) プレイヤーの実数値の利得関数の数列 $f_1(a_1, ..., a_n), ..., f_n(a_1, ..., a_n)$

プレイヤーがどんな行動を取るかに関わらず、プレイヤーへの利得の合計が 0 である戦略形ゲームを**ゼ**

ロ和であるという。すなわち、全ての $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$ に対して、つぎの場合はゼロ和である。

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$$

第　部の最初の 4 つのセクションでは、2 人ゼロ和ゲームの戦略形に制限して考える。理論的に、このようなゲームには、**ミニマックス定理**として知られる基本的な数学的結果のおかげで、明示的な解をもつ。そのようなゲームには、**値**があり、両方のプレイヤーにその値を保証する**最適戦略**がある。

第　部の後半の 3 つのセクションでは、展開形の 2 人ゼロ和ゲームを扱い、戦略形ゲームとのつながりを示す。とくに、展開形ゲームを解く方法の 1 つは、同値の戦略形ゲームを解くことである。ここで、同じ頃の年代で著しい発展した分野である、帰納的ゲームと確率的ゲームを紹介する (Filar/Vrieze(1997)、Maitra/Sudderth(1996)、Sorin(2002))。

第　部では、理論を 2 人**非ゼロ和**ゲームに拡張する。ここでは、状況はより漠然としている。一般的に、そのようなゲームは、値またはプレイヤーの最適戦略を持たない。理論は自然に 2 つのパートに分かれてしまう。ひとつはプレイヤー同士がコミュニケーションしても、合意を結べない**非協力ゲーム理論**である。これは、最も経済学者が興味を持つ分野であり、例えば Gibbons(1992)、Bierman/Fernandez(1993) がいる。1994 年には、John Nash/John Harsanyi、Reinhard Delten がこの分野の研究でノーベル賞を受賞している。そのような理論は、合意を結ぶための監督部分がない国同士の間の交渉や、通称の制限に関する法律によって合意を結ぶ事が禁じられている会社の商取引では自然であろう。値と最適戦略に代わる主な概念は、**戦略均衡**、または**ナッシュ均衡**とも呼ばれる概念である。この理論は、第　部の最初の 3 つのセクションで扱う。

一方、プレイヤー同士が合意を結ぶことが許されている**協力ゲーム理論**では、最も大きい合計利得を受け取るために互いに協力するための強い動機をもつこととなる。問題は、合計利得をどのようにしてプレイヤー間で分けるかである。この理論もまた、2 つのパートに分かれる。プレイヤーが全て同じ単位で利得を測り、**side payment** のような効用の交換という意味で、そのゲームには**譲渡可能な効用**があるといい、そうでなければ**譲渡不可能な効用**であるという。第　部の後半の 2 つのセクションで、これらの題目を扱う。

プレイヤーの数が多くなるにつれ、展開形ゲームより詳細を省いた戦略形ゲームでさえ、解析が複雑になってくる。**提携形**ゲームでは、戦略の概念が消え、主な特徴は**提携**と提携の**値**または**価値**という事になる。多人数ゲームでは、プレイヤーらには共通の関心を好む提携を結ぶ傾向がある。それぞれの提携がそのメンバーにある量を保証するとし、提携の値とよぶ。提携形ゲームは、移動可能な効用の協力ゲーム理論の分野であり、全てのプレイヤーが含まれる**完全提携**を結ぶという仮定は自然であり、完全提携によって受け取る利得をどうプレイヤー内で分け合うのか、という疑問も当然ある。第　部では、提携形ゲームを扱う。ここでは、経済学の重要な概念である**コア**を導入する。コアは、各提携が少なくともその値を受け取るという、プレイヤーへの利得の集合である。重要な例は、Roth と Sotomayor(1990) で扱われている two-sided matching が知られている。また、**Shapley 値**や**仁**といった、完全提携からの利得を分けるため、その基本を定める方法に関する原理を求める。ここでは、州議会の様々なメンバーの力について言及

できる。また、負担配分問題も解く (それによる利益が等しくない人々による計画の負担をどのように配分すべきか、という問題)。

参考書

ゲーム理論の様々な側面を扱う学部生レベルの参考書は、多くある。このテキストで扱われる論題の幾つかを扱っている入手可能な参考書は、Straffin(1993)、Morris(1994)、Tijs(2003) の本である。Owen(1982) の本は、より上級な数学的なレベルの学部生レベルの本である。経済学的な見方は、Binmore(1992) の面白い本で扱われている。New Palmgrave のゲーム理論の本である Eatwell et al.(1997) は、幅広い論題で、歴史的な概略、評論、論文の集積が含まれている。より古典的な本である Luce/Raiffa(1957)、Karlin(1959) は、高い質をもった良書であり、Dover Publications editons から安価で再刊されている。基礎的で楽しめる Williams(1966) の本では、理論の 2 人ゼロ和ゲームの部分を扱っている。またお薦めは、この分野の牽引者の 1 人である Robert Aumann(1989) はゲーム理論のすばらしい講義録である。最後に、ゲーム理論の全体的な分野を創設した、von Neumann/Morgenstern(1944) の本がある。欠くことのできない金字塔である。

目次

第１章

偏りのない組合せゲーム　～頭を使えば必ず勝てる～

1.1　取りつくしゲーム

組合せゲームは、完全な情報があり、偶然の動作がなく、勝敗の結果のある 2 人のゲームである。このゲームでは、最初の初期位置を含め、位置の集合によってゲームが決定され、その知識によってプレイヤーはコマやチップを動かす。プレーは、コマをある位置から他の位置に動かし、最後に terminal position となるまで交互に動かしていく。この terminal position は、その位置から動かせない状態のことをいう。その結果、プレイヤーの 1 人が勝者となり、もう 1 人が敗者となる。

組合せゲームの素材についてはつぎの参考書 2 冊が知られている。1 つは研究書であるが、On Numbers and Games by J. H. Conway, Academic Press,1976. この本は多くの話題について基本的な考えを紹介していて、今日も続いているこの分野の急速な発展を導いている。よりすばらしい本のひとつとして、Winning Ways for your mathematical plays by Berlekamp, Conway and Guy, Academic Press 1982 である。この本に記述された多くの興味深いゲームは、数学科の学部生にも十分理解できる。このゲームにおける理論では、コマのおかれた位置の状態が 2 つの部分に分かれていると考えられる。どんな与えられた位置からでも双方のプレイヤーにとって同じ動作の集合が利用できる**偏りのないゲーム (impartial game)** と、与えられた位置からそれぞれ各プレイヤーには違う動かし方がある**ゲリラ的ゲーム (partizan game)** である。1 人のプレイヤーが白い駒を動かし、もう 1 人が黒い駒を動かす、チェスやチェッカーはこの partizan である。Part　 では、偏りのないゲームの定理だけを扱う。ゲリラ的組合せゲームの初歩的な紹介は、Fair Game by Richard K. Guy, the COMAP Mathematical Exploration Series,1989 で与えられている。単純な例から始めよう。

1.1.1　単純な取りつくしゲーム

つぎに述べるものは、いわゆる多くのチップのかたまりから順次に取り除いてゆく非常に単純な組合せゲームのひとつである。

(1) 2 人のプレイヤー、　、　がいる。
(2) 中央のテーブルに、21 枚の積み重ねたチップがある。
(3) 動かし方は、中央の積み重ねから、 $1, 2, 3$ 枚のいづれかのチップを取り除く。すなわち少なくとも 1 枚のチップを取り除かなくてはならず、3 枚より多くのチップを取り除いてはならない。
(4) プレイヤーは　から交互にチップを動かしていく。
(5) 最後のチップを取り除いたプレイヤーの勝ちとなる。(最後に動かしたプレイヤーが勝ちで、それ以上動かせなければ負けとなる。)

このゲームをどのように解明したらよいだろうか。またプレイヤーの一人を確実に勝たせることができるだろうか。始めに動かす順番のプレイヤーかあるいは、次に動かす順番のプレイヤーのどちらになった方が有利か。あるいは勝つための戦略とは何か。

このゲームを時間進行の終わりから始めに戻って解析する。この方法を、**後向き帰納法**とよばれる。

もし 1, 2, 3 枚のチップが残っていたら、全てのチップを取ることによって、まず単純に次の手番のプレイヤーが勝つ。

4 枚のチップが残っているとすると、次に動かすプレイヤーは、積み重ねの中から、1, 2, 3 枚のどれかを少なくとも取らなくてはならず、相手が勝つことができる。だから 4 枚のチップが残ったら、次に動かすプレイヤーが敗れ、たった今動かした直前のプレイヤーが勝つこととなる。

5, 6, 7 枚のチップが残っていたら、4 枚のチップが残るように動かすことによって、次手番のプレイヤーが勝つことができる。

8 枚のチップが残っていたら、次のプレイヤーは、5, 6, 7 枚のチップを残さなければならず、よってその前のプレイヤーが勝つ。

よって、0, 4, 8, 12, 16, ... 枚のチップを残した状態が target position だということがわかる。いま 21 枚のチップのゲームを解析している。21 は 4 で割り切れないので、最初に動かすプレイヤーが勝つことができる。ここでの唯一の動かし方は、1 枚を取り、target position である 20 枚のチップを残すことである。

1.1.2　組合せゲームとは、何か

ここでは組合せゲームの考え方を正確に定義する。次の性質を満たすゲームをいう。

(1) 2 人のプレイヤーがいる。
(2) ゲームの possible position の集合（たいていは有限）がある。
(3) 両方のプレイヤーにとって、ゲームのルールが規定され、他の場所への動かし方は決められている。もしプレイヤーの間で区別されないなら、（もし両方のプレイヤーが各位置からの同じ動かし方の選択があるなら）、そのゲームは **impartial**, そうでなければ、**partizan** という。
(4) プレイヤーは、交互に動かす。
(5) ゲームは、プレイヤーが動かせない位置になったときに終了する。普通のルールでは、最後に動かしたプレイヤーの勝ちで、misére play rule は、最後に動かしたプレイヤーの負けとなる。もしゲームが終わらないなら、引き分けとなる。しかし、ほとんど場合、the Ending Condition という状態を加え、引き分けの可能性を失くすことにする。
(6) どのようにプレーをしようとも、有限回の動作で、ゲームは終了する。

この定義の中では述べられていない部分に気づくことが重要である。さいころを転がす、カードを引く等のランダムな動作は許されていない。つまりこのルールは、バックギャモンやポーカーのような動作のゲームには当てはまらない。組合せゲームとは、完全情報のゲームである。また同時の動作や、秘密の動作は許されない。このルールは、戦艦ゲームやじゃんけんでは同時、あるいは隠蔽の動作をもつ。また有限の動作の中で、引き分けはありえない。たとえば、このルールは、tic-tac-toe（〇×ゲーム）に当てはまる。大体のばあいは引き分けで、油断をすれば勝敗が分かれる。一般に偏りのないゲームとは、これらの注意点で述べたように制限されるものである。

1.1.3 P-位置と N-位置

前に述べた 1.1.1 の取りつくしゲームに戻ってみると、$0, 4, 8, 12, 16, \ldots$ という状態は、前のプレイヤー（たった今動かしたプレイヤー）が勝っている状態で、$1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, \ldots$ という状態は、次に動かすプレイヤーが勝っている状態である。前者を P-位置、後者を N-位置 とよぶことにする。P-位置は、ちょうど 4 で割り切れるチップの枚数で、1.1.1 では、target position とよぶ。

impartial な組合せゲームでは、terminal positions から始めて、後向き帰納法によって、P-位置と N-位置をみつけることができる。もし、そこから何も動かせなければ、この状態をゲームの **terminal position** という。このアルゴリズムは、1.1.1 の取りつくしゲームを解くために使った方法である。

Step1: 全ての terminal position を P-位置と定義せよ。
Step2: P-位置から、１手の範囲の全ての位置を N-位置と定義せよ。
Step3: N-位置に動くしかない位置は、P-位置と定義せよ。
Step4: もし、Step3 で新しい P-位置が見つけれらなければ終了し、そうでなければ、Step2 に戻れ。

P-位置が勝つように動かす戦略を見つけるのは簡単だ。P-位置から、相手が N-位置にしか動けないようにする。(Step 3) そして P-位置に戻ってくる。(Step 2) 結局は、terminal position でゲームが終了し、これは P-位置なので勝ちとなる。

これが普通のルールの下で、the Ending Condition を満たしている impartial な組合せゲームで妥当である P-位置と N-位置の説明である。

■勝ちを特徴付ける性質 P-位置と N-位置は、次の３つの点によって、帰納的に定義される。

(1) 全ての terminal position は、P-位置である。
(2) 全ての N-位置からは、少なくとも 1 手のところに P-位置はある。
(3) 全ての P-位置から、全ての動作で N-位置になる。

misére play rule を使ったゲームでは、(1) を全ての terminal position が N-位置になるということに置き換えればよい。

1.1.4 取り去りゲーム (Subtraction Game)

さらに 1.1.1 の取りつくしゲームの特殊な事例を含んだ組合せゲームの種類を考えてみよう。S を正の整数の集合とする。subtraction set S の取り去りゲームは次のようにプレーされる。大きい数字 n 枚のチップの積み重ねから、2 人のプレイヤーが交互に動かす。動作は、$S \ni s$ から s 枚のチップを積み重ねから取り除く。最後に動かしたプレイヤーが勝つこととする。

1.1.1 の取りつくしゲームは取り去り集合 $S = \{1, 2, 3\}$ による取り去りゲームに他ならない。練習問題 1.2 では、取り去り集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の取り去りゲームを解析する。

例として、取り去り集合 $S = \{1, 3, 4\}$ のゲームを解析する。明らかに 1 つの terminal position 0 があり、それが P-位置とわかることによって、1, 3, 4 は、0 に動かせるので、N-位置である。しかし、2 は、ルールにより 2 から 1 にすることしかできないために、P-位置でなければならない。それから、5 と 6 は、2 に動かせるので、N-位置でなければならない。そして、7 は、6, 4, 3 という全てが N-位置であるところに動かさなければならないから、P-位置でなければならない。

同様に続けると、8, 10, 11 が N-位置で、9 が P-位置、12, 13 が N-位置で、14 が P-位置、帰納法によってこれを広げていくと、P-位置の集合は、$P = \{0, 2, 7, 9, 14, 16, ...\}$ となり、7 で割ったとに 0 か 2 が余りとなる非負整数の集合となる。N-位置の集合はその補集合で、$N = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12,$
$13, 15, ...\}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
位置	P	N	P	N	N	N	N	P	N	P	N	N	N	N	P	...

$PNPNNNN$ という 7 つの長さのパターンを永遠に繰り返す。

100 枚のチップのゲームでは、最初のプレイヤーと次のプレイヤーのどちらが勝つだろうか。P-位置は、7 で割ったときに 0, 2 が余りとなる数字に等しい。100 を 7 で割ったとの余りは 2 だから、100 は P-位置で、2 番目のプレイヤーが最適なプレーをとれば勝つことができる。

1.1.5 練習問題

1. 最後に動かしたプレイヤーの負けとなる misére 版の 1.1.1 の take-away game を考えよう。目標は相手に最後にチップを取らせる事である。このゲームを解析せよ。target position は何か？
   明らかに 1 つの terminal position 0 があり、mesére 版のルールなので、0 は N-位置 Asubtraction set $S = \{1, 2, 3\}$ より、1 は、0 にしか動かせないので、P-位置が、2, 3, 4 は、1 に動かせるので、N-位置 5 は、2, 3, 4 にしか動かせないので、P-位置、同様に繰り返していくと、$N = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20\}$ よって、target position となる、P-位置集合 $P = \{1, 5, 9, 13, 17, 21\}$
2. Take-Away Game の一般化
   (a) 多くのチップの積み重ねを考える。各ターンに 1, 2, 3, 4, 5, 6 枚のチップを取り除ける。勝つための戦略は？　P-位置は何か？
   subtraction set $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ で明らかに 1 つの terminal position 0 があり、これは P-位置。 1, 2, 3, 4, 5, 6 は N-位置 7 は P-位置 8, 9, 10, 11, 12, 13 は 7 に動かせるので、N-位置。14 は P-位置。同様に繰り返していくと、$P = \{0, 7, 14, 21, 28, ...\}$ である。7 で割り切れる非負整数の集合となる。戦略は、最初の積み重ねの枚数が、P の元であれば後で動かすプレイヤーとなり、そうでなければ、最初のプレイヤーとなって、P の元のどれかの状態にすればよい。
   (b) もし最初の積み重ねに 31 枚のチップがあったら、可能であれば、どのようにして勝つか。
   (a) より、31 は 7 で割り切れないので、最初のプレイヤーとなり、P-位置である 28 枚にするために 3 枚を取る。

3. 31 ゲームトランプのデッキから、1, 2, 3, 4, 5, 6 の各組の札を取る。これら 24 枚のカードを表にしてテーブルの上に広げる。プレイヤーは交互にカードをめくり、めくられたカードの和は、プレーが進むごとに計算される。各 A は、1 と数える。最初に和が 31 を超えたプレイヤーが負けとなる。これは、前の問題の 31 枚のチップのゲームと同じように思えるが、落とし穴がある。4 回より多く、同じ整数を選ぶ事ができないのだ。

   (a) もし最初に動かし、前の問題で見つけた戦術を使うとしたら、相手が 4 を選び続けた場合、何が起こるか？

   前の問題と同じように、最初に 3 を選ぶ。相手は、4 を選び続けるので、こちらも P-位置にするために 3 を選び続ける。すると、4 回目に 3 を選んだとに 3 のカードがなくなり、次に相手が 4 のカードを取るので、4 のカードもなくなる。この時点で和は 28 で、残りのカードは、1, 2, 5, 6 のみ。5, 6 を選ぶと 31 を超えてしまうので、1, 2 のカードを選ばなくてはならないが、和は、29, 30 になるので、次に相手がそれぞれ 2, 1 のカードを選んだ時点で、負けとなってしまう。

   (b) それでも、最初のプレイヤーは最適な方法で勝つことができる。どうやって？

4. 次の subtraction set のとの subtraction game における P-位置の集合を見つけよ。

   (a)$S = \{1, 3, 5, 7\}$

   明らかに 1 つの terminal position 0 があり、1, 3, 5, 7 は 0 に動かせるから N-位置である。2, 4, 6, 8 はルール的に 1, 3, 5 のどれかにしか動かせないので、P-位置。それから、9 は 2, 4, 6, 8 に動かせるから、N-位置。帰納法によってこれを広げると、$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16...\}$ $N = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...\}$ よって、P-位置の集合は、0 を含めた偶数の集合。

   (b) $S = \{1, 3, 6\}$ 明らかに 1 つの terminal position 0 があり、1, 3, 6 は N-位置。2 は、ルール的に 1 にしか動かせないから、P-位置。4 も 1, 3 にしか動かせないから、P-位置。5 は、2 に動かせるから、N-位置。7, 8 は、それぞれ、4, 2 に動かせるから、N-位置となる。同様に繰り返していくと

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
位置	P	N	P	N	P	N	N	N	N	P	N	P	N	P	N	N	N	N	...

$PNPNPNNNN$ という 9 つの長さのパターンを永遠に繰り返す。

   よって、$P = \{0, 2, 4, 9, 11, 13, ...\}$

   よって、P-位置の集合は、9 で割ったとに余りが、0, 2, 4 のいずれかになる非負整数の集合。

   (c)$S = \{1, 2, 4, 8, 16, ...\} = 2$ のべき集合

   明らかに 1 つの terminal position 0 があり、P-位置。1, 2, 4, 8, 16, ... は 0 に動かせるから、N-位置。3 は、1, 2 にしか動かせないから P-位置。5 は、3 に動かせるから N-位置。6 は、2 に動かせるから P-位置。同様に繰り返していくと

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
position	P	N	N	P	N	N	P	N	N	P	N	N	P	N	N	P	N	...

PNN という 3 つの長さのパターンを永遠に繰り返す。

よって、$P = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, ...\}$

よって、P-位置の集合は、3 で割り切れる非負整数の集合。

(d) もし 100 枚のチップでこれらの各ゲームをプレーしたら勝つのは先手か後手か？

(a)100 は P-位置なので、後手が最適な方法で勝てる。

(b)100 を 9 で割った余りは 1 なので、N-位置。よって先手が勝てる。

(c)100 は 3 で割り切れないので、N-位置。よって先手が勝てる。

5. Empty and Divide

2 つの箱があり、1 つの箱には m 枚のチップ、もう 1 つの箱には n 枚のチップが入っている。そのような状態を $(m, n)(n > 0, m > 0)$ と表す。2 人のプレイヤーが交互に動かしていく。動作は、箱の 1 つを空にし、もう 1 つの箱の中身を 2 つの箱の間で分け、少なくとも各箱に 1 枚のチップが入っている状態にする。ただ 1 つの terminal position は、$(1, 1)$ である。最後に動かしたプレイヤーの勝ちとする。全ての P-位置を見つけよ。

まず、terminal position $(1, 1)$ は明らかに P-位置である。次に、$(2, k)$(k は自然数) の場合は、k 枚の箱の方を空にし、2 枚を 2 つの箱で分け合えば、$(1, 1)$ という状態になるので、N-位置である事がいえる。これは、$(k, 2)$ のとも同様である。次に $(1, 3), (3, 1)$ という状態を考えると、3 枚の方を空にし、1 枚を残す事はできないので、1 枚の方を空にしなければならない。すると、$(1, 2), (2, 1)$ という N-位置にしか動かせないので、P-位置。次に $(3, 2), (2, 3)$ という状態を考えると、3 枚の方を空にし、2 枚を残すと $(1, 1)$ という状態になるので P-位置である事がいえる。$(3, 3)$ は、どちらの箱を空にしても 3 枚が残るので、N-位置にしか動かせないので P-位置という事になる。これを同様に続けると、

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	P	N	P	N	P	N	P	N	P	N	...
2	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	...
3	P	N	P	N	P	N	P	N	P	N	...
4	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	...
5	P	N	P	N	P	N	P	N	P	N	...
6	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	...
7	P	N	P	N	P	N	P	N	P	N	...
8	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	...
9	P	N	P	N	P	N	P	N	P	N	...
10	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	...

よって、P-位置の集合 $P = \{(m,n)|m,n$ は奇数 $\}$

6. Chomp!

長方形のボード (m by n board) から、四角形を動かす。動作は、四角形を選び、その四角形とそれより右か上にある四角形を全て取り除く。プレイヤーは交互に動かし、四角形 $(1,1)$ を取った人が負けとなる。

例えば、8 by 3 board から始める。最初のプレイヤーが $(6,2)$ を選び、6 枚の四角形を取り除き、次のプレイヤーが $(2,3)$ で、4 枚を取り除いたとする。

(a) この状態が、最初のプレイヤーが勝てる事を示す事によって、ただ 1 つの N-位置である事を示せ。

最初のプレイヤーが次に $(3,1)$ を選び、9 枚の板を取り除くと、次の相手の動作が $(1,2)$ の場合は次に $(2,1)$ を、$(1,3)$ の場合は $(2,2)$ を、$(2,2)$ の場合は $(1,3)$ を、$(2,1)$ の場合は $(1,2)$ をそれぞれ取れば勝てるので、N-位置。

(b) 最初の状態が長方形であれば、全て最初のプレイヤーが勝てることが知られている。その証明は工夫が必要だが難しくはない。しかしながら、それはあくまで存在の証明である。最初のプレイヤーが勝つ戦術が存在する事は示しているが、最初の動作の見つけ方のヒントはない。それは証明が見つけられたらわかる。　ヒント:右上の角を取り除く事が勝つための動作の一部であるか。

7. Dynamic Subtraction

相手の最後の動作による subtraction set によって、subtraction の class は大きくなる。ここに 2 つの例がある。

(a)n 枚の積み重ねがある。最初のプレイヤーは、少なくとも 1 枚取り、全てのチップを取らなければ、望むだけチップを取り除ける。その後はプレイヤーは交互に動かし、各プレイヤーが前に動かした以上のチップを取り除けない。もし $n = 44$ なら、最初のプレイヤーにとって、最適な方法は何か？次のプレイヤーが勝てる n の値は何か？

まず、明らかに 1 つの terminal position 0 があり、これは P-位置。次に $1,3,5,7,...$ 等の奇数の状態は、次のプレイヤーが 1 枚を取れば、相手も 1 枚しかチップを取る事ができなくなり、結局次のプレイヤーが最後のチップを取る事ができるので、全て N-位置である。次に 2 は subtraction set S の元の個数が、2 以上であれば、N-位置だが、そうでなければ、P-位置となる。同様にこれを続けていくと、

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
position	P	N	PN	N	PN	N	N	N	PN	N	N	N	N	N	N	N	PN	...

PN は、subtraction set S の元の個数が、その数字以上であれば N-位置、そうでないなら P-位置であることを示す。

よって、P-位置は、0 と $2^k(|S| \leq 2^k$ のと; k は自然数) となり、$n = 44$ のときは、N-位置なので、最初に 12 枚を取って 32 枚にする事で最初のプレイヤーは勝つことができる。また、次のプレイヤーが勝つことができる n の値は、$n = 2^k$ である。

(b)Fibonacci Nim. プレイヤーが相手の前の動作の数のチップを多くとも 2 度取れることを除いて、(a) と同じルールである。このゲームの解析は、(a) よりもさらに難しく、フィボナッチ数列の数に依存する。

■**Zeckendorf の定理**　全ての正整数は、互いに異なる隣り合わないフィボナッチ数の和によって表される。フィボナッチ数の和として書ける数には多くの方法があるが、隣り合わないフィボナッチ数の和として書ける方法は 1 つしかない。$43 = 34 + 8 + 1$ は、43 を書くためのただ 1 つの方法である。$43 = 34 + 5 + 3 + 1$ があるが、5 と 3 は、隣り合っている。$n = 43$ のと、最初のプレイヤーが勝つための最適な方法は？次のプレイヤーが勝てる n の値は何か？

8. The SOS Game

板は、四角形の列からなる。最初は全て空である。プレイヤーは空の四角形を選び、S か O のどちらかの文字を書く。連続した四角形で、最初に SOS を完成させたプレイヤーがゲームに勝つ。もし SOS ができないまま、全ての四角形が埋まってしまった場合、引き分けとなる。

(a)$n = 4$ で、最初のプレイヤーが 1 つ目の四角形に S を置いたとする。次のプレイヤーが勝てることを示せ。

4 つ目の四角形に S を置けば、相手が次に何を置いてもその次に SOS を完成できる。

(b)$n = 7$ なら、最初のプレイヤーが勝てることを示せ。

(c)$n = 2000$ なら、次のプレイヤーが勝てることを示せ。

(d)$n = 14$ なら、誰か勝つか。

1.2 The Game of Nim.

もっとも有名な take-away game は game of nim であり、次のようにプレーされる。3 つのチップの積み重ねがあり、それぞれの積み重ねの枚数は、x_1、x_2、x_3 である。2 人のプレイヤーが交互に動かしていく。動作は、3 つの積み重ねから 1 つを選び、その積み重ねからチップを取り除いていく。一度に複数の積み重ねからチップを取り除いてはいけないが、選んだ積み重ねからは、好きなだけチップを取り除くことができる。（1 枚からその積み重ねの全部まで）最後のチップを取り除いたプレイヤーが勝ちとなる。

1.2.1 解析の準備

まず明らかに 1 つの terminal position $(0, 0, 0)$ があり、これは P-位置である。1 つの積み重ねしか残っていない状態での解答は、単純に積み重ねの全てのチップを取ればいいので、明らかである。よって、$(0, 0, x)(x > 0)$ は全て N-位置である。次に 2 つの積み重ねが残っている場合を考える。$(0, 1, 1), (0, 2, 2)$ のように、2 つの積み重ねにそれぞれ同じ枚数のチップが残っている状態が P-位置であることは容易にわかる。なぜなら、このような状態で相手の番が回ってきたら、相手は 2 つの積み重ねのチップの枚数を等しくない状態にしか動かす事ができず、そうすれば、次に自分に回ってきたら、また 2 つの積み重ねのチップの枚数が等しい状態に戻すことができ、これを繰り返す事で、自分が最後のチップを取る事ができるからだ。

もし 3 つの積み重ね全てが残っていた場合、状況はより複雑になる。まず、明らかに $(1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2)$ は、$(1, 1, 0)$ か、$(0, 2, 2)$ に動かす事ができるので、全て N-位置である。次にわかりやすいのが、$(1, 2, 3)$ で、これはこれまでに見つけた N-位置にしか動かす事ができないので P-位置でなければならない。続けて、次にわかりやすいのが、$(1, 4, 5)$ と $(2, 4, 6)$ で、これは P-位置である。しかし、これらを一般化するのは難しい。$(5, 7, 9)$ は P-位置なのか？ $(15, 23, 30)$ は P-位置なのか？

もしこれらを一般化しようと思うなら、パターンを見つけなくてはならない。その解決方法として、多少奇抜であるが、nim-sum という考え方を用いる。この議論の妥当性は明らかではないが、後ほど P-位置と N-位置の基本的な考え方を用いて妥当性を証明する。

1.2.2 nim-sum

2 つの非負整数の nim-sum は、base 2 を用いないこれらの加算である。この考え方を明確にしよう。

全ての非負整数 x は、ただ 1 つの base 2 の $x = x_m 2^m + x_{m-1} 2^{m-1} + ... + x_1 2 + x_0$ (m は自然数; 各 x_i は 0 か 1) という形で表される。これを $(x_m x_{m-1} ... x_1 x_0)_2$ と表す。例えば、$22 = 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = (10110)_2$ と表される。2 つの整数の nim-sum は、2 進法の数字を使う事と、個別の数字に対して mod2 の加算を使う事で見つけることができる。

■Definition　$(x_m ... x_0)_2$ と $(y_m ... y_0)_2$ の nim-sum は、$(z_m ... z_0)_2$ で、$(x_m ... x_0)_2 \oplus (y_m ... y_0)_2 = (z_m ... z_0)_2$ と書ける。任意の k に対して、$z_k = x_k + y_k (mod 2)$ であり、もし $x_k + y_k = 1$ なら $z_k = 1$ で、そうでなければ $z_k = 0$ となる。例えば、$(10110)_2 \oplus (110011)_2 = (100101)_2$ であり、これは $22 \oplus 51 = 37$ といえる。これは、数字を垂直に書いていけば、より簡単にわかる。

$$\begin{array}{rcr} 22 & = & 10110_2 \\ 51 & = & 110011_2 \\ \hline \text{nim-sum} & = & 100101_2 \end{array}$$

nim-sum は、mod2 の加算であるため、結合法則 (i.e. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$) と交換法則 (i.e. $x \oplus y = y \oplus x$) が成り立つ。このように、加算の order を明確に述べなくても、$x \oplus y \oplus z$ と書ける。その上、0 は加算の単位元 $(0 \oplus x = x)$ で、全ての数はそれ自身の逆元 $(x \oplus x = 0)$ となっている。よって、$x \oplus y = x \oplus z$ であれば、$y = z$ であることがいえる。さらに、$x \oplus x \oplus y = x \oplus x \oplus z$ であることもいえる。

このように、nim-sum は、普通の加算と共通する部分が多くある。しかし、これを使って、game of nim をプレーする上で何をしなければならないのか。その答えがこれから述べる C.L.Bouton(1902) の定理に含まれている。

■theorem 1　nim での (x_1, x_2, x_3) という状態は、もし $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$ のように、nim-sum の答えが 0 であるのなら、P-位置である。

1 つの例として、$(x_1, x_2, x_3) = (13, 12, 8)$ という状態を挙げる。これは P-位置であるか？もしそうでなければ、勝つための戦略は何か？ 13, 12, 8 の nim-sum を計算すると、

$$\begin{array}{rcr} 13 & = & 1101_2 \\ 12 & = & 1100_2 \\ 8 & = & 1000_2 \\ \hline \text{nim-sum} & = & 1001_2 \end{array}$$

よって、nim-sum は 9 となり、0 ではないので、定理 1 によってこれが N-位置であることがわかる。では、勝つための戦略を見つけることができるか？数字の各列の 1 の数が偶数になる P-位置に動かさなければならないので、そのような動作の 1 つとして、13 枚の積み重ねから、9 枚のチップを取り除き、4 枚を残すと、nim-sum が 0 である状態になる。

$$\begin{array}{rcr} 4 & = & 100_2 \\ 12 & = & 1100_2 \\ 8 & = & 1000_2 \\ \hline \text{nim-sum} & = & 0000_2 \end{array}$$

他の動かし方としては、12 枚の積み重ねから 7 枚を取り除き、5 枚を残す方法がある。これが正しいか

チェックせよ。また、3 つ目の勝てる方法がある。見つけられるか？（8 枚の積み重ねから 7 枚を取って 1 枚にする）

1.2.3　積み重ねの数の多い nim

1 つの積み重ねの nim は些細なもので、2 つは簡単である。3 つはかなり複雑であったので、4 つになるとさらに難しくなると思うであろうが、そうではない。定理 1 は、より積み重ねの多いとにも使えるのだ。4 つの積み重ねの nim の状態を (x_1, x_2, x_3, x_4) とし、$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = 0$ になるならば、P-位置である。以下は、任意の積み重ねの数のとのこの定理の証明である。

1.2.4　Bouton の定理の証明

$\mathcal{P}$ を nim-sum が 0 である nim の状態の集合、$\mathcal{N}$ をその補集合である nim-sum が正である状態の集合とする。1.3 での定義の 3 つの状態をチェックしていく。

(1) 全ての terget position は、$\mathcal{P}$ の元である。この証明は簡単で、nim での terminal position は、どの積み重ねにもチップがない状態なので、$0 \oplus 0 \oplus ... = 0$

(2) $\mathcal{N}$ の各状態から、$\mathcal{P}$ の状態への動作がある。列ごとの加算として nim-sum を考え、1 番左の（最も重要な）1 の数が奇数である列を見る。そのようになっている列の中の 1 の数が、偶数になるように数字を変えなくてはならない。よって、最も重要な列の中の 1 を 0 に変えるので、これは数字を少なくするという事になる。したがって、この動作は $\mathcal{P}$ の元の状態にする。

(3) 全ての $\mathcal{P}$ の状態からの動作は、$\mathcal{N}$ の状態になる。もし、$(x_1, x_2 ...)$ が $\mathcal{P}$ の元で、x_1 を $x_1' < x_1$ である x_1' に変えたとすると、$x_1 \oplus x_2 \oplus ... = 0 = x_1' \oplus x_2 \oplus ...$ とする事はできない。なぜなら、消し合う法則によって、$x_1 = x_1'$ である事を伴うからである。よって、$x_1' \oplus x_2 \oplus ... \neq 0$ であるので、$(x_1', x_2 ...)$ が $\mathcal{N}$ の元である事を意味している。

(2) で、nim での N-位置からの勝つための方法の数は、列の中の 1 の数が奇数である列の中で 1 番左にある列の 1 の数に等しいという事に気づくと興味深い。よって、勝つための方法の数は奇数である事がわかる。

1.2.5　Misére ルールの nim

misére ルールの下で nim をプレーしたらどうなるか？任意の状態から誰が勝つかを見つけ、単純な勝つための戦略を見つけることができるか？これは、一見難しそうな疑問の中の 1 つのように思われるが、少々の考えで簡単になる。最適に misére ルールの nim をプレーするための Bouton の方法を紹介する。少なくとも 2 枚以上の積み重ねが 2 つになるまで、普通のルールで nim をプレーするのと同じ方法でプレーをする。そして相手が 2 枚以上の積み重ねを 1 つにするために動かし、その積み重ねの枚数を 0 か 1 に減らしたと、どちらにしても 1 枚の積み重ねが奇数個残されている。

nim での最適なプレーが、2 枚以上の積み重ねを 1 つ残す事を要求されておらず（nim-sum が 0 でなければならない）、相手は 2 枚以上の積み重ねを 2 つから 0 にする事はできないことにより、このようになる。結局ゲームは 2 枚以上の積み重ねが 1 つの状態になり、その状態で自分のターンが回って来なければならない。

他の多くのゲームで似たような解析が働いているが、一般的に misére ルールの解析は、普通のプレールールの解析よりかなり難しい。第 3 章の 4 で紹介する Kayles のゲームや Dawson のチェスのような、普通のルールは公平で単純なゲームでも、misére ルールの解析は非常に難しいゲームもある。

1.2.6 Exercise.

1. (a)27 と 17 の nim-sum は何か？
   $27 = (11011)_2, 17 = (10001)_2$ より、
   $$\begin{array}{rcr} 27 & = & 11011_2 \\ 17 & = & 10001_2 \\ \hline \text{nim-sum} & = & 1010_2 \end{array}$$
   nim-sum$= (1010)_2 = 10$
   (b)38 と x の nim-sum が 25 であった。x を求めよ。
   $38 = (100100)_2, 25 = (11001)_2$ より、
   $$\begin{array}{rcr} 38 & = & 100100_2 \\ x & = & \\ \hline \text{nim-sum=25} & = & 11001_2 \end{array}$$
   よって $x = (111101)_2 = 71$
2. nim で勝つための動作を全て求めよ。
   (a)12 枚、19 枚、27 枚の 3 つの積み重ね
   $12 = (1100)_2, 19 = (10011)_2, 27 = (11011)_2$ より、
   $$\begin{array}{rcr} 12 & = & 1100_2 \\ 19 & = & 10011_2 \\ 27 & = & 11011_2 \\ \hline \text{nim-sum} & = & 100_2 \end{array}$$
   nim-sum は 0 ではないので、Bouton の定理より、この状態は N-位置で、勝つための方法の数は 1 つである。その方法は、12 枚の積み重ねから 4 枚を取り除いて 8 枚にする事である。
   (b)13 枚、17 枚、19 枚、23 枚の 4 つの積み重ね
   $13 = (1101)_2, 17 = (10001)_2, 19 = (10011)_2, 23 = (10111)_2$ より、

$$\begin{array}{rcr} 13 & = & 1101_2 \\ 17 & = & 10001_2 \\ 19 & = & 10011_2 \\ 23 & = & 10111_2 \\ \hline \text{nim-sum} & = & 11000_2 \end{array}$$

よって、Bouton の定理より、勝つための方法は 3 つあり、17 枚の積み重ねから、8 枚を取り除いて 9 枚にする事と 19 枚の積み重ねから、8 枚を取り除いて 11 枚にする事、そして 23 枚の積み重ねから、8 枚を取り除いて 15 枚にする事である。

(c) もし、misére ルールの nim であるなら、(a)(b) の答えは何か？

2 枚以上の積み重ねを 1 つになるまで、普通のルールでの最適なプレーをする。

3. Nimble

nimble は、$0, 1, 2, 3...$ と番号のついた四角形の列からなるボードでゲームをプレーする。有限個のコインが四角形の上に置かれ、1 つの四角形の上に 2 枚以上のコインを置く事もできる。動作はコインの 1 枚を取り、それより左の四角形に置く。そのと、置いてあるコインを飛び越えてもよいし、既にコインの置いてある四角形の上にコインを置く事もできる。プレイヤーは交互に動かし、全てのコインが 0 の四角形に移ったらゲームは終了する。最後に動かしたプレイヤーの勝ちとする。このゲームが本質的に nim と同じである事を示せ。次に、6 枚のコインの下図の状態では、前に動かしたプレイヤーと次のプレイヤー、どちらが勝つか。また、次のプレイヤーが勝つのなら、その勝つ方法を見つけよ。

四角形の番号が n である所にコインが 1 枚あると、n 枚のチップの積み重ねが 1 つあると考える。コインは必ず左に動かさなくてはならず、他のコインを飛び越えても、同じところに置いてもよいので、動かしてその番号の枚数までチップを減らしたと考えれば、nim と考え方は同じである事がわかる。よって、上図の場合は、それぞれ 4 の所に 1 枚、8 の所に 2 枚、9 の所に 1 枚、10 の所に 1 枚、13 の所に 1 枚、計 6 枚のコインが置いてあるので、4 枚の積み重ねが 1 つ、8 枚の積み重ねが 2 つ、9 枚の積み重ねが 1 つ、10 枚の積み重ねが 1 つ、13 枚の積み重ねが 1 つの、計 6 つの積み重ねの nim と考える。$4 = (100)_2, 8 = (1000)_2, 9 = (1001)_2, 10 = (1010)_2, 13 = (1101)_2$ より、

$$
\begin{array}{rcr}
4 & = & 100_2 \\
8 & = & 1000_2 \\
8 & = & 1000_2 \\
9 & = & 1001_2 \\
10 & = & 1010_2 \\
13 & = & 1101_2 \\
\hline
\text{nim-sum} & = & 1010_2
\end{array}
$$

nim-sum> 0 より、この状態は、N-位置。よって、次のプレイヤーが勝つ。勝つ方法は Bouton の定理より 4 つあり、8 の所にあるコインを 2 に置く方法、9 の所にあるコインを 3 に置く方法、10 の所にあるコインを 0 に置く方法、13 の所にあるコインを 7 に置く方法がある。

4. Turning Turtles

H.W.Lenstra によるこの種のゲームは、コインの長い列でプレーされ、いくつかのコインを表から裏に、または裏から表にひっくり返す動作を含んでいる。これは Turning Turtle という簡単な例である。

n 枚のコインが横一線に表や裏がランダムに置かれている。動作はその中のコインの 1 枚を表から裏に返す。加えて、もし望むなら、そのコインの左にある他のコインの 1 つをひっくり返してもよい。（表から裏に、または裏から表に）例として、n = 13 のとの列を考える。

T	H	T	T	H	T	T	T	H	H	T	H	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

H は表 (Head)、T は裏 (Tail) を表す。

この状態からできる動作の 1 つとしては、9 の場所にあるコインを表から裏にひっくり返し、4 にあるコインを裏から表にひっくり返すというものがある。

(a)n の場所にある H を n 枚の nim の積み重ねと表せば、このゲームは本質的に nim と同じゲームである事を示せ。

n の場所にある H を n 枚の nim の積み重ねと表すと、それを裏に返しただけであれば、n 枚の積み重ねを全て取り除いたということを表し、そのコインの左にある他のコインを裏から表に返した場合は、n 枚の積み重ねから何枚か取り除いて、その裏から表に返したコインのある場所の番号の枚数まで減らしたと考えられる。ここで、左のコインを表から裏に返した場合は、2 つの積み重ねを取り除いたと考えなくてはならず、このような動作は普通の nim ではないが、それぞれ違う枚数の積み重ねを 2 つ取り除くため、nim-sum の考え方からすると、普通の nim の P-位置から 1 つの動作で再び P-位置になる事はない。（1 の数が必ず奇数になる列が出るため）よって、P-位置と N-位置の状態は普通の nim と変わらず考える事ができる。よって、このゲームは本質的に nim と変わらないと言える。

(b)(a) での想定が正しいとすれば、上の状態での勝つ方法を見つけよ。

$2 = (10)_2, 5 = (101)_2, 9 = (1001)_2, 10 = (1010)_2, 12 = (1100)_2$ より、

$$\begin{array}{rcr} 2 & = & 10_2 \\ 5 & = & 101_2 \\ 9 & = & 1001_2 \\ 10 & = & 1010_2 \\ 12 & = & 1100_2 \\ \hline \text{nim-sum} & = & 1000_2 \end{array}$$

nim-sum> 0 より、この状態は N-位置。Bouton の定理より勝つ方法は 3 つあり、9 の場所にあるコインを表から裏にひっくり返し、1 の場所にあるコインを裏から表にひっくり返す方法、10 と 2 のコインを表から裏にひっくり返す方法、12 のコインを表から裏にひっくり返し、4 のコインを裏から表にひっくり返す方法がある。

(c) このゲームと他の関係するゲームを http://www.chlond.demon.co.uk/Coins.html でプレーしてみよ。

5. Northcott's Game

Northcott のゲームでの状態は、各列 1 つずつの黒い駒と白い駒があるチェッカー盤である。白は白い駒を動かし、黒は黒い駒を動かす。駒は、置かれたマスのその横 1 列を動けるが、他の駒がおいてあるマスを飛び越えたり、その上に置いたりする事はできない。プレイヤーは交互に動かし、最後に動かしたプレイヤーの勝ちとなる。このゲームを http://www.chlond.demon.co.uk/northcott.html でプレーしてみよ。

2 つのポイントに気をつけよ。

1. これは与えられた状態の中で黒と白にそれぞれ違う選択肢があるため、partizan game である。
2. このゲームは、1.1.2(6) の the Ending Condition を満たさない。プレイヤーが無限に動かし続ける事もあり得る。

それでも、nim のプレーの仕方を知っている事はこのゲームでは大変有利に働く。下の状態なら、どちらが最初に動かすのかによって、黒と白のどちらが勝つか。

このゲームの terminal position は、下図の 2 つが考えられる。前図の左の状態で白の番、右の状態で黒の番なら、それぞれ黒の勝ち、白の勝ちとなる。そして、各列で白と黒の駒が隣り合っていると、例えば次の図のような状態になったと 次に動かすプレイヤーは、後ろに退かなくてはならず、結果的に上の terminal position のいずれかになるので、このような状態は P-位置である事がいえる。ここで、各列の白い駒と黒い駒の間にあるマスの数をそれぞれ考えると、これが全ての列で 0 になったとに相手の番になれば、自分が勝てるという事になる。よってこの問題では、上の列から 4,2,3,5,3,6,2,1 枚のチップの積み重ねがあると考えれば、このゲームは nim であると考える事ができる。ただし、このゲームでは駒を後ろに退かせる事によって、駒の間のマスの数を増やす事ができるが、nim-sum の考え方からすれば、P-位置からどう動かしても、1 の数が奇数になる列ができるので、P-位置になることはない。よって、普通の nim と同じように考えればよい。

$1 = (1)_2, 2 = (10)_2, 3 = (11)_2, 4 = (100)_2, 5 = (101)_2, 6 = (110)_2$ より、nim-sum= $(110)_2$ なので、これは N-位置である。よって、最初に動かす方が勝ちとなる。

6. Staircase Nim (Sprague(1937))

   n 段の階段で、いくつかの段にコインが置いてある。$(x_1, x_2, ...x_n)$ は、j 段目に $x_j(j = 1..n)$ 枚のコインがあることを示す。staircase nim の動作は、j 段目の何枚かのコインをすぐ下の $j-1$ 段目に移す。コインが地面 (0 段目) に届いたら、プレーから取り除く。j 段目から x 枚のコインを取り、$j-1$ 段目にそれらを置くと、j 段目に $x_j - x$ 枚のコインが残り、$j-1$ 段目に $x_{j-1} + x$ 枚のコインがある事になる。ゲームは、全てのコインが地面に移した時点で終了となる。プレイヤーは交互に動かし、最後に動かしたプレイヤーの勝ちとなる。

   $(x_1, x_3, ...x_k)$(n が奇数なら $k = n$、偶数なら $k = n-1$) という奇数段のコインの数の状態が普通の nim の考え方で P-位置ならば、$(x_1, x_2, ...x_n)$ は、P-位置である事を示せ。

7. Moore's Nim$_k$

   簡潔な定理での Nim の一般化は、E.H.Moore(1910) によって提案され、Nim$_k$ と呼ばれる。n

つのチップの積み重ねがあり、プレーが各プレイヤーが最大 k(固定) つの積み重ねから、望むだけチップを取り除けるという部分以外は、nim と同じように行う。少なくとも積み重ねから 1 枚は取らなくてはならない。$k = 1$ のとは、普通の nim であり、Nim_1 と表す。Nim_2 を http://www.math.ucla.edu/ tom/Games/Moore.html でプレーしてみよ。

Moore の定理は、$(x_1, x_2, ...x_n)$ で、nim-sum と同じように x_1 から x_n を二進法で表した後、列ごとに $\mathrm{mod}(k+1)$ の加算を行う。その結果が 0 のと、(いいかえれば、各列の 1 の数が $k+1$ によって割り切れなければならない。) Nim_k で P-位置である。

(a)Exercise3 の Nimble を考えるが、各ターンでプレイヤーは 1 枚か 2 枚のコインを左へ望むだけ動かす事ができる。これは Moore の Nim_k で $k = 2$ である事に気づく。Moore の定理を使って、Exercise3 の Nimble の状態が N-位置である事を示し、P-位置への動かし方を見つけよ。

$4 = (100)_2, 8 = (1000)_2, 9 = (1001)_2, 10 = (1010)_2, 13 = (1101)_2$ から、Moore の定理により、mod3 での加算を行うと、

$$\begin{array}{rcr}
4 & = & 100_2 \\
8 & = & 1000_2 \\
8 & = & 1000_2 \\
9 & = & 1001_2 \\
10 & = & 1010_2 \\
13 & = & 1101_2 \\
\hline
 & & 2212_3
\end{array}$$

よって、N-位置である事がいえる。P-位置への動かし方は、8 と 13 にあるコインを 7 に移す方法、9 と 13 にあるコインを 6 に移す方法、8 にある 2 枚のコインをそれぞれ 7 と 2 に移す方法などがある。

(b)Moore の定理を証明せよ。

(c)Moore の Nim_k の misére ルールでの最適なプレーは何か？

1.3 Graph Games.

有向グラフ上でプレーされるゲームとしての組合せゲームの同等な記述を与える。これは、1.1.2 で記述されたゲームも含んでいる。グラフの頂点をゲームの中の状態、グラフの辺をゲームの動作と同一視する事によって行われる。その状態が P-位置か N-位置であるかを知る事よりもより多くの情報を持っている Sprague-Grundy 関数として知られる関数を定義する。

1.3.1 **有向グラフ上でプレーされるゲーム**

最初に有向グラフの数学的な定義をする。

■Definition **有向グラフ** G は、空集合でない頂点（状態）の集合 X と、各 $X \ni x$ に対して、X の部分集合 $X \supset F(x)$ を満たす関数 F を用いて (X, F) と表される。$X \ni x$ に対して、$F(x)$ は、x からプレイヤーが動かせる状態を表している (x の **follower** と呼ばれる)。もし、$F(x)$ が空集合なら、x は terminal position である。

2 人で行う勝敗のあるゲームは、最初の状態が $X \ni x_0$ と規定され、次のルールを使って、$G = (X, F)$ のようなグラフでプレーされる。

(1) プレイヤー　が x_0 から最初に動かす。

(2) プレイヤーは交互に動かす。

(3) 状態 x で、それを動かすプレイヤーは、次の状態 $y \in F(x)$ を選ぶ。

(4) プレイヤーが自分の番で terminal position になってしまったら、もう動かす事はできず、負けとなる。

さらに graph games は、無限回の動作を続ける可能性がある。この可能性と他の少々の問題を避けるために、最初にたとえ最初の地点 x_0 を使っても、x_0 からの全ての道の長さが n 以下である数字 n が存在するグラフに制限する。道は、$x_i \in F(x_{i-1})(i = 1, ..., m)$($m$ は道の長さ) のような $x_0, x_1, x_2, ...$ という数列である。このようなグラフを **progressively bounded** という。もし X 自身が有限なら、単に**閉路** (閉路は $x_0 = x_m$ で、$x_0, x_1, ..., x_{m-1}(m \geq 3)$ が互いに異なった $x_0, x_1, ..., x_m$ という道) でない事を意味する。

例として、取り去り集合 $S = \{1, 2, 3\}$ であるゲーム (1.1 で解析した)、n 枚の積み重ねがグラフゲームとして表されるという事から始める。$X = \{0, 1, ..., n\}$ は、頂点の集合である。積み重ねがないときは terminal なので、$F(0) = \emptyset$ で空集合。また $F(1) = \{0\}, F(2) = \{0, 1\}$ で、$2 \leq k \leq n$ のとは、$F(k) = \{k-3, k-2, k-1\}$ である。これはこのゲームを完全に定義する。

グラフの表現を描く事は役に立つ。頂点を点で表し、可能な動作を線で表す事によって行う。矢印は、各線上に動作の方向をを指し示すために置かれる。図 1.3.1 は、10 枚の積み重ねでプレーされる subtraction game をグラフで表現した図である。

図 1.3.1 The Subtraction Game ($S = \{1, 2, 3\}$)

1.3.2　Sprague-Grundy 関数

グラフは、P-位置と N-位置が与えられることによって解析されるが、Sprague-Grundy 関数を通してもまた解析されている。

■Definition Sprague-Grundy **関数**　グラフ (X, F) の Sprague-Grundy 関数は、X と非負整数の値で定義された関数 g であり、次のように定義される。

$$g(x) = min\{n \geq 0 : n \neq g(y) \quad \text{for} \quad y \in F(x)\} \tag{1.1}$$

$g(x)$ は、x の follower の Sprague-Grundy 値の中で見つからない最小の非負整数である。もし、集合の中にない最小の非負整数としての、非負整数の集合を **minimal excludent**、または **mex** と定義すると、単純に

$$g(x) = mex\{g(y) : y \in F(x)\} \tag{1.2}$$

と書ける。

$g(x)$ は帰納的に定義されている。$g(x)$ は、x の全ての follower y に対する、$g(y)$ によって定義される。その上、その繰り返しは自動的に始められる。terminal である x は、$F(x)$ が空集合なので、$g(x) = 0$ と定義される。全ての x の follower が terminal である、terminal でない x は、$g(x) = 1$。次のセクションの例の中で、$g(x)$ が帰納的な手法を使っている事を確認する。これが全ての progressively bounded なグラフで働き、そのようなグラフで、Sprague-Grundy 関数がただ 1 つ存在し、有限である事を示す。しかしながら、1.3.4 のいくつかのグラフは、より微妙な手法で扱う事が求められる。

グラフの Sprague-Grundy 関数 g が与えられれば、類似のグラフのゲームを解析することは簡単だ。$g(x) = 0$ である状態 x は P-位置で、その他の状態は N-位置である。勝つ方法は、各動作において、Sprague-Grundy 値が 0 になる頂点への動作を選ぶことである。これは、1.1.3 の性質をチェックする事によって簡単に確かめられる。

(1) もし x が terminal position なら、$g(x) = 0$

(2) $g(x) = 0$ である x からの全ての follower y は、$g(y) \neq 0$ である。

(3) $g(x) \neq 0$ である x からは、$g(y) = 0$ となるような、follower y が少なくとも 1 つある。

Sprague-Grundy 関数は、単に P-、N-位置を求めるよりも、ゲームについて多くの情報を含んでいる。この情報は何の役に立つか？ 4 章で Sprague-Grundy 関数によって、グラフのゲームの sum を解析することができるようになる事がわかるはずだ。

1.3.3 例

1. SG 値 (SG 関数が割り当てる頂点の値) を求める帰納的な方法を述べるために、図 1.3.2 を使う。その方法は単純に、SG 値が割り当てた頂点を探す事だ。(1) または (2) を、SG 値を求めるために使い、全ての頂点が値を割り当てるまで繰り返す。

   図 1.3.2

   始めに、全ての terminal position の SG 値に 0 を割り当てる。グラフの左と下に、4 つの terminal position がある。次に、全ての follower が 1 つしかない頂点 a に値を割り当てる。これは follower の値でない中の最小値 1 を割り当てられる。次に全ての follower に SG 値が割り当てられている 2 つの頂点 b、c がある。頂点 b は、0 と 1 の値の follower があるので、2 を割り当てる。頂点 c は、SG 値が 1 の follower しかない。1 と等しくない最小の非負整数は 0 であるので、c の SG 値は 0 である。さらに、全ての follower に SG 値が割り当てられている 3 つの頂点がある。残りの SG 値が正しく割り当てられているかチェックせよ。
2. subtraction set $S = \{1, 2, 3\}$ の subtraction game の SG 関数は何か？ terminal な頂点 0 は、SG 値は 0。頂点 1 は、$g(0) = 0$ である 0 にしか動けないので、$g(1) = 1$。同様に 2 は、$g(0) = 0, g(1) = 1$ で

ある 0、1 に動けるので、$g(2) = 2$。そして 3 は、$g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 2$ である 0、1、2 に動けるので $g(3) = 3$。しかし、4 は、SG 値が 1、2、3 である頂点 1、2、3 にしか動けないので $g(4) = 0$。この方法で続けていくと・・・

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$g(x)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	...

一般的に $g(x) = x(mod4)$ で、$g(x)$ は x を 4 で割ったときの余りとなる。

3. At-Least-Half
少なくともコインの半分を取り除かなくてはならない 1 つの積み重ねのゲームを考えよう。terminal position は 0 のみ。帰納的に SG 関数を計算していくと、

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$g(x)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	...

$g(x)$ は、$g(x) = min\{k : 2^k > x\}$ となり、x より大きい最小の 2 のべき数の指数である。実際、これはかなりつまらないゲームだ。全てのコインを取る事によって、最初の動作で勝ててしまうからだ。もし、どちらにしてもこのゲームの勝ち方が簡単にわかるのなら、全ての SG 値の計算は何の役に立つのか？
その答えは次の章でわかる。もし、1 つの代わりに幾つかの積み重ねでプレーしても、既にそのゲームのプレーの仕方は簡単にわかる。次の章の定理は、多くの積み重ねの最適なプレーを見つけるための nim-addition とともに、SG 関数の使い方を学ぶ。

1.3.4 より一般的なグラフでの Sprague-Grundy 関数

progressively bounded でないグラフや、閉路であるグラフであるとに起こる問題について簡単に見てみよう。最初に、the graph be progressively bounded is weakened to requiring only that the graph be progressively finite であるという仮説を考える。もし全ての道の長さが有限ならば、そのグラフは **progressively finite** である。この条件は、本質的に 1.1.2(6) の the Ending Condition に等しい。閉路はそのようなグラフから除外する。

progressively finite だが、progressively bounded でないグラフの例は、nim の積み重ねとして、何枚かのチップを選ぶことが最初の動作である図 1.3.3 のグラフのゲームを考える。各道の最初の状態から有限の長さなので、このグラフは progressively finite である。しかし、グラフは最初の状態から、道の長さの上限がないので、progressively bounded でない。

Sprague-Grundy の理論は、progressively finite のグラフを拡張する事ができるが、transfinite の帰納法が使われなくてはならない。図 1.3.3 の上の最初の状態の SG 値は、全ての整数より大きい最小の順序数であり、普通 ω によって表される。また、SG 値が $\omega + 1, \omega + 2, ..., 2\omega, ..., \omega^2, ..., \omega^\omega, ...$ の nim の状態を定義する。Exercise 6 で、これらの transfinite SG 値のいくつかを見つけることを求められる。

図 1.3.3 progressively bounded でない progressively finite のグラフ

もし、グラフが閉路であることも許されるなら、新しい問題が起こる。(1) を満たす SG 関数が存在しないかもしれない。たとえそうでも、前のセクションの単純な帰納的な手続きは、それを見つけるのに十分でない。たとえ SG 関数が存在し、知られていても、勝つ戦略を見つけることは容易ではない。

図 1.3.4 閉路のグラフ

閉路のグラフは、the Ending Condition を満たさない。プレーが永遠に続き、そのような場合はゲームは引き分けで終了し、どちらのプレイヤーも勝ちではない。引き分けの状態の例を挙げる。

頂点 *e* は終点なので、SG 値は 0。*e* は、*d* のただ 1 つの follower なので、*d* の SG 値は 1。よって、*c* ではプレイヤーは明らかに負けとなるため、*d* には動かないだろう。したがって、ただ 1 つの論理的な動作は *a* となる。さらに 2 回動かした後、再び頂点 *c* でその相手に動かす番が回ってくる。同じ解析は、ゲームが *abcabc...* というサイクルを繰り返す事を示す。よって状態が *a,b,c* のとは、引き分けの状態 (tied position) である。この例の中では Sprague-Grundy 関数は存在しない。

Sprague-Grundy 関数が存在すると、それを見つけるのにより微妙なテクニックが要求される。自分の力でやってみようとする読者のための例は、Exercise 9 で見つけられる。しかし、別の問題がある。Sprague-Grundy 関数が知られている事を考える。もし、SG 値が 0 でない状態であるなら、SG 値が 0 である状態に動かす事によって勝つことができる。しかし、どれがその状態なのか？ 始めた状態に自分で戻り、多くの動作の後、それを選ぶ。この例は、2 章の Exercise 5 の Northcott's Game である。ゲームの終わらせ方は簡単にわかるが、一般的に、何をすべきかを理解するのは難しい。プレーの仕方についての情報を与える計算機で、Sprague-Grundy 関数を計算する効率的なアルゴリズムは、Fraenkel(2002) を見る。

1.3.5 Exercises.

1. Sprague-Grundy 関数を求めよ。

図 1.3.5

2. subtraction set $S = \{1,3,4\}$ である subtraction game の Sprague-Grundy 関数を求めよ。
terminal position は、0 なので、$g(0) = 0$。1 は、0 にしか動けないので、$g(1) = 1$。2 は、1 にしか動けないので、$g(2) = 0$。3 は、0,2 に動けるので、$g(3) = 1$。4 は、0,1,3 に動けるので、$g(4) = 2$。これを続けると、

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$g(x)$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	2	0	...

よって、Sprague-Grundy 関数

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x(mod7) = 0,2) \\ 1 & (x(mod7) = 1,3) \\ 2 & (x(mod7) = 4,6) \\ 3 & (x(mod7) = 5) \end{cases}$$

3. 多くても積み重ねの半分までしかチップを取り除けないルールの 1 つの積み重ねのゲームを考える。もちろん、少なくとも 1 枚は取らなくてはならないので、terminal position は、0 と 1 である。Sprague-Grundy 関数を求めよ。
terminal position は、0,1 なので、$g(0) = 0, g(1) = 0$。2 は、1 にしか動けないので、$g(2) = 1$。3 は、2 にしか動けないので、$g(3) = 0$。4 は、2,3 に動けるので、$g(4) = 2$。これを続けると、

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$g(x)$	0	0	1	0	2	1	3	0	4	2	5	1	6	3	7	0	8	...

4. (a)n 枚のチップから、1 と n を含む n の約数 c 枚を取り除けるルールの 1 つの積み重ねのゲームを考える。例えば、12 枚のチップから、1,2,3,4,6,12 枚のチップを取り除ける。ただ 1 つの terminal position は、0。このゲームは Winning Ways で、Dim^+ と呼ばれる。Sprague-Grundy 関数を求めよ。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$g(x)$	0	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	...

(b) 上記のルールで、積み重ね全部を取り除くことができない場合を考える。これは Silverman(1971) によって、Aliquot game と呼ばれる。したがって、もし 12 枚のチップがあるなら、1,2,3,4,6 枚のチップを取り除ける。ただ 1 つの terminal position は、1 である。Sprague-Grundy 関数を求めよ。

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$g(x)$	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	...

5. Wyghoff's Game(Wythoff(1907))
wythoff のゲームの状態は、チェスボード上のクイーンの場所によって決まる。プレイヤーは、ボードの同じ側に座り、交互にクイーンを動かしていく。しかし、クイーンは垂直方向下、水平方向左、または、対角線左下にしか動く事ができない。クイーンが左下の角に着いたと、ゲームは終了し、最後に動かしたプレイヤーの勝ちとなる。ボードのマスを頂点、クイーンの可能な動作をグラフの辺として考えると、これは graph game になる。8 × 8 のチェスボードで各マスの Sprague-Grundy 関数を書き、グラフの Sprague-Grundy 関数を求めよ。

7	8	6	9	0	1	4	5
6	7	8	1	9	10	3	4
5	3	4	0	6	8	10	1
4	5	3	2	7	6	9	0
3	4	5	6	2	0	1	9
2	0	1	5	3	4	8	6
1	2	0	4	5	3	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7

6. Two-Dimensional Nim
Two-Dimensional Nim は、マスの上に有限個のコインがある。無限個のマスのボードの一部分でプレーする。動作は、コインを取って、同じ列の左のマスに動かすか、下の列に動かす。マスの上にはコインを複数枚置いてもよい。もし、全てのコインが最も下の列にある場合、これは 2 章の Exercise 3 の Nimble のゲームである。

(a)Sprague-Grundy 値を求めよ。

5	4	7	6	1	0
4	5	6	7	0	1
3	2	1	0	7	6
2	3	0	1	6	7
1	0	3	2	5	4
0	1	2	3	4	5

(b) 次のセクションにある理論を学習した後、戻って、次の図で表された状態を解ければわかる。下の状態は P-位置か、N-位置か？ もし N-位置なら、勝つ動作は何か？ このゲームはどのくらいの動作が続くか？ 無限回の動作を続ける事はできるか？

(c) コインを取り除いた左か下の列に有限個のコインを加えられる場合を考える。ゲームはまだ有限回の動作で終わるか？

7. 有限集合の subtraction set の subtraction game は、Sprague-Grundy 関数が周期的になることを証明せよ。

8. Impatient subtraction games

   Subtraction game で、impatient なプレイヤーに別の動作を許す事を考える。積み重ねから subtraction set S の元 s 枚を取り除く事に加えて、常に全ての積み重ねを取る事が許される。$g(x)$ は、subtraction set S の subtraction game の Sprague-Grundy 関数を表し、$g^+(x)$ は、subtraction set S の impatient subtraction game の Sprague-Grundy 関数を表す。$g^+(x) = g(x-1)+1$ for all $x \geq 1$ である事を示せ。

9. 次の有向グラフは、閉路なので、progressively finite ではない。もし、P-,N-位置か Sprague-Grundy 関数が見つけられれば答えよ。

1.4 Sums of Combinatorial Games.

次のルールに従ってプレーされる新しいゲームとしての幾つかの組合せゲームを与える。与えられた最初の状態はゲームの各々で設定される。プレイヤーは交互に動かしていく。プレイヤーの動作は、ゲームを何か 1 つ選び、そのゲームのルールに従った動作をし、その他のゲーム全てをそのまま残しておく事である。プレーは、これ以上動かせない状態である terminal position になるまで続ける。最後に動かしたプレイヤーの勝ちである。この方法で、ゲームを合成させる事によって形作られるゲームを与えられたゲームの (**disjunctive(離散的な)**) sum という。最初にゲームの sum の正式な定義を与え、どのように要素のゲームの Sprague-Grundy 関数が、sum の Sprague-Grundy 関数を求めるために使われるのかを示す。この理論は、R.P.Sprague (1936-7) と P.M.Grundy (1939) によるものである。

1.4.1 The Sum of n Graph Games.

$G_1 = (X_1, F_1), G_2 = (X_2, F_2), ..., G_n = (X_n, F_n)$ という n 個の progressively bounded のグラフがあるとする。これらを合わせて作った新しいグラフ $G = (X, F)$ を、$G_1, G_2, ..., G_n$ の sum といい、$G = G_1 + G_2 + ... + G_n$ と表す。頂点の集合 X は、直積 $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ である。これは、全ての n-tuple(n 組) $(X_1, ..., X_n)$ $s.t.$ $x_i \in X_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ の集合である。頂点 $x = (x_1, ..., x_n) \in X$ の follower の集合は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} F(x) = F(x_1, ..., x_n) = & F(x_1) \times \{x_2\} \times ... \times \{x_n\} \\ & \cup \{x_1\} \times F_2(x_2) \times ... \times \{x_n\} \\ & \cup ... \\ & \cup \{x_1\} \times \{x_2\} \times ... \times F_n(x_n) \end{aligned}$$

従って、$x = (x_1, ..., x_n)$ からの動作は、x_i の 1 つをその follower $F_i(x_i)$ の状態の 1 つに動かす。G でプレーされる graph game を、graph game $G_1, ..., G_n$ の sum という。

もし各グラフ G_i が、progressively bounded なら、sum G は、同じように progressively bound である。頂点 $x = (x_1, ..., x_n)$ からの動作の最大の数字は、各要素のグラフの最大の数字の動作の sum である。

例として、nim の 3 つの積み重ねのゲームは、nim の 1 つの積み重ねの 3 つの sum として考えられる。これは、各要素のゲームがそれぞれ簡単であっても、その sum は複雑である事を示す。

1.4.2　Sprague-Grundy の定理

次の定理は、各要素のグラフの Sprague-Grundy 関数がわかっているとに、graph game の sum の Sprague-Grundy 関数を求める方法を与えるものである。これは、前に定義した nim-sum の考え方も含む。graph game の sum の基本的な定義は、その要素のゲームの Sprague-Grundy 関数の nim-sum であるという事である。むしろ、定理 1 の Bouton の定理の劇的な一般化として考えられる。証明は、定理 1 の証明に似ている。

■Theorem 2　もし、g_i が $G_i(i = 1, ..., n)$ の Sprague-Grundy 関数なら、$G = G_1 +, ..., +G_n$ は、$g(x_1) \oplus ... \oplus g_n(x_n)$ という Sprague-Grundy 関数を持つ。

証明)$x = (x_1, ..., x_n)$ を X の任意の点とする。$b = g_1(x_1) \oplus ... \oplus g_n(x_n)$ とする。関数 $g(x_1, ..., x_n)$ について以下の 2 つを示す。

(1) 全ての非負整数 $a < b$ に対して、g の値が a である $(x_1, ..., x_n)$ の follower がある。
(2) g の値が b である $(x_1, ..., x_n)$ の follower はない。

その follower の 1 つによって推測されない最小の SG 値である x の SG 値は、b でなければならない。

(1) を示すために、$d = a \oplus b$ とし、d の 2 進法の拡張での桁の数を k とする。よって $2^{k-1} \leq d \leq 2^k$ で、d は、右から k 番目の場所に 1 がある。$a < b$ から、b では k 番目の場所は 1 で、a ではそこは 0 である。$b = g_1(x_1) \oplus ... \oplus g_n(x_n)$ から、少なくとも 1 つの $g_i(x_i)$ の 2 進法の拡張で、k 番目に 1 をもつ x_i がある。単純に $i = 1$ と考える。$d \oplus g_1(x_1) < g_1(x_1)$ なので、x_1 から、$g_1(x'_1) = d \oplus g_1(x_1)$ となる x'_1 への動作は存在する。$(x_1, x_2, ..., x_n)$ から $(x'_1, x_2, ..., x_n)$ への動作は、sum G のルールに従った動作であり、

$$g_1(x'_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n) = d \oplus g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n) = d \oplus b = a$$

最後に (2) を示すために、$(x_1, ..., x_n)$ は同じ g の値の follower を持つと仮定し、これが矛盾する事を示す。$(x'_1, x_2, ..., x_n)$ は、$(x_1, x_2, ..., x_n)$ の follower という事と、$g_1(x'_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n)$ という事を考える。消しあう法則によって、$g_1(x'_1) = g_1(x_1)$ である。しかし、これは同じ SG 値の follower を持つ状態はないので矛盾。■

この定理で 1 つ注意すべき点は、ゲームの sum で要素として考えると、全ての progressively bound である impartial game は、あたかも nim の積み重ねのように表せる。たとえ、他のどんな sum の要素があろうとも、適正なサイズ (Sprague-Grundy 値) の nim の積み重ねによって、結果が変わることなく置き換

えられる。この注意は、全ての (progressively bounded である)impartial game は、いくつかの nim の積み重ねと同値であるという事を言っている。

1.4.3 Applications.

1. Subtraction game の sum
   subtraction set $S_m = \{1, 2, ..., m\}$ の 1 つの積み重ねで、1 から m 枚のチップを積み重ねから取り除ける subtraction game $G(m)$ は、Sprague-Grundy 関数 $g_m(x) = x(mod\ m + 1)(0 \leq g_m(x) \leq m)$ を持つ。3 つの subtraction game の sum を考える。1 つ目のゲームは、$m = 3$ で 9 枚のチップの積み重ねで、2 つ目のゲームは、$m = 5$ で 10 枚の積み重ね、3 つ目のゲームは、$m = 7$ で 14 枚の積み重ねである。したがって、$G(3) + G(5) + G(7)$ で最初の状態が (9,10,14) であるゲームをプレーする、という事になる。この状態の Sprague-Grundy 値は、$g(9, 10, 14) = g_3(9) \oplus g_5(10) \oplus g_7(14) = 1 \oplus 4 \oplus 6 = 3$ となる。最適な動作の 1 つは、$G(7)$ の状態を Sprague-Grundy 値が 5 になるようにする事である。これは、14 枚の積み重ねから 1 枚取り除いて 13 枚にする事でできる。もう 1 つ最適な動作があるが、見つけられるか ($G(3)$ の状態を Sprague-Grundy 値が 2 になるようにする事である。これは 9 枚の積み重ねから 3 枚取り除いて 6 枚にする事で成される)。
   これは、Sprague-Grundy 関数を知る事の重要性を示す。さらに様々な 1 つの積み重ねのゲームの Sprague-Grundy 関数を計算する例を挙げる。多くのこれらの 1 つの積み重ねのゲームは 1 つずつの nim としては簡単であるが、Sprague-Grundy 関数は、様々なそのようなゲームの sum をプレーする事において主に使われている。
2. Even if Not All - All if odd.
   (1) 積み重ね全てでないなら、偶数枚取り除ける。
   (2) 積み重ねの枚数が奇数のとは、積み重ね全てを取り除くこともできる。
   という (1) か (2) の動作ができるルールの 1 つの積み重ねのゲームを考える。2 つの terminal position があり、0 と 2 である。帰納的に計算すると、

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$g(x)$	0	1	0	2	1	3	2	4	3	5	4	6	5	...

   となり、$g(2k) = k - 1, g(2k - 1) = k\ (k \geq 1)$ であることがわかる。
   このゲームが 10,15,20 枚の 3 つのチップの積み重ねでプレーされる場合を考える。SG 値は $g(10) = 4, g(15) = 7, g(20) = 9$ である。$4 \oplus 7 \oplus 9 = 10$ で、0 でないので、これは N-位置である。勝つための動作は、SG 値を 9 から 3 に変える事である。これは、20 枚の積み重ねから 12 枚を取り除き、$g(8) = 3$ である 8 枚を残すという事である。
3. A Sum of Three Different Games
   3 つの積み重ねの Take-away game をプレーする場合を考える。1 つ目のゲームは 18 枚の積み重ねで、ルールは前のゲーム Even if Not All-All if odd とする。2 つ目のゲームは 17 枚の積み重ね

で、ルールは At-Least-Half(Example 3.3.3) とする。3 つ目のゲームは 7 枚の積み重ねで、ルールは普通の nim とする。最初に、3 つの積み重ねの SG 値はそれぞれ 8,5,7 である。これは nim-sum が 10 で、N-位置である。1 つ目の積み重ねの SG 値を 2 に変える事によって、P-位置にする事ができる。上の表から、3 枚と 6 枚のチップの積み重ねが生じる事になる。18 から 3 へは動かせないが、18 から 6 へは動かせる。したがって、最適な動作は、18 枚の積み重ねから 12 枚を取り除き、6 枚を残す事である。

1.4.4 Take-and-Break Games.

他にもこの章の方法を使って解いていく多くの impartial な組合せゲームがある。ここで Take-and-Break Games というゲームを述べ、後の章で Green Hackenbush というもう 1 つの impartial な組合せゲームをより深く見ていく。Take-and-Break Games は、取る、もしくは分ける (1 つの積み重ねを確かな状況の下で、2 つかそれ以上の部分に分ける。したがって、積み重ねの数は増えてゆく) というルールのゲームである。

1. Lasker's Nim

Take-and-Break Games への nim の一般化は、Emanuel Lasker という 1894 年から 1921 年までのチェスの世界チャンピオンによって成された。それは彼の本、Brettspiele der Völker の 183-196 で見つけられる。各プレイヤーは自分のターンで、(1)nim として 1 つの積み重ねから何枚かのチップを取り除くか、(2) 少なくとも 2 枚のチップの 1 つの積み重ねを 2 つの空でない積み重ねに分ける (チップは取り除かない)、のいずれかを行う事ができる。

明らかに 1 つの積み重ねのゲームの Sprague-Grundy 関数は、$g(0) = 0$ と $g(1) = 1$ を満たす。2 の follower は 0 と 1 と (1,1) である。それぞれの Sprague-Grundy 値が 0,1, そして $1 \oplus 1 = 0$ である。したがって、$g(2) = 2$ である。3 の follower は 0,1,2 と (1,2) である。Sprague-Grundy 値が $0,1,2,1 \oplus 2 = 3$ であるので、$g(3) = 4$ である。この方法で続けていくと・・・

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$g(x)$	0	1	2	4	3	5	6	8	7	9	10	12	11	...

したがって、任意の $k \geq 0$ に対して、$g(4k+1) = 4k+1, g(4k+2) = 4k+2, g(4k+3) = 4k+4, g(4k+4) = 4k+3$ と推測される。

この推測の妥当性は、次のような帰納法によって簡単に証明される。

(a)1 つの積み重ねで成り立っている $4k+1$ の follower は、0 から $4k$ の Sprague-Grundy 値を持つ。2 つの積み重ねで成り立つ $4k+1$ の follower、$(4k, 1), (4k-1, 2), ..., (2k+1, 2k)$ は、偶数の Sprague-Grundy 値を持つ。したがって、$g(4k+1) = 4k+1$。

(b)1 つの積み重ねで成り立っている $4k+2$ の follower は、0 から $4k+1$ の Sprague-Grundy 値を持つ。2 つの積み重ねで成り立つ $4k+2$ の follower、$(4k+1, 1), (4k, 2), ..., (2k+1, 2k+1)$ は、1 つお

きに 4 の倍数と奇数の Sprague-Grundy 値を持つ。したがって、$g(4k+2) = 4k+2$。
(c)1 つの積み重ねで成り立っている $4k+3$ の follower は、0 から $4k+2$ の Sprague-Grundy 値を持つ。2 つの積み重ねで成り立つ $4k+3$ の follower、$(4k+2,1),(4k+1,2),...,(2k+2,2k+1)$ は、奇数の Sprague-Grundy 値を持ち、特に $g(4k+2,1) = 4k+3$。したがって、$g(4k+3) = 4k+4$。
(d) 最後に 1 つの積み重ねで成り立っている $4k+4$ の follower は、0 から $4k+2$ と $4k+4$ の Sprague-Grundy 値を持つ。2 つの積み重ねで成り立つ $4k+4$ の follower、$(4k+3,1),(4k+2,2),...,(2k+2,2k+2)$ は、交互に $1(mod 4)$ に等しい値と偶数の Sprague-Grundy 値を持つ。したがって、$g(4k+4) = 4k+3$。
2,5,7 枚のチップの 3 つの積み重ねの Lasker's nim をプレーすると考える。何の動作をすべきか？最初に要素の状態の Sprague-Grundy 値がそれぞれ 2,5,8 である事がわかる。これら 3 つの数字の nim-sum は 15 である。Sprague-Grundy 値が 8 の状態を Sprague-Grundy 値が 7 の状態に変えなければならない。これは 7 枚の積み重ねを 1 枚と 6 枚の 2 つの積み重ねに分けることによってできる。次の動作では、相手は 1,2,5,6 枚の 4 つの積み重ねの Lasker's nim に直面する。これは Sprague-Grundy 値が 0 なので、P-位置である。

2. The Game of Kayles

このゲームは、1 世紀前に Sam Loyd(Mathematical Puzzles of Sam Loyd vol2., 1960, Dover Publications) と H.E.Dudeney(The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems, 1958, Dover Publications, New York) によって紹介された。2 人のボウラーは、2 番目のピンが既に倒れている横一列 13 のボウリングのピンの列に直面する。ベテランのプレイヤーらは共に専門的なので、常に 1 つの kayle-pin か、隣り合っている 2 つの kayle-pin を共に倒すことができる。そのようにゲームの状態を変えていき、最後のピンを倒したプレイヤーが勝者となる。
これは次のように動作を述べる事ができる。チップの積み重ねでプレーされるグラフのゲームの 1 つである。もし望むのなら積み重ねを 2 つの空でない積み重ねに分け、その後に 1 枚か 2 枚のチップを幾つかの積み重ねから取り除く。
積み重ねを分けないで、1 枚チップを取り除くことは、列の最後のピンを倒すことに対応する。積み重ねを 2 つに分けて 1 枚を取り除くことは、列の内側のピンを倒すことに対応する。2 枚を取り除く場合も同じである。
このゲームの Sprague-Grundy 関数を求めよう。ただ 1 つの terminal position はチップがないとで、$g(0) = 0$ である。1 枚のチップの積み重ねは、空の積み重ねにするしかないので、$g(1) = 1$ である。2 枚のチップの積み重ねは、1 枚の積み重ねか、0 枚にできるので、$g(2) = 2$。3 枚のチップの積み重ねは、1,2 枚の積み重ね (SG 値が 1,2) か各 1 枚のチップの 2 つの積み重ね (SG 値 0) に動かせるので、$g(3) = 3$。この方法で続けると、表 4.1 で Sprague-Grundy 値がわかる。

表 4.1 Kayles の SG 値　表の値は $g(y+z)$

$y\backslash z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	**0**	1	2	**3**	1	4	**3**	2	1	**4**	2	**6**
12	4	1	2	**7**	1	4	**3**	2	1	**4**	**6**	7
24	4	1	2	8	**5**	4	7	2	1	8	**6**	7
36	4	1	2	**3**	1	4	7	2	1	8	2	7
48	4	1	2	8	1	4	7	2	1	**4**	2	7
60	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	**6**	7
72	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7

$x = 72$ からは、SG 値が 12 ごとに周期的であり、値は上の表の最後の列が永遠に繰り返される。最後の列の数列に対する例外が 14 だけある。それらは表の中で太字で表されている。最後の例外は $x = 70$ のところである。全ての SG 値が判明したので、これでゲームを解いたと考える事ができる。

3. Dawson’s Chess

Five Classics of Fairy Chess by Dover で再刊された Caissa’s Wild Roses(1935) の中で、T.R.Dawson が考えた問題の 1 つは、ポーン (チェスで将棋の歩にあたる駒) でプレーする give-away のチェスである。向かい合うポーンが 2 つ同じ列にあり、白が 3 番目の横の列に、黒が 5 番目の横の列に、n の隣接した縦の列、White to play at losing game,　結果は何か？ (駒を取る事をしなければならず、最後に動かしたプレイヤーの負けとなる。) 最後に動かしたプレイヤーが勝ちとなる普通のルールの下でこのゲームを扱う。

チェスでのポーンの動きで未知であるものは、両方のプレイヤーがマークとして X を使う、n 個のマスの列の misére の tic-tac-toe の種類としてのゲームの説明の違った方法を好むかもしれない。プレイヤーは X が既に置かれている隣でない空の幾つかのマスの上に X を置ける (別の X の隣に動かされたプレイヤーの負けとなる)。

このゲームは積み重ねからチップを取り除き、1 つの積み重ねを 2 つに分けることもできるゲームとして表される。もし $n = 1$ なら、$n = 0$ へただ 1 つ動くしかなく、ゲームは終了する。$n > 1$ に対して、列の端に X を置く動作は、ゲームから列の端の 2 つのマスを取り除く。これは積み重ねから 2 枚のチップを取り除くことに対応する。同様に端から 1 つのマスに X を置く事は、積み重ねから 3 枚のチップを取り除くことに対応する。端やその隣でないマスの 1 つに X を置く事は、積み重ねから 3 枚のチップを取り除き、積み重ねを 2 つに分けることに対応している。したがって、ゲームのルールは、(1) それが積み重ね全てであるのなら、1 枚のチップを取り除く、(2) 幾つかの積み重ねから 2 枚のチップを取り除く、(3) 幾つかの積み重ねから 3 枚のチップを取り除き、もし望むなら積み重ねを 2 つに分ける。

Dawson のチェスに対する Sprague-Grundy の数列は、次のようになる。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$g(x)$	0	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	0	5

最終的に 34 で周期的である。7 つの例外があり、最後の例外は $n = 51$ で起こる。18 のマスの列の勝つ方法を見つけられるか？上の Sprague-Grundy 数列を使えば、コンピューターに対してプレーする事によってゲームでのスキルを磨く事ができる。

4. Grundy's Game
   Grundy のゲームでは、ルールで許された動作は 1 つの積み重ねを 2 つの空でない枚数の違う 2 つの積み重ねに分ける事だ。したがって、ただ 1 つの terminal position は 1 枚か 2 枚の積み重ねである。Sprague-Grundy 数列は枚数の少ない積み重ねに対して計算する事は簡単であり (Exercise 10 を見よ)、値はとてもゆっくりと増加する。Sprague-Grundy 数列は結局周期的か？　これは、2002 年の時点で 200 億以上の値が計算されているが、知られていない。

1.4.5　Exercises

1. (1) 幾つかの積み重ねから偶数枚のチップを取り除く、(2) 幾つかの 1 枚の積み重ねを取り除く、このどちらかの動作を行う take-away game を考える。ただ 1 つの terminal position は 0 である。Sprague-Grundy 関数を求めよ。
   今までの考え方を踏まえて、0 から順番に SG 値を求めていくと、下のようになる。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$g(x)$	0	1	1	0	2	2	3	3	4	4	...

   よって、Sprague-Grundy 関数

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0, 3) \\ 1 & (x = 1, 2) \\ k & (x = 2k, 2k + 1)(k = 2, 3, 4, ...) \end{cases}$$

2. (1) それが積み重ね全部でないなら、3 の倍数の数だけ取り除ける、(2) 積み重ねの枚数が $2(mod 3)$ 枚 (2,5,8,...) なら、積み重ね全てを取り除ける、というルールの 1 つの積み重ねのゲームを考える。terminal position は、0,1,3 である。Sprague-Grundy 関数を求めよ。
   これも同様に 0 から SG 値を計算していくと、

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$g(x)$	0	0	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	...

   よって、Sprague-Grundy 関数

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ k & (x = 3k+1, 3k+3) \\ k+1 & (x = 3k+2)(k = 0, 1, 2, ...) \end{cases}$$

3. 3 つの積み重ねの subtraction game をプレーする事を考える。1 つ目の積み重ねは 18 枚で、ルールは Exercise1 に準ずる。2 つ目の積み重ねは 17 枚で、ルールは Exercise2 に準ずる。3 つ目の積み重ねは 7 枚で、ルールは普通の nim に準ずる。この状態の Sprague-Grundy 値は幾つか？また、最適な動作は何か？
   1 つ目の積み重ねの SG 値は、Exercise1 より 9。2 つ目の積み重ねの SG 値は、Exercise2 より 6。3 つ目の積み重ねの SG 値は、7。よって、この状態の SG 値は、$9 \oplus 6 \oplus 7 = 8$
   また、最適な動作は、1 つ目の積み重ねの SG 値を 9 から 1 にする事である。つまり、1 つ目の積み重ねから 16 枚を取り除き、2 枚を残す事である。
4. Dudeney と Loyd の Kayles の問題を解け。13 のボウリングのピンが横一列に並んでおり、2 つ目のピンが既に倒れて取り除かれている。(a) これが N-位置である事を示せ。表 4.1 を使ってよい。

図 1.4.1 Dudeney と Loyd の Kayles 問題

   上図の状態は、それぞれ 1 枚、11 枚の 2 つの積み重ねがある事に対応している。表 4.1 より SG 値はそれぞれ 1,6 なので、$1 \oplus 6 = 7$ より、これは N-位置である。
   (b) 勝つ動作を見つけよ。どのピンを倒すべきか？
   6 または 10 のピンを倒し、1 本と 3 本と 7 本のピンを残すと、表 4.1 より、SG 値はそれぞれ 1,3,2 なので、$1 \oplus 3 \oplus 2 = 0$ で P-位置となる。
   (c)http://chlond.demon.co.uk/Kayles.html に行き、上の論理と表 4.1 を用いてコンピューターと対戦してみよ。
5. 各ターンにプレイヤーが (1)1 枚か 2 枚のチップを取り除く、(2)1 枚のチップを取り除き、残ったチップを 2 つの積み重ねに分ける、というゲームを考える。
   (a)Sprague-Grundy 関数を求めよ。
   terminal position は 0 なので、$g(0) = 0$。1 は、0 に動かすしかないので、$g(1) = 1$。2 は、0,1 に動かせるので、$g(2) = 2$。3 は、1,2,(1,1) に動かせるので、$1 \oplus 1 = 0$ より、$g(3) = 3$。4 は、2,3,(1,2)

に動かせるので、$1 \oplus 2 = 3$ より、$g(4) = 0$。同様に続けると、

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$g(x)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	...

よって、Sprague-Grundy 関数 $g(x) = x(mod 4)$

(b)15 枚のチップの 1 つの積み重ねでゲームを始めるとすると、最初の最適な動作は何か？

(a) より、$g(15) = 3$ なので、この SG 値を 0 に動かせばよい。これは、1 枚を取って、(1,13),(3,11),(5,9),(7,7) のどれかの 2 つの積み重ねに分けることによってなされる。

6. 各ターンにプレイヤーは、(1) 積み重ねが全部で 1 枚なら、1 枚を取り除く、(2)2 枚以上のチップを取り除き、もし望むならその後に残ったチップを 2 つの積み重ねに分ける、というゲームを考える。Sprague-Grundy 関数を求めよ。

terminal position は 0 なので、$g(0) = 0$。1 は、0 に動かすしかないので、$g(1) = 1$。2 は、0 に動かすしかないので、$g(2) = 1$。3 は、1,2 に動かせるので、$g(3) = 2$。4 は、0,1,2,(1,1) に動かせるので、$1 \oplus 1 = 0$ より、$g(4) = 2$。5 は、0,1,2,3,(1,2),(1,1) に動かせるので、$g(5) = 3$。同様に続けると、

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$g(x)$	0	1	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7	...

よって、Sprague-Grundy 関数

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 & (x = 1) \\ k & (x = 3k + 2) \\ k + 1 & (x = 3k, 3k + 1)(k = 0, 1, 2, ...) \end{cases}$$

7. 各ターンにプレイヤーは、1 つ積み重ねを選び、c 枚チップを取り除く ($c = 1(mod 3)$)。そしてもし望むなら、残ったチップを 2 つの積み重ねに分ける。Sprague-Grundy 関数を求めよ。

terminal position は 0 なので、$g(0) = 0$。1 は、0 にしか動かせないので、$g(1) = 1$。2 は、1 にしか動かせないので、$g(2) = 0$。3 は、2,(1,1) に動かせるので、$g(3) = 1$。4 は、0,3,(1,2) に動かせるので、$g(4) = 2$。5 は、1,4,(1,3),(2,2) に動かせるので、$g(5) = 3$。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$g(x)$	0	1	0	1	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	...

よって、Sprague-Grundy 関数

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 & (x = 1) \\ k & (x = 4k + 2) \\ k + 1 & (x = 4k + 3) \\ k + 2 & (x = 4k + 4) \\ k + 3 & (x = 4k + 5)\ (k = 0, 1, 2, ...) \end{cases}$$

8. Rims

   Rims のゲームの状態は、幾つかの交差しない閉じた輪によって分けられている、平面上の点の有限な集合である。動作は、閉じた輪を有限個の点を通るように (少なくとも 1 つ) 描く。しかし、その際他の輪に触れてはならない。プレイヤーは交互に動かし、最後に動かした方の勝ちとなる。

   (a) このゲームが本質的に nim と同じである事を示せ。

   輪を描いたとに通った点の数の分だけチップを取り除き、輪の内側の点の数と外側の点の数で、残ったチップを 2 つに分けたと考えれば、このゲームは積み重ねからチップを取り除き、望むのなら残ったチップを 2 つに分けるルールの nim と本質的に同じになる。

   (b) 次の図の状態での勝つ方法を見つけよ。

図 1.4.2 Rims の状態

(a) の考え方を用いれば、それぞれ 3,4,5 枚の積み重ねがあると考えられる。それぞれの SG 値は 3,4,5 なので、$3 \oplus 4 \oplus 5 = 2$ で、これは N-位置である。これを 0 にするためには、SG 値 3 を 1 に変えればよい。これは、3 枚の積み重ねから 2 枚取り除いて、1 枚を残せばよい。つまり、次の図のようにすればよい。

9. Winning Ways の 17 章では、Rims のような多くの幾何的なゲームが採り上げられている。それらの中の 1 つに、Rayles と呼ばれるものがある。状態は Rims と同じだが、Rayles は、それぞれの閉じた輪が必ず 1 つか 2 つの点を通らなければならない。
(a) このゲームが Kayles の形と同じである事を示せ。
Rims の nim で、ルールがチップを 1 枚か 2 枚取り除けるという事に変わったので、そうすると 4.4 の 2 で Kayles をチップの積み重ねに置き換えたとと同じになる。
(b) 図 1.4.2 の状態を Kayles の状態と見て、勝つ方法を見つけよ。
表 4.1 を使うと、3 つの積み重ねの SG 値はそれぞれ、3,1,4 で、この状態の SG 値は、$3 \oplus 1 \oplus 4 = 6$ となる。これを 0 にするためには、SG 値 4 を 2 に変えなければならない。これは 5 枚の積み重ねから 1 枚を取り除き、その後 1 枚と 3 枚の 2 つの積み重ねに分けることによってなされる。つまり、次の図のようにすればよい。

10. Grundy's Game
(a)1.4.4 の例 4 の n 枚のチップ ($n = 1, 2, ...13$) の Grundy's game の Sprague-Grundy 関数を計算せよ。
terminal position は、1,2 なので、$g(1) = g(2) = 0$。3 は、(1,2) にしか動かせないので、$g(3) = 1$。4 は、(1,3) にしか動かせないので、$g(4) = 0$。5 は、(1,4),(2,3) に動かせるので、$g(5) = 2$。同様に続けると、

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$g(x)$	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3

(b) それぞれ 5,8,13 枚の 3 つの積み重ねで Grundy's game をプレーすると、全ての勝つ方法を見つけよ。
(a) の表より、5,8,13 の SG 値はそれぞれ 2,2,3。$2 \oplus 2 \oplus 3 = 3$ より、この状態は N-位置である。これを 0 にするためには、SG 値 3 を 0 にすればよいので、13 枚の積み重ねを (5,8) にすればよい。また、SG 値 2 を 1 にしてもよいので、5 枚の積み重ねを (2,3) にするか、8 枚の積み重ねを (2,6) にすればよい。

11. ゲームは、次のような有限 (無向) グラフでプレーされる。プレイヤーは交互に動かす。動作は、頂点とその頂点に付随する全ての辺を取り除く。ただし、付随する辺がない頂点は取り除けないという例外がある。つまり、少なくとも 1 つの辺は取り除かれなければならないということである。最

後に動かしたプレイヤーの勝ちである。このゲームを調べよ。例えば、

(a)n 個の点の星型 S_n($n+1$ 個の頂点とその中の 1 つの頂点を共有した辺 n 本のグラフ) の Sprague-Grundy 値を求めよ。

このゲームは、1 枚チップを取り除くか、積み重ね全てを取り除けるというゲームと同じように考える事ができるので、その考え方で SG 値を計算していくと、

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$g(n)$	0	1	2	1	2	1	2	1	2	...

よって、Sprague-Grundy 関数

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ 1 & (n = 2k - 1) \\ 2 & (n = 2k)(k = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

(b)n 本の辺と $n+1$ 個の頂点の列 L_n の Sprague-Grundy 値を求めよ。

このゲームは、1 枚か 2 枚チップを取り除くか、2 枚取り除いて残ったチップを 2 つに分けるというゲームと同じように考える事ができるので、その考え方で SG 値を計算していくと、

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
$g(x)$	0	1	2	0	1	2	3	0	1	3	4	0	1	2	4	1	...

(c)n 個の頂点と n 本の辺の円 C_n の Sprague-Grundy 値を求めよ。

C_1 と C_2 における動作は全ての辺を取り除くしかなく、その他の $C_n(n \geq 3)$ はどこの頂点を取り除いても、L_{n-2} の形になるので、SG 値は次のようになる。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
$g(x)$	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	...

(d)2 つの星型 (2 つの星型のグラフを 1 本の辺でつないだもの) の Sprague-Grundy 値を求めよ。

(e)(i)3×3 の格子型では誰が勝つか。(ii)tic-tac-toe の board では誰が勝つか。

図 1.4.3

42

(i) 最初に真ん中の頂点を取り除けば、C_4 の形にでき、C_4 の SG 値は (c) より 0 なので、これは P-位置。よって、最初に動かすプレイヤーが勝てる。

1.5 Coin Turning Games

Exercise2.4 の Turning Turtles というゲームを nim と本質的に同じゲームとして既に述べた。この形の nim のゲームは、似た説明の他のゲームの種類の原型である。これらの考え方は、H.W.Lenstra によるものである。特に、これらのゲームの 2 次元への拡張は、nim の加法の定義と共に、非負整数を体にする nim の乗法に関する素晴らしい理論につながる。

Coin Turning Games というゲームの種類の中では、有限個のコインが一列に並び、それぞれ表か裏のどちらかになっている。動作は、表から裏に、または裏から表に、ゲームのルールによって許されているコインの集合の全てのコインをひっくり返す。ルールでは、ひっくり返したコインの中の最も右側であるものは、表から裏にしなければならない事になっている。このルールの意図は、ゲームでどのようなプレーをしても有限回の動作で終わる (the Ending Condition) という事である。

また、ルールでは、ひっくり返したコインの集合は、ひっくり返した中の最も右側にあるコインの状態に依存し、ゲームでの前の動作や現在の動作などによるその他のコインの表、裏には依存しない。さらに、ゲームは impartial で、最後に動かしたプレイヤーの勝ちとなる。

これらの状況の下で、Turning Turtles に対して働く同じ分析は、また全てのこれらのゲームにも適用される。すなわち、$x_1, ..., x_k$ という場所で、k 枚が表という状態は、$j = 1, ..., k$ で x_j という場所のみ表である j 枚のゲームの sum である。例えば、THHTTH というゲームは、TH、TTH、TTTTTH という 3 つのゲームの sum である。これは、その状態の Sprague-Grundy 値を求められる事、また 1 枚のみ表である状態の Sprague-Grundy 値を知る事だけが唯一必要である事を意味する。この例では、$g(\text{THHTTH}) = g(\text{TH}) \oplus g(\text{TTH}) \oplus g(\text{TTTTTH})$ である。それでは、いくつかの例を用いてみる。

1.5.1 例

1. Subtraction Games

   説明は複雑になるかもしれないが、多くの impartial な組合せゲームは、coin turning game の形に置き換えることができる。他方では、coin turning game としては単純な説明の幾つかのゲームは、チップの積み重ねでプレーされるゲームとしては複雑な説明である。Subtraction game は、両方の形で単純な説明である。

   1.1.1 の単純に 1 枚から 3 枚のチップを積み重ねから取り除く take-away game の例を挙げる。coin turning game としては、ルールを次のようにする。左側のコインから順番に最も右のコインがコインの枚数である n になるように番号を付けていく。x という場所のコインを必ず表から裏にするようにひっくり返し、$x \leq 3$ であると以外は、$x-1, x-2, x-3$ の場所のコインの中の 1 枚を 2 番目のコインとして、ひっくり返さなければならない。$x \leq 3$ であるとは、2 番目のコインはひっくり返す必要はない。

   1.3.3 のように、このゲームの Sprague-Grundy 関数を計算する。1 の場所での表は、それをひっく

り返す事しかできず、ゲームが終了するので、SG 値は 1 になる。2 の場所での表は、1 の場所での表か、全て裏にする事ができるので、SG 値は 2 である。この解析を続けると、次のようになる。

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc} \text{position } x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \ldots \\ g(x) & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & \ldots \end{array} \tag{1.1}$$

幾つかの表があるコインの列は、チップの積み重ねが幾つかある状態に対応する。

他の subtraction game も同様に扱われる。もし S が subtraction set なら、coin turning game として、どこかの x が表から裏になり、そしてまた $z \in S$ に対して $x - z = 0$ でない限り、$y = x - z$ 枚がひっくり返され、そうであった場合は 2 つ目のコインはひっくり返される必要はない、という説明になる。

subtraction game を coin turning game として説明するもう 1 つの方法がある。常にちょうど 2 枚のコインをひっくり返し、最も右のコインを表から裏にすると共に、コインの間には $y \in S$ の距離があるようにする。この場合の解析では、コインの場所の番号付けを 1 からではなく、0 から始めた方が使いやすい。最も左側のコインを 0 とし、その次のコインは 1、と続いていく。

$S = \{1, 2, 3\}$ という単純な場合の解析では、0 の場所での表は、terminal position で、よって SG 値 0 である。1 の場所での表は、0 の場所での表に動かすしかないので、よって SG 値 1 である。この方法で続けていくと、position $x = 0$ と $g(0) = 0$ で始まるが、(1.1) と同じ Sprague-Grundy 関数になる。

2. Twins

Turning Turtles のゲームを応用するこの方法は、Twins というゲームや、nim とも同値である。turning turtles では、最も右のコインを表から裏にすると共に、1 枚か 2 枚のコインをひっくり返す。Twins のルールでは、最も右のコインを表から裏にすると共に、2 枚のコインをひっくり返す。もし、左側のコインから順番に 0 から番号付けていくと、Sprague-Grundy 関数は $g(x) = x$ で、nim と同じである。

3. Mock Turtles

ここで、チップの積み重ねに関するものよりも、より coin turning game としての説明に適しているゲームを考える。Turning Turtles のようだが、3 枚のコインまでひっくり返す事ができる。ルールは、最も右のコインを表から裏にすると共に、1,2,3 枚のコインをひっくり返す。Sprague-Grundy 関数を計算するとは、もう一度 0 からコインに番号を付けていくと役に立つ。しかしこれには別の理由がある。0 の場所での表は、terminal position に動くしかないので、SG 値 1 である。1 の場所での表は、0 の場所での表か、terminal position に動けるので、SG 値 2 である。2 の場所での表は、1 の場所での表 (SG 値 2) か、0 の場所での表 (SG 値 1) か、0 と 1 の場所での表 (SG 値 3) か、terminal position に動く事ができるので、SG 値 4 である。さらに続けていくと、

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc} \text{position } x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \ldots \\ g(x) & 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 11 & 13 & 14 & 16 & 19 & 21 & 22 & 25 & 26 & 28 & \ldots \end{array} \tag{1.2}$$

これらの数字は何か？ $g(x)$ は $2x$ か $2x+1$ に等しいように見えるが、どちらなのか？ その答えは、$2x$ を 2 進法で表したとの 1 の数に依存している。もし、2 進法表記で 1 の数が奇数であるなら、そ

の非負整数は odious であるといい、そうでないなら evil であるという。従って、1,2,4,7 という数字は、2 進法で 0,10,100,111 なので、odious である。0,3,5,6 は、evil である (2 進法で 0,11,101,110)。(1.2) で、$g(x)$ として表されている全ての数字は、odious である。さらに、数列 (1.2) は、順番に全ての odious な数字を含んでいる。従って、$g(x)$ は、$2x$ が odious なら $2x$ で、evil なら $2x+1$ であるように思われる。これをどのように確かめるか？

鍵となる情報は、2 つの evil な数字か、2 つの odious な数字の nim-sum は evil であるという事と、evil な数字と odious な数字の nim-sum は、odious であるという事だ。記号を用いて表記すると、

$$\text{evil}\oplus\text{evil}=\text{odious}\oplus\text{odious}=\text{evil}$$
$$\text{evil}\oplus\text{odious}=\text{odious}\oplus\text{evil}=\text{odious}$$

(1.2) での SG 値が順番通りの odious な数字であるという事を示すには、帰納法によってなされる。この仮定が x より左側の全ての場所で成り立っていると考え、$g(x)$ が次の odious な数字である事を示したい。常に x でコインをひっくり返す事によって、SG 値 0 に動かせる事に注意せよ。x のコインと他の 2 枚のコインををひっくり返す事によって、全ての 0 でない evil な数字は、より小さい 2 つの odious な数字の nim-sum であるので、全てより小さい evil な数字に動かす事ができる。しかし、2 つの odious な数字の sum は evil なので、次の odious な数字に動かす事は絶対にできない。これで、帰納法が完成する。

今、$x_1, x_2, ..., x_n$ が表である Mock Turtles の状態は、$g(x_1)\oplus...\oplus g(x_n)=0$ なので、P-位置である事を考える。n は、odious な奇数の sum は odious で 0 にはなり得ないため、偶数である事は確かである。さらに、もし $g(x)$ が odious にすることが必要なら、$g(x)$ は 1 を加えて $2x$ であるため、$x_1\oplus...\oplus x_n=0$ でなければならない。逆にもし $x_1\oplus...\oplus x_n=0$ で、n が偶数なら、$g(x_1)\oplus...\oplus g(x_n)=0$ である。これは、Turning Turtles での P-位置のとても単純な説明を与える。

Mock Turtles での P-位置は、まさしく偶数個のチップの積み重ねでの nim の P-位置である。

$\{1,2,3\}$ は、nim では P-位置であるが、Mock Turtles ではそうではない。しかしながら、$\{0,1,2,3\}$ は Mock Turtles では P-位置である。0 の場所でのコインは、Mock Turtle として知られている。Mock Turtle は、この P-位置の説明では Sprague-Grundy 値 0 を持つけれども、解答の中でその役割を果たしている。

4. Ruler

ここで、coin turning game としての単純な説明のもう 1 つのゲームを考える。コインを何枚でもひっくり返してもよいが、連続であり、最も右側のコインは必ず表から裏にしなければならない。もし、左側のコインから順番に 1 から番号付けしていくと、このゲームの Sprague-Grundy 関数は次を満たさなければならない。

$$g(n)=\text{mex}\{0, g(n-1), g(n-1)\oplus g(n-2), ..., g(n-1)\oplus...\oplus g(1)\}$$

これから、次の関数を満たしている事を示す事は簡単だ。

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} \text{position } x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & ... \\ g(x) & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 8 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 16 & ... \end{array} \tag{1.3}$$

従って、$g(x)$ は x を割れる最も大きな 2 のべき数である。このゲームは、$g(x)$ が定規の表記に似ているため Ruler という。(Sprague-Grundy 関数は、Dim^+ に似ている。)

5. Grunt
   4 枚の対称なコインをひっくり返す。その 1 枚は最も左側のコインで、最も右側のコインは表から裏にしなくてはならない。これは、Grundy's game と本質的に同じである。コインの番号付けを 0 から行う。0 か 1 か 2 の場所での表は、terminal position で SG 値 0 である。$x \geq 3$ の場所での表は、$x < n/2$ である x に対して $0, x, n - x$ の場所での表に置き換えられる。0 の場所での表は、SG 値 0 であり、まさに n 枚のチップの積み重ねを 2 つの枚数の違う積み重ねに分けていく Grundy's game となる。

1.5.2　2 **次元の** Coin Turning Games

coin turning game の 2 次元への一般化では、ひっくり返されたコインは長方形の配列の中である。配列の座標を (0,0) から番号付け、座標 $(x, y)(x \geq 0, y \geq 0)$ にコインがあるとする。

最も右側のコインが表から裏にひっくり返されなければならないという状態は、(x, y) であり、南東のコインというコインの中の 1 枚を表から裏にし、ひっくり返されたその他のコインは必ず長方形 $\{(a, b) : 0 \leq a \leq x,\ 0 \leq b \leq y\}$ の中でなければならないという事に置き換えられる。

1. Acrostic Twins
   動作は、南東のコインを表から裏にし、同じ行か同じ列どちらかの 2 枚のコインをひっくり返す。Sprague-Grundy 関数は次を満たす。

$$g(x, y) = \mathrm{mex}\{g(x, b), g(a, y) : 0 \leq b < y, 0 \leq a < x\} \tag{1.4}$$

   これは、(x, y) の同じ行か列では、最小値がより早く現れない事を示している。もし $y = 0$ なら、このゲームは nim で、$g(x, 0) = x$(同様に $g(0, y) = y$) であり、関数は対称的である。次の $g(x, y)$ の値の表を作るのは簡単だ。各値は、その上の数字と左の数字の mex である。そうすると、$g(x, y)$ は nim-sum $x \oplus y$ であるという興味深い驚きがある。

表 5.1 Acrostic Twins　$g(x, y) = x \oplus y$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	3	2	5	4	7	8	9	8
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0

その考えを確かめるために、次の表でゲームを考える。

$$\begin{array}{ccccc} T & T & T & T & T \\ T & T & T & H & T \\ T & T & T & T & T \\ T & T & H & T & T \\ T & T & T & T & H \end{array} \tag{1.5}$$

そのような表で (x, y) での状態を述べると、x は行を表し、y は列を表す。従って、(1,3),(3,2),(4,4) の場所に 3 枚の表があるという事になる。これらの表は、SG 値が 2,1,0 である場所にある。$2 \oplus 1 \oplus 0 = 3$ より、これは N-位置である。SG 値 2 を 1 にすることで、P-位置に動く事ができる。これは、(1,3) と (1,0) の場所のコインをひっくり返す事によってなされる。他にも勝つ動作はある。見つけられるか。((3,2) と (3,1)、または (3,2) と (0,2) のコインをひっくり返すと、SG 値 1 を 2 にする事ができる。)

2. Turning Corners
より典型的なゲームを調べよう。
動作は、長方形の角の異なった 4 枚のコインをひっくり返す。つまり、$(a, b), (a, y), (x, b), (x, y), (0 \le a < x,\ 0 \le b < y)$ の場所のコインをひっくり返すという事である。
このゲームの Sprague-Grundy 関数は次の状態を満たす。

$$g(x, y) = \mathrm{mex}\{g(x, b) \oplus g(a, y) \oplus g(a, b) : 0 \le a < x, 0 \le b < y\} \tag{1.6}$$

選んだ長方形の角が異なる事を求めているので、南東のコインとして使われる長方形の端に沿ったコインはない。従って、任意の x, y に対して、$g(x, 0) = g(0, y) = 0$ であり、さらに帰納法によって (もしくは $(x, 1)$ でゲームが始まることは nim である事に気づく事によって)$g(1, 1) = 1$ で $g(x, 1) = \mathrm{mex}\{g(a, 1) : 0 \le a < x\} = x$ である。表 5.2 の残りは、式 (1.6) を使って作られる。

表 5.2 Turning Corners　$g(x, y) = x \otimes y$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	0	2	3	1	8	10	11	9	12	14	15	13	4	6	7	5
3	0	3	1	2	12	15	13	14	4	7	5	6	8	11	9	10
4	0	4	8	12	6	2	14	10	11	15	3	7	13	9	5	1
5	0	5	10	15	2	7	8	13	3	6	9	12	1	4	11	14
6	0	6	11	13	14	8	5	3	7	1	12	10	9	15	2	4
7	0	7	9	14	10	13	3	4	15	8	6	1	5	2	12	11
8	0	8	12	4	11	3	7	15	13	5	1	9	6	14	10	2
9	0	9	14	7	15	6	1	8	5	12	11	2	10	3	4	13
10	0	10	15	5	3	9	12	6	1	11	14	4	2	8	13	7
11	0	11	13	6	7	12	10	1	9	2	4	15	14	5	3	8
12	0	12	4	8	13	1	9	5	6	10	2	14	11	7	15	3
13	0	13	6	11	9	4	15	2	14	3	8	5	7	10	1	12
14	0	14	7	9	5	11	2	12	10	4	13	3	15	1	8	6
15	0	15	5	10	1	14	4	11	2	13	7	8	3	12	6	9

例として、式 (1.6) を使って $g(4,4)$ を計算しよう。(4,4) の場所からは、16 の動作があるが、対称性を使う事でその数字を 10 に減らせる。つまり、$(x,y)(0 \le x \le y \le 3)$ である。これらの動作の SG 値を別々に計算していくと、$g(4,4) = \text{mex}\{0,4,8,12,1,14,11,3,5,2\} = 6$。
もし (1.5) が Turning Corners の状態であるとすると、SG 値は簡単に $3 \oplus 1 \oplus 6 = 4$ である事がわかる。従ってこれは N-位置である。SG 値 6 を 2 に動かす事によって、P-位置に動かす事ができる。そのためにはただ 1 つ、(3,3),(3,4),(4,3),(4,4) のコインをひっくり返す方法がある。

$$
\begin{array}{ccccc}
T & T & T & T & T \\
T & T & T & H & T \\
T & T & T & T & T \\
T & T & H & T & T \\
T & T & T & T & H
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{ccccc}
T & T & T & T & T \\
T & T & T & H & T \\
T & T & T & T & T \\
T & T & H & H & H \\
T & T & T & H & T
\end{array}
$$

1.5.3　Nim Multiplication

表 5.2 での値は、むしろでたらめに見えるが、その感覚は当てにはならない。実際、(1.6) によって定義された関数 g は、nim の乗法として考えられる。$g(x,y)$ を表すために $x \otimes y$ という表記を使うと、任意の x に対して $x \otimes 0 = 0 \otimes x = 0$ なので、0 は乗法の 0 のように作用し、任意の x に対して $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$ なので、1 は乗法の 1 として作用する。さらに任意の x,y に対して、明らかに交換法則 $x \otimes y = y \otimes x$ が成り立つ。

必ずしも明らかではないが、次のように結合法則が成り立つ。任意の x, y, z に対して、

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z \tag{1.7}$$

さらに nim の加法での結合とは、任意の x, y, z に対して、分配法則が成り立つ。

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \tag{1.8}$$

例えば、$3 \otimes (5 \oplus 6) = 3 \otimes 3 = 2$ で、$(3 \otimes 5) \oplus (3 \otimes 6) = 15 \oplus 13 = 2$ である。

他の重要な事実は、0 以外の全ての数字は乗法の逆元を持つということである。乗法の表の 1 番上の行を除いた全ての行に 1 がある事に気づく事によって、これがわかる。従って、2 の nim での逆元は、$2 \otimes 3 = 1$ より、3 である。nim での除法を表すために $\oslash$ を使い、$1 \oslash 2 = 3$ のように書く。$1 \oslash 7 = 11, 6 \oslash 5 = 9$ を確認してみよ。

数学的な用語では、nim の加法や nim の乗法の演算の下で、非負整数は体を形成する。Lenstra(1977-78) を見よ。Conway の本 (1976) の中で、ある意味でこれが整数外になる最も単純な体である事が示されている。法則 (1.7) と (1.8) が成立する事が次が確かであると思われる。

この乗法の表を覚える必要がある事を嬉しく思ってはいないであろう。まだ、最初により小さい数字の積を求める事をせずに $24 \otimes 17$ のような積を求められればよい。ここで、素晴らしい方法を紹介する。2 のべき数の Fermat という $2^{2^n} (n = 0, 1, 2, ...)$ の数字を使う。これらの数字は、2,4,16,256,65536,... である。結合法則 (1.7) と分配法則 (1.8) に沿って、次の 2 つの規則を使って 2 つの数字の積を求める事ができる。

(i)2 のべき数の Fermat とそれより小さい数字の nim product は、普通の積である。

(ii)2 のべき数の Fermat とそれ自身の nim product は、普通の意味で、その 2 のべき数の Fermat に 3/2 をかける。

従って、$2 \otimes 16 = 32$ だが、$16 \otimes 16 = (3/2)16 = 24$ である。$24 \otimes 17$ を求めよう。

$$\begin{aligned} 24 \otimes 17 &= (16 \oplus 8) \otimes (16 \oplus 1) = (16 \otimes 16) \oplus (16 \otimes 1) \oplus (8 \otimes 16) \oplus (8 \otimes 1) \\ &= 24 \oplus 16 \oplus 128 \oplus 8 = 128 \end{aligned}$$

もう 1 つの例として、$8 \otimes 8$ を求めよう。8 は、2 つのより単純な数字の nim-sum としては書けないが、$8 = 2 \otimes 4$ のように 2 つの単純な数字の nim-product としてなら書くことができる。よって、

$$\begin{aligned} 8 \otimes 8 &= (2 \otimes 4) \otimes (2 \otimes 4) = 2 \otimes 2 \otimes 4 \otimes 4 = 3 \otimes 6 = (2 \oplus 1) \otimes (4 \oplus 2) \\ &= (2 \otimes 4) \oplus (2 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 1) = 8 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 2 = 13 \end{aligned}$$

表 5.2 で与えられた値と一致する。

1.5.4 Tartan Games

Turning Corners というゲームは、nim の情報の助けで答えを求める事ができるゲームの一種の例である。これらは、Tartan Games である。G_1, G_2 という 2 つの 1 次元の coin turning game が与えられ、次の

ように説明される動作の 2 次元の coin turning game である tartan game $G_1 \times G_2$ を定義する事ができる。もし、$x_1, x_2, ..., x_m$ の場所でコインをひっくり返す事が、G_1 でのルールの動作で、$y_1, y_2, ..., y_n$ の場所でコインをひっくり返す事が G_2 でのルールの動作であるとすれば、$(x_i, y_j)(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ でコインをひっくり返す事が $G_1 \times G_2$ でのルールの動作である (もちろん、南東のコインは表から裏にする)。

この定義で、Turning Corners は Twins×Twins のゲームである。Twins では、2 枚のコインをひっくり返すので、Turning Corners では、長方形の角の 4 枚のコインをひっくり返す。Tartan Game は、2 つの 1 次元の coin turning game である $G_1 \times G_2$ の次の定理の方法によって解析されている。

■Tartan の定理　もし、$g_1(x)$ が G_1 の Sprague-Grundy 関数で、$g_2(x)$ が G_2 の Sprague-Grundy 関数であれば、$G_1 \times G_2$ の Sprague-Grundy 関数 $g(x, y)$ はそれらの nim product である。

$$g(x, y) = g_1(x) \otimes g_2(y)$$

Twins のゲームに対しては、Sprague-Grundy 関数は単純に $g(x) = x$ である。Turning Corners=Twins×Twins なので、Tartan の定理によれば、Tarning Corners の Sprague-Grundy 関数は $g(x, y) = x \otimes y$ になる。

■Turning Turtles の 2 乗　(Turning Turtles)×(Turning Turtles) というゲームでは、Turning Corners として長方形の角の 4 枚のコインをひっくり返す事ができるが、同じ行の 2 枚のコインか、同じ列の 2 枚のコインか、どこかの 1 枚のコインもまたひっくり返す事ができる。従って、Turning Corners のようであるが、長方形は退化している。Turning Turtles の Sprague-Grundy 関数は、$g(x) = x(x \ge 1)$ であるが、コインを 0 からではなく 1 から番号付けた事を思い出してほしい。同等に表 5.2 から全ての 0 を消し、Sprague-Grundy 関数として使えばよいが、(1,1) の場所から始める事を覚えていなければならない。

例えば、もし (1.5) が (Turning Turtles)^2 の状態であるとすると、SG 値は、$8 \oplus 12 \oplus 7 = 3$ である。勝つ方法は、SG 値 7 を SG 値 4 に変える事である。これは、(5,5) のコインをひっくり返し ((1,1) から番号付けしていることを思い出す事)、また SG 値が $1 \oplus 10 \oplus 15 = 4$ である (2,3),(2,5),(5,3) の 3 枚のコインもひっくり返す事によってなされる。

$$\begin{array}{ccccc} T & T & T & T & T \\ T & T & T & H & T \\ T & T & T & T & T \\ T & T & H & T & T \\ T & T & T & T & H \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} T & T & T & T & T \\ T & T & H & H & H \\ T & T & T & T & T \\ T & T & H & T & T \\ T & T & H & T & T \end{array}$$

■Rugs　より興味深い例は、Rugs=Ruler×Ruler によって与えられる。Ruler での動作は連続したコインをひっくり返すので、Rugs での動作はコインの長方形の塊をひっくり返す。Rugs のゲームの SG 値の表を作成してみよう。Ruler での Sprague-Grundy 数列が 1 から番号付けが始まって、1,2,1,4,1,2,1,8,... である事を思い出せ。Rugs の SG 値は従ってこれらの数字の nim product である。表 5.3 では、端に Ruler での SG 値を書き、表の中には nim product を書いた。

表 5.3 Rugs の Sprague-Grundy 値

	1	2	1	4	1	2	1	8
1	1	2	1	4	1	2	1	8
2	2	3	2	8	2	3	2	12
1	1	2	1	4	1	2	1	8
4	4	8	4	6	4	8	4	11
1	1	2	1	4	1	2	1	8
2	2	3	2	8	2	3	2	12
1	1	2	1	4	1	2	1	8
8	8	12	8	11	8	12	8	13

例として、Rugs の状態としての (1.5) を考えよう。表のコインの SG 値は、8,4,1 で、nim-sum は 13 である。勝つ動作は、SG 値 8 を SG 値 5 に置き換える方法がある。これを達成する動作は、(1,1) から (2,4) の 2×4 の長方形をひっくり返す事である。

このゲームは、Turnablock と言う事もある。これでこのゲームのプレーの仕方がわかったので、http://thinks.com/java/turnablock/turnablock.htm でプレーしてみよ。

■Tartan Games を解く　tartan game で扱う事の中で難しいことの 1 つは、数字と複雑な動作が利用できる困惑によって、勝つ方法を見つける事は常に簡単ではないという事である。例えば、(Mock Turtles)×(Mock Turtles) のゲームの 2 枚の表がある次の状態を考えてみよう。

T	H	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	H

この状態から動かすとすれば、勝てるかどうかを見つけるのは簡単である。Mock Turtles の SG 数列 1,2,4,7,8,11 を思い出せば、乗法の表を使って、この問題に対応した SG 値を求める事ができる。

表 5.4 (Mock Turtles)^2 の Sprague-Grundy 値

	1	2	4	7	8	11
1	1	2	4	7	8	11
2	2	3	8	9	12	13
4	4	8	6	10	11	7
7	7	9	10	4	15	1
8	8	12	11	15	13	9

この状態での 2 枚の表は、SG 値 2,9 で、nim-sum は 11 である。従って、自分が動かす番なら勝つ事ができる。さらに、勝つために SG 値 9 を何らかの動作で SG 値 2 にしなければならないが、どのようにそ

の動作を見つけるのか？ 南東の角の SG 値 9 のコインを使ったこの状態からの動作は 176 あり、それらの多くがかなり複雑である。ここで、より簡単に勝つ動作を見つけられる方法を紹介しよう。もしなぜこの方法が機能するのかを理解すれば、なぜ Tartan の定理が成り立つのかもわかるという好都合な面もある (Exercise7 を見よ)。

方法は次の通りである。$G_1 \times G_2$ をプレーすると、SG 値が $g_1(x) \otimes g_2(y) = v$ である場所 (x, y) を考え、この SG 値 v を u に置き換えたいと思っているとしよう。(上の例では、$(x, y) = (4, 5), g_1(x) = 8, g_2(y) = 11, v = 9, u = 2$ である) この方法は 3 つのパートに分かれている。

(1)$v_1 = g_1(x), v_2 = g_2(y)$ とする。最初に SG 値 u になる (v_1, v_2) をとる Turning Corners での動作を見つける。(u_1, u_2) によって、北西の角の動作を示し、$(u_1 \otimes u_2) \oplus (u_1 \otimes v_2) \oplus (v_1 \otimes u_2) = u$ となる。

(2)x での SG 値 $g_1(x)$ を SG 値 u_1 にする動作をする 1 次元ゲーム G_1 での動作 M_1 を求めよ。($u_1 < g_1(x)$ に注意)

(3)y での SG 値 $g_2(y)$ を SG 値 u_2 にする動作をする 1 次元ゲーム G_2 での動作 M_2 を求めよ。($u_2 < g_2(y)$ に注意)

そうすれば、$G_1 \times G_2$ で SG 値 u にする動作 $M_1 \times M_2$ を求められる。

(Mock Turtles)^2 での状態での勝つ方法を求めるため、この方法を使ってみよう。$(v_1, v_2) = (8, 11)$ で、$(u_1 \otimes u_2) \oplus (u_1 \otimes 11) \oplus (8 \otimes u_2) = 2$ であるような $(u_1, u_2)(u_1 < v_1, u_2 < v_2)$ を見つけたい。1 つの可能性としては、$(3 \otimes 10) \oplus (3 \otimes 11) \oplus (8 \otimes 10) = 5 \oplus 6 \oplus 1 = 2$ であるので、$(u_1, u_2) = (3, 10)$ がある (同様に $(u_1, u_2) = (1, 1)$ があるが、これではこの方法を上手く説明できない)。今、Mock Turtles で SG 値 8 を SG 値 3 に変える動作を見つけたい。これは、$g_1(1) \oplus g_1(2) = 1 \oplus 2 = 3$ より、1,2,5 のコインをひっくり返す事によってなされる。また Mock turtles で SG 値 11 を SG 値 10 に変える動作を見つけたい。これは、$g_2(2) \oplus g_2(5) = 2 \oplus 8 = 10$ より、2,5,6 のコインをひっくり返す事によってなされる。従って、$\{1, 2, 5\} \times \{2, 5, 6\}$ の 9 枚のコインをひっくり返す動作で、次のような状態にすることが勝つ動作である。

$$
\begin{array}{cccccc}
T & T & T & T & H & H \\
T & H & T & T & H & H \\
T & T & T & T & T & T \\
T & T & T & T & T & T \\
T & H & T & T & H & T
\end{array}
$$

SG 値 0 である事を確かめよ $(8 \oplus 11 \oplus 3 \oplus 12 \oplus 13 \oplus 12 \oplus 13 = 0)$

この素晴らしい話題のより多くの側面とより多くの例が Winning Ways の 14 章で見つけられる。

1.5.5 Exercises

1. 次の coin turning game の状態を考えよ。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
T & T & H & T & H & H & T & T & H
\end{array}
$$

次の (a)-(d) のゲームでプレーしたとの勝つ動作を求めよ。

(a)Turning Turtles

Turning Turtles の SG 関数は、$g(x) = x(x \geq 1)$ なので、この状態の SG 値は、$3 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 9 = 9$。よって、SG 値 9 を 0 にすればよいので、9 の場所にあるコインを表から裏にひっくり返せばよい $(3 \oplus 5 \oplus 6 = 0)$。

(b)Twins

Twins の SG 関数は、$g(x) = x(x \geq 0)$ なので、この状態の SG 値は、$2 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 8 = 11$。これを 0 にするためには、3,8 の場所にあるコインをひっくり返せばよい $(2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5 = 0)$。

(c)2 枚のコインを必ずひっくり返さなければならない subtraction set $S = \{1, 3, 4\}$ の subtraction game

コインを 0 から番号付けしていき、SG 値を求めると次のようになる。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$g(x)$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	...

よって、この状態の SG 値は、$0 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 1 = 0$。これは P-位置なので、勝つ動作はない。

(d)Mock Turtles

Mock Turtles の SG 値 (1.2) より、この状態の SG 値は、$4 \oplus 8 \oplus 11 \oplus 16 = 23$。これを 0 にするためには、3,8 の場所のコインをひっくり返す $(4 \oplus 7 \oplus 8 \oplus 11 = 0)$。

2. (a) もし最初の状態が、最も右側のコインだけが表である n 枚のコインの列の状態であるとすると、Turning Turtles は、どのくらいの動作の数を続けられるか。

   表になっているコインと、その 1 つ左にあるコインをひっくり返す事を繰り返せば、n 回続ける事ができる。

   (b)Mock Turtles の場合はどうか。

   a_n を、最も右側のコインだけが表である n 枚のコインの列の状態で続けられる最大の動作の回数とする。コインの列で最も右にある表のコインと、その左隣りにあるコインをできるだけひっくり返す事を繰り返すと、$a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1 (n \geq 3)$ となる。

   (c)Ruler の場合はどうか。

   (b) と同様に、コインの列で最も右にある表のコインと、その左隣にあるコインをできるだけひっくり返す事を繰り返すと、$a_1 = 1, a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + 1 (n \geq 2)$ となり、$a_n = 2^{n-1}$ となる。

3. Triplets

   Mock Turtles で、1 枚か 2 枚のコインをひっくり返す事ができず、3 枚のコインをひっくり返せる場合を考える。このゲームを Triplets という。ルールは、最も右側のコインを表から裏側にして、3 枚のコインをひっくり返す。Triplets の Sprague-Grundy 関数を求めよ。Mock Turtles の Sprague-Grundy 関数と関連付けよ。

   まずコインを 0 から番号付ける。terminal position は、0,1 なので、$g(0) = g(1) = 0$。2 は、0,1 の場所に表がある状態にしか動けないので、$g(2) = 1$。同様に続けると、

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$g(x)$	0	0	1	2	4	7	8	11	13	...

よって、$g'(x)$ を Mock Turtles の Sprague-Grundy 関数とすると、

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0, 1) \\ g'(x-2) & (x \geq 2) \end{cases}$$

4. Rulerette

   Ruler のゲームで、1 枚のコインだけをひっくり返してはいけない場合を考える。ルールは、最も右側のコインを表から裏にして、連続したコインを少なくとも 2 枚ひっくり返す。このゲームの Sprague-Grundy 関数を求め、Ruler の Sprague-Grundy 関数と関連付けよ。

   まずコインを 1 から番号付ける。terminal position は、1 なので $g(1) = 0$。2 は、1 の場所に表がある状態にしか動けないので、$g(2) = 1$。3 は、2 の場所に表がある状態か、1,2 の場所に表がある状態 (SG 値 1) に動けるので、$g(3) = 0$。同様に続けると、

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$g(x)$	0	1	0	2	0	1	0	4	0	1	0	2	...

   よって、$g'(x)$ を Ruler の Sprague-Grundy 関数とすると、

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x = 2k-1) \\ g'(k) & (x = 2k)\ (\text{k=1,2,...}) \end{cases}$$

5. subtraction game の種類の coin turning game を考える。しかし、1 枚のコインをひっくり返す事ができる。ルールは、最も右側のコインを表から裏にして、1 枚か 2 枚のコインをひっくり返す。もし、2 枚のコインをひっくり返すなら、その間の距離は、subtraction set S の元でなければならない。このゲームの Sprague-Grundy 関数を subtraction set S の subtraction game の Sprague-Grundy 関数と関連付けよ。

   subtraction game のゲームで、1 枚のコインをひっくり返す事ができるというのは、nim ではコインの積み重ねを全て取り除ける、という動作に対応するので、このゲームは、第 3 章の Exercise 8 の Impatient subtraction game と同じであるという事になる。よって、普通の subtraction game の SG 関数を $g'(x)$ とすると、

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ g'(x-1) + 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

6. (a)$6 \otimes 21$ を求めよ。

$$\begin{aligned} 6 \otimes 21 &= (2 \oplus 4) \otimes (16 \oplus 4 \oplus 1) \\ &= (2 \otimes 16) \oplus (2 \otimes 4) \oplus (2 \otimes 1) \oplus (4 \otimes 16) \oplus (4 \otimes 4) \oplus (4 \otimes 1) \\ &= 32 \oplus 8 \oplus 2 \oplus 64 \oplus 6 \oplus 4 \\ &= 104 \end{aligned}$$

(b)$25 \otimes 40$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
25 \otimes 40 &= (16 \oplus 8 \oplus 1) \otimes (32 \oplus 8) \\
&= (16 \otimes 32) \oplus (16 \otimes 8) \oplus (8 \otimes 32) \oplus (8 \otimes 8) \oplus (1 \otimes 32) \oplus (1 \otimes 8) \\
&= (16 \otimes (16 \oplus 16)) \oplus 128 \oplus (8 \otimes (16 \oplus 16)) \oplus 13 \oplus 32 \oplus 8 \\
&= (16 \otimes 16) \oplus (16 \otimes 16) \oplus 128 \oplus (8 \otimes 16) \oplus (8 \otimes 8) \oplus 13 \oplus 32 \oplus 8 \\
&= 24 \oplus 24 \oplus 128 \oplus 128 \oplus 128 \oplus 13 \oplus 32 \oplus 8 \\
&= 165
\end{aligned}$$

(c)$15 \oslash 14$ を求めよ。

表 5.2 より、$14 \otimes 12 = 15$ なので、$15 \oslash 14 = 12$。

(d)8 の nim square root を求めよ (全ての整数には、nim square root の整数がある)。

表 5.2 より、$14 \otimes 14 = 8$ なので、8 の nim square root は、14。

(e)$x^2 \oplus x \oplus 6 = 0$ を解け (x^2 は、$x \otimes x$ を表す)。

最初に、$(x \oplus \alpha) \otimes (x \oplus \beta) = 0$ という式を考えると、α, β がこの方程式の解になっている。次にこの式を展開すると、$x^2 \oplus (\alpha \oplus \beta) \otimes x \oplus (\alpha \otimes \beta) = 0$ となる。よって、$\alpha \oplus \beta = 1, \alpha \otimes \beta = 6$ なので、これを満たす α, β を表 5.2 から探すと、$\alpha = 14, \beta = 15$ である事がわかる。

7. Tartan の定理の記述での表記を用いよ。

(a)(v_1, v_2) に 1 枚表がある Turning Corners での状態を考える。SG 値は、$v_1 \otimes v_2$ である。また、$g_1(x) = v_1, g_2(y) = v_2$ である (x, y) に 1 枚表がある $G_1 \times G_2$ の状態を考える。$x' \leq x, y' \leq y$ である全ての $(x', y') \neq (x, y)$ で、Tartan の定理が成り立つとする。Turning Corners で、SG 値 u の状態への動作が存在する事、そして $G_1 \times G_2$ で SG 値 u の状態への動作が存在する事を示せ。

(b)$G_1 \times G_2$ の状態では、SG 値が $v_1 \otimes v_2$ である事を結論付けよ。

8. 次の状態の (Mock Turtles)×Ruler の tartan game を考える。

T	H	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	H

(a) この状態の Sprague-Grundy 値の表を作成せよ。

	1	2	1	4	1	2	1	8
1	1	2	1	4	1	2	1	8
2	2	3	2	8	2	3	3	12
4	4	8	4	6	4	8	4	11
7	7	9	7	10	7	9	7	15
8	8	12	8	11	8	12	8	13

(b) この状態の SG 値が 15 である事に注意し、最初のプレイヤーが勝つ動作を求めよ。

まず最初に、コインの番号付けを (1,1) からしていく。

動作としては、SG 値 13 のコインをひっくり返して、SG 値 2 の状態を作り出したい。

(1)$(v_1, v_2) = (8, 8)$ で、$(u_1 \otimes u_2) \oplus (u_1 \otimes 8) \oplus (8 \otimes u_2) = 2$ であるような $(u_1, u_2)(u_1 < v_1, u_2 < v_2)$ を見つける。$(u_1, u_2) = (3, 3)$ であれば、これを満たす。

(2)Mock Turtles で、SG 値 8 を 3 に変える動作を見つける。$g_1(1) \oplus g_1(2) = 1 \oplus 2 = 3$ より、1,2,5 のコインをひっくり返す事によってなされる。

(3)Ruler で、SG 値 8 を 3 に変える動作を見つける。$g_2(6) \oplus g_2(7) = 2 \oplus 1 = 3$ より、6,7,8 のコインをひっくり返す事によってなされる。

以上により、$\{1, 2, 5\} \times \{6, 7, 8\}$ の 9 枚のコインをひっくり返して次の状態にすればよい。

T	H	T	T	T	H	H	H
T	T	T	T	T	H	H	H
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	H	H	T

9. (a) 最初の状態が、$i + j$ が奇数である (i, j) の場所で表である Rugs の $n \times n$ のゲームでは誰が勝つか。単純な戦略を与えられるか。

   $i + j$ は奇数なので、i, j は必ず奇数と偶数である。よって、$i \neq j$ であり、$n \times n$ のゲームでは、必ず (j, i) という場所も存在する。さらに、$g(i, j) = g(j, i)$ なので、この状態の SG 値は 0 であり、次のプレイヤーが勝つための戦略は存在しない。

   (b)$i + j$ が偶数である (i, j) の場所で表であれば、誰が勝つか。単純な戦略を与えられるか。

   この状態からコインを全てひっくり返せば、(a) の状態になるため、次のプレイヤーが勝つことができる。

10. G_1 が subtraction set $S = \{1, 2, 3, 4\}$ で 2 枚のコインをひっくり返す subtraction game で、G_2 が Ruler である tartan game $G_1 \times G_2$ を考える。最初の状態は、100×100 の正方形のコインのブロックである (各コインはセントで、勝者は全てを得られる)。最初は、(100,100) と (4,1) 以外のコインは全て裏である。どう動かせば勝つことができるか。

    最初に、G_1, G_2 の SG 関数を求める。G_1 の SG 関数を $g_1(x)$ とすると、$g_1(x) = (x - 1)(mod5)$(今回

は、コインを 1 から番号付けしているため) である。次に、G_2 の SG 関数を $g_2(y)$ とすると、$g_2(y)$ は、y を割り切れる最大の 2 のべき数である。よって、(100,100) と (4,1) の SG 値はそれぞれ、$4 \otimes 4 = 6$ と $3 \otimes 1 = 3$ である。

動作としては、SG 値 6 のコインをひっくり返して、SG 値 3 の状態にしたい。

(1)$(v_1, v_2) = (4, 4)$ で、$(u_1 \otimes u_2) \oplus (u_1 \otimes 4) \oplus (4 \otimes u_2) = 3$ であるような $(u_1, u_2)(u_1 < v_1, u_2 < v_2)$ を見つける。$(u_1, u_2) = (2, 2)$ であれば、これを満たす。

(2)G_1 で、SG 値 4 を 2 に変える動作を見つける。$g_1(97) = 2$ より、97,100 のコインをひっくり返す事によってなされる。

(3)G_2 で、SG 値 4 を 2 に変える動作を見つける。$g_2(97) \oplus g_2(98) \oplus g_2(99) = 1 \oplus 2 \oplus 1 = 2$ より、97,98,99,100 のコインをひっくり返す事によってなされる。

以上により、$\{97, 100\} \times \{97, 98, 99, 100\}$ の 8 枚のコインをひっくり返せば、勝つ事ができる。

1.6　Green Hackenbush

Hackenbush のゲームは、根付きグラフから辺を切る事と、既に地面とはつながっていないグラフの部分を取り除く事によってプレーされる。根付きグラフは、特別な頂点、**根**か、**地面**への幾つかの道によって全ての辺が結び付けられている無向グラフである。地面は、点線によって次の図のように示される。

このセクションでは、両方のプレイヤーが各ターンに辺を切るというこのゲームの impartial 版を議論する。これは、各辺が緑色に考えられる事から Green Hackenbush と呼ばれる。幾つかの辺が青や赤である Blue-Red Hackenbush という partizan 版もある。プレイヤー　は青い辺を切り、プレイヤー　は赤い辺を切る事ができるので、impartial ではない。Blue-Red Hackenbush は、Winning Ways で扱われた最初のゲームである。Hackenbush の一般化ゲームでは、青い辺はプレイヤー　だけが切れ、赤い辺はプレイヤー　だけが切れ、緑の辺は両方のプレイヤーが切る事ができる。

1.6.1　Bamboo Stalks(**竹の幹**)

Green Hackenbush のゲームの導入として、図 1.6.1 の左側のように、多数の竹の幹のグラフの場合を調べる。n 個の節がある竹の幹は、n の辺の底が地面に根付いている n 本の辺の線形のグラフである。動作は、節の 1 つを切り、その節と、地面とつながっていない全ての節を取り除く事である。プレイヤーは交互に動かし、最後に動かしたプレイヤーの勝ちとなる。n 個の節の 1 本の竹の幹は、より数の少ない $n-1$ から 0 個の節の竹の幹に動かす事ができる。竹の幹のゲームの sum をプレーする事は、nim をプレーする事と同値である。

図 1.6.1

例えば、左の 3 本の幹の‘ 森 ’は、3,4,5 枚のチップの積み重ねの nim のゲームと同値である。$3 \oplus 4 \oplus 5 = 2$ より、これは N-位置で、3 個の節の幹の 2 番目の節を切って、1 個の幹を残す事によって、P-位置に動かす事ができる。右の結果の状態は、Sprague-Grundy 値 0 で、P-位置である。

1.6.2　**木の** Green Hackenbush

bamboo stalks でプレーすると、Green Hackenbush はわかりやすい nim の形である。しかし、もしこれらの bamboo stalks より一般的な構造であったらどうなるのか。図 1.6.2 の 3 つの根付き木の ‘ 森 ’ を考える。‘ 根付き木 ’ は、根の頂点で分離し、全ての頂点からは根までのただ 1 つの道 (辺を繰り返さない) である特性を持っているグラフである。本質的にこれは閉路ではない事を意味する。

図 1.6.2

再び、動作はどこかの節を切り、その節と、地面につながらなくなった全ての節を取り除く。このゲームは、impartial なので、セクション 4 の一般的な理論は、そのようなそれぞれの木は、幾つかの nim の積み重ね、またもしくは幾つかの bamboo stalks と同値であるという事を示している。問題は、それぞれの木の Sprague-Grundy 値を求める事である。

これは**コロンの原理**としてより一般的な形で知られている原理を使う事によってなされる。その原理は、枝が頂点で集まっていると、長さがそれらの nim-sum と同じである枝分かれしていない幹によって置き換えられる、というものである。

図 1.6.2 の左の木が bamboo stalk と等しい事を理解するために、どのようにこの原理が働いているかを見てみよう。2 つの枝と 2 つの頂点がある。これらの頂点のより高い方には、それぞれに 1 本の辺がある 2 つの枝がある。1 と 1 の nim-sum は、0 なので、2 つの枝は辺のない 1 本の枝によって置き換えられる。言い換えれば、2 つの枝を取り除いたことになる。これは Y の形の木が残り、前に示したのと同じ理由で、Y の 2 つの枝も取り除ける。従って、図 1.6.2 の左の木は 1 枚の nim の積み重ねと等しくなる。

これは、原理の例としては少し簡単すぎるかもしれないので、図 1.6.2 の 2 番目の木を考えよう。最も左側の枝分かれしている頂点には、1 と 3 の長さで nim-sum が 2 となる 2 本の枝があるので、2 本の枝は、2 の長さの 1 本の枝によって置き換えられる。図 1.6.3 でその変形が見られる。図 1.6.2 の 2 番目の木の結論に辿り着いた方法を続けると、結果的にこのゲームは 8 枚のチップの積み重ねでの nim と等し

くなる。今、図 1.6.2 の 3 番目の木でやってみよ。4 枚の nim の積み重ねに等しい事を示せるか。

図 1.6.3

今、図 1.6.2 の 3 つの木の sum の Sprague-Grundy 関数を計算できる。$1 \oplus 8 \oplus 4 = 13$ である。これは 0 でないので、次にプレーする人間が勝てる。次の問題は勝つ動作を見つけることである。2 番目の木のどこかの辺を切って、Sprague-Grundy 値 5 にする事が勝つ動作であることは明らかである。しかし、これを達成するためにはどの辺を切らなくてはならないのか。

図 1.6.3 の木の最後の形は、前の木の 3 つの枝が nim-sum が $3 \oplus 2 \oplus 6 = 7$ である 3,2,6 なので、長さは 8 である。最後の木の長さ 5 を達成するためには、3 つの枝の 1 つを変えなくてはならない。nim-sum を 4 にするために、これは $2 \oplus 4 = 6$ より、最も左側の枝を全て切ってしまう事によって最も簡単になされる。代わりに、$3 \oplus 1 \oplus 6 = 4$ なので、真ん中の木の 1 番上の辺を切ってもよい。

これらの動作は、図 1.6.3 の左の木を切る事に対応する事をわかりやすく訳されている。しかしながら、木の右側の枝を使ってこの木に対する Sprague-Grundy 値を 5 に減らすもう 1 つの方法がある。見つけられるか (右側の枝の 1 番上の辺を切れば、nim-sum が $3 \oplus 2 \oplus 5 = 4$ になるので、SG 値 5 にできる)。

木を切る方法は、全ての木を 1 本の bamboo stalk に減らすためのコロンの原理によって与えられる。最初は 1 番高い枝から始まり、原理を利用して帰納的に根へと下っていく。今から、円周や幾つかの地面に結びつく辺を持つ根付いたグラフへのこの原理の妥当性を示そう。

■コロンの原理の証明　任意の固定されたグラフ G を考え、G の中の任意の頂点 x を選ぶ。H_1 と H_2 は、同じ Sprague-Grundy 値をもつ任意の木 (もしくはグラフ) であるとする。2 つのグラフ、$G_1 = G_x : H_1$ と $G_2 = G_x : H_2$($G_x : H_i$ は、グラフ G の頂点 x への木 H_i を結びつける事によって、グラフが構成されている事を表す) を考える。コロンの原理では、2 つのグラフ G_1, G_2 は、同じ Sprague-Grundy 値を持つと述べている。図 1.6.4 の 2 つのゲームの sum を考える。

G_1 と G_2 が同じ Sprague-Grundy 値を持つという主張は、2 つのゲームの sum は Sprague-Grundy 値 0

図 1.6.4

であるという主張に等しい。言い換えれば、sum $G_1 + G_2$ が P-位置である事を示す。

ここで、2 番目のプレイヤーが $G_1 + G_2$ を動かす場合に、勝つ保証ができる戦略がある。もし最初のプレイヤーがゲームの 1 つの G の辺の 1 つを切る事によって動かしたら、他のゲームの G の中の同じ辺を切る (そのような動作の対はゲームから H_1 と H_2 を消すかもしれないが、そうでなくても H_1 と H_2 は侵害されない)。もし最初のプレイヤーが H_1 か H_2 の辺を切る事によって動かしたら、H_1 と H_2 の Sprague-Grundy 値はもはや等しくないので、H_1 か H_2 に Sprague-Grundy 値を等しくする動作が存在する。この方法で相手がしてくる全ての動作に対して常に対応できるだろう。これは自分が最後の動作をし、勝つ事を意味する。■

1.6.3 一般的な根付きグラフの Green Hackenbush

今、任意のグラフを考える。これらのグラフは、円周や地面に結びついている節が幾つか含まれている。例として図 1.6.5 を考えよ。

図 1.6.5

4 章の一般的な理論から、それぞれの分かれたグラフは、幾つかの nim の積み重ねに等しい。nim の積

み重ねに等しい事を求めるために、nim の積み重ねに等しい木がわかる木の中から等しい木を探す。これは、**融合原理 (the fusion principle)** を使う事によってなされる。隣り合う 2 つの頂点を 1 つの頂点に融合させたり、それらの辺を輪に曲げたりして融合させる。輪は、1 つの頂点からその頂点につながっている辺であり、例として、図 1.6.5 の右の手品師の頭がある。

Green Hackenbush に関する限り、輪は葉 (1 つで結び付けられていない辺) によって置き換えられる。

■融合原理　円周上の点は、グラフの Sprague-Grundy 値を変える事なしに融合できる。

融合原理では、任意の根付きグラフはコロンの原理によって、さらに nim の積み重ねに変形できる等しい木に変形する事ができる。これを図 1.6.5 の例で見てみよう。

左の家のドアを考える。地面に結びついている 2 つの頂点は同じ頂点 (地面は本当に 1 つの頂点という事を思い出せ) なので、ドアは実は 1 つの頂点が地面に結びついている三角形と全く同じである。融合原理では、これは 3 つの輪が結びついている 1 つの頂点に等しい。それぞれの輪は、1 枚の nim の積み重ねに等しい。そして、これらの nim-sum はまた 1 枚の nim の積み重ねである。

図 1.6.6

より一般的に、奇数の辺の円周は 1 本の辺に変形でき、偶数の辺の円周は 1 つの頂点に変形できるという事がわかる。例えば、図 1.6.5 の中央のクリスマスツリーの 4 本の辺の円周は、結果的に 1 つの頂点になる 4 つの輪の 1 つの頂点に変形できる。よって、クリスマスツリーは、1 枚の nim の積み重ねに等しい。同様に、家の煙突は 1 つの頂点に、家の右の窓もまた 1 つの頂点になる。さらに続けると、家 (ドアも含めて) は SG 値 3 である事がわかる。

図 1.6.7

図 1.6.5 の手品師が SG 値 4 である事を示してみよ。また、図 1.6.5 によって与えられた Hackenbush の状態での勝つ動作を見つけよ。

融合原理の証明は、コロンの原理より幾分長いので除外する。Winning Ways の 7 章を見よ。

1.6.4 Exercises

1. (Richard Guy による Fair Game から抜粋) 図 1.6.8 のグラフの SG 値を求め、勝つ動作を見つけよ。

図 1.6.8

図の左側の図形から順に SG 値を求める。最初に、最も左側の図形を融合原理とコロンの原理に従って変形していくと、次のようになる。

よって、この図形の SG 値は 2。
左から 2 番目の図形は、次のように変形できる。

よって、この図形の SG 値は 3。
右から 2 番目の図形は、次のように変形できる。
よって、この図形の SG 値は 2。
最も右側の図形は、次のように変形できる。
よって、この図形の SG 値は 5。

以上より、この状態の SG 値は $2 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 5 = 6$ なので、これは N-位置。これを 0 にするためには、最も右側の SG 値 5 の図形を 3 にすればよい。右側の枝の 2 本の辺を切れば、SG 値 3 にする事ができる。

第２章

２人ゼロ和ゲーム　～相手が損すりゃ、自分は得する～

2.1　戦略形ゲーム

ゲーム理論の創造に最も密接に関わった人物は、20 世紀の偉大な数学者の一人である John von Neumann である。ゲーム理論の組み立てでは、特にÉmile Borel 等、Neumann より先行した者もいたが、2 人ゼロ和ゲームの理論の完成形を掲載した論文を 1928 年に発表したのは Neumann である。von Neumann の研究は、結果として Oskar Morgenstern と共同で書かれたゲーム理論の基礎となる本になり、1944 年、Theory of Game and Economic Behavior として名付けられた。他にも、Guilliermo Owen の Game Theory(1982)、Philip D. Srtaffin の Game Theory and Strategey(1993) 等で、より新しいゲーム理論の本が見つけられる。

von Neumann と Morgenstern の理論は、2 人ゼロ和ゲームという、2 人のプレイヤーだけで行われ、どちらかのプレイヤーが勝ち、どちらかのプレイヤーが負けるというゲームの種類を最も多く含んでいる。第　部では、そのようなゲームに絞って見る。まず、プレイヤー　とプレイヤー　について見てみる。

2.1.1　戦略形

ゲームの最も数学的な記述は、戦略形である。2 人ゼロ和ゲームでは、プレイヤー　への利得は、プレイヤー　の負の利得であるので、プレイヤー　への利得だけに絞り、これを L とする。

■Definition 1　2 人ゼロ和ゲームの戦略形や普通の形は、次の (X, Y, A) の 3 つの組によって与えられる。

(1) X は空集合でない、プレイヤー　の戦略の集合。
(2) Y は空集合でない、プレイヤー　の戦略の集合。
(3) A は、$X \times Y$ 上の実関数である。従って、$A(x, y)$ は、全ての $X \ni x, Y \ni y$ に対して実数。

説明は以下の通りである。両者とも他者の選択を知らない状態で、同時にプレイヤー　は $x \in X$ を選び、プレイヤー　は $y \in Y$ を選ぶ。そしてこれらの選択が知られ、　は　から $A(x, y)$ の利得を獲得する。通貨単位によって、$A(x, y)$ はセント、ドル、ペソ、ビーズであったりする。もし A が負なら、　は　にその量の絶対値を支払う。従って $A(x, y)$ は、　の勝ち分と　の負け分を表している。

これはゲームのとても簡単な定義である。まだ意味が広いので、有限な組合せゲームや、tic-tac-toe や、チェスのようなゲームも含まれる。これは戦略の定義について十分に寛大にする事でなされる。例えば、チェスのゲームの戦略は、起こりうる全ての状態への動作のゲームのプレーの仕方を全て表したものである。チェスのゲームでは、良いか悪いか、1 つの戦略さえ書くのにも時間がかかりすぎる。しかしながら、チェスをプレーするためのコンピュータを指示する幾つかのプログラムが書かれている。各プログラムは、1 つの戦略を構成する。1997 年にチェスの世界チャンピオン Gary Kasparov を破った Deep Blue のプログラムは、1 つの戦略を描く。プレイヤー　のそのような戦略の集合は、X で表される。自然に、チェスのゲームでは戦略の数が多すぎて、全ての可能な戦略を述べるのは物理的に不可能である。実際に世界で知られているのはほんの一部で、より多くの戦略が存在する。他方で、tic-tac-toe のゲームはかな

り小規模なので、全ての戦略を学ぶのも、各プレイヤーにとって最適な戦略を見つけるのも可能である。後ほど、展開形ゲームを学ぶ時に、ゲームの多くの他の種類が戦略形で作られ、述べられる。

ゲームに関する考えを説明するため、X と Y の両方が 2 つの元を含む時、最も単純な自明でない場合を考えよう。例として、Odd-or-Even というゲームを取り上げる。

2.1.2　例　Odd-or-Even

プレイヤー　と　は同時に、1 か 2 の数字をどちらか 1 つ言う。プレイヤー　の名前は、Odd(数字の和が奇数なら勝てる)、プレイヤー　の名前は Even(数字の和が偶数なら勝てる) である。敗者によって勝者に支払われる額は、常にドルにおける数の和である。戦略形としてこのゲームを表すために X, Y, A を述べなくてはならない。ここで、$X = \{1, 2\}, Y = \{1, 2\}$ で、A は次の表で与えられる。

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & \text{(even)} \quad y \\
 & & & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\
\text{(odd)} & x & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & +3 \\ +3 & -4 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$A(x, y) = \quad \text{の勝ち分} = \quad \text{の勝ち分}$$

このゲームではプレイヤーのうちの 1 人がはっきりとしたアドバンテージをもつことがわかる。どちらがそうであると言えるだろうか。

まずプレイヤー　の視点からこのゲームを解析することとしよう。　は、1 を全回数の 3/5 回、2 を全回数の 2/5 回ランダムに言う。この場合では、

1. もし　が 1 を宣言したら、　は全回数の 3/5 回 2 ドル負け、2 /5 回 3 ドル勝つ。平均して、　は $-2(3/5) + 3(2/5) = 0$ 勝つ (長期間続けると同点になる)。
2. もし　が 2 を宣言したら、　は全回数の 3/5 回 3 ドル勝ち、2/5 回 4 ドル負ける。平均して、　は $3(3/5) - 4(2/5) = 1/5$ 勝つ。

つまり、　が与えられた方法で選択を混合していくと、毎回　が 1 を宣言すれば互角であるが、毎回　が 2 を宣言すれば平均的には 20 セント勝つ。この単純な戦略を使う事によって、　は　が何をしてきても、少なくとも平均的に互角であるといえる。ではプレイヤー　は　が何を宣言しても正の数の分だけ勝てるようになるだろうか。

p はプレイヤー　が 1 を宣言する割合を示す。　が 1 か 2 のどちらを宣言しても、平均的に同じ分だけ勝てるように p を選んでみる。　が 1 を宣言する時、　の平均的な勝ち分は $-2p + 3(1 - p)$ で、　が 2 を

宣言するときは、$3p - 4(1 - p)$ なので、プレイヤー　は、p を以下のように選べばよい。

$$
\begin{aligned}
-2p + 3(1 - p) &= 3p - 4(1 - p) \\
3 - 5p &= 7p - 4 \\
12p &= 7 \\
p &= 7/12
\end{aligned}
$$

従って、　は 7/12 の割合で 1、5/12 の割合で 2 を宣言すべきである。平均的に、　は $-2(7/12)+3(5/12) = 1/12$、または $8\frac{1}{3}$ セント分だけ、ゲームをプレーする度に勝てるということになる。　が何をしてきても、相手が何をしても同じ平均の勝ち分を生み出すそのような戦略を**均等化戦略 (equalizing strategy)** という。

従って、ゲームは明らかに　に有利である。ゲーム毎に平均 $8\frac{1}{3}$ セントよりもうまくやる方法はあるか。その答えは、　が適切なプレーをすれば、あり得ないこととなる。実際、　は同じ方法を使うことができる。

7/12 の割合で 1 を宣言する。

5/12 の割合で 2 を宣言する。

もし　が 1 を宣言すれば、　は平均で $-2(7/12) + 3(5/12) = 1/12$ 負ける。もし　が 2 を宣言すれば、　は平均で $3(7/12) - 4(5/12) = 1/12$ 負ける。

従って、　には平均で少なくとも 1/12 を保証する行動があり、　は平均で多くても 1/12 負ける行動がある。1/12 をゲームの**値**といい、このリターンを保証するそれぞれが使う行動を**最適戦略 (optimal strategy)** 、または**ミニマックス戦略 (minimax strategy)** という。

もしゲームをプレーする代わりに、プレイヤーがこの争いを落ち着かせるための仲裁者を呼ぶ事を認めるなら、仲裁者は　が　に $8\frac{1}{3}$ セント払うよう要求する事は道理的であるように思える。　は　が何をしても平均的な勝ち分を保証する最適戦略が存在するから、少なくとも $8\frac{1}{3}$ セント受け取るべきであると言う事ができる。一方、　は　が何をしても平均的に多くても $8\frac{1}{3}$ セント負ける戦略を採っているから、$8\frac{1}{3}$ セント以上払う必要はないと言える。

2.1.3　純粋戦略と混合戦略

純粋戦略と混合戦略の区別をすることは役に立つ。純粋戦略として X か Y の元に言及する。様々な割合で無作為に純粋戦略の元を選ぶ、より複雑な方法を混合戦略という。従って、Odd-or-Even のゲームでの純粋戦略 1 と 2 をそれぞれ 7/12 と 5/12 の割合で組み合わせる　の最適戦略は、混合戦略である。もちろん、全ての純粋戦略 $x \in X$ は、割合 1 で純粋戦略 x を選ぶ混合戦略として考える事もできる。

この解析では、かなり複雑な仮定をする。プレイヤーが混合戦略を使う時、そのプレイヤーは平均的なリターンに興味があると思うことにする。平均だけを気にし、最大値やその時の勝ち分、負け分は気にしない。これは実際にはかなり思い切った仮定である。プレイヤーにとって、500 万ドル必ず受け取るのと、1000 万ドルを 1/2 で受け取れ、1/2 で何も受け取れないという事の間に違いはないという事である。　は、ほとんど皆が好むのは 500 万ドルであると思う。これは 1000 万の効用が、500 万の効用の 2 倍で

はないからである。

この仮定の主な根拠は、**効用理論 (utility theory)** からであり、付録 A.1 で扱われている。効用理論の基本的な前提は、その金銭的な絶対値よりも、プレイヤーに対しての効用によって、利得を評価すべきであるという事である。一般的に、プレイヤーの金の効用は、総計で線形にはならないであろう。効用理論の主な定理では、確かな道理的仮定の下で、プレイヤーの好みは効用関数の存在と矛盾せず、プレイヤーは結果の平均的な効用の基準だけで結果を判断する、と述べられている。

しかしながら、上の仮定を正当化するために効用理論を使用すると、新たな問題が起きる。すなわち、2 人のプレイヤーが異なる効用関数を持つかもしれない。同じ結果は、全く違う方法で理解されるかもしれない。これはゲームが既にゼロ和ゲームでないことを意味する。位置や規模の変更がない限り、2 人のプレイヤーの効用関数は同じである。これは、かなり強い意味の仮定であるが、金銭的に小さい量に下がったとしても、それが道理的であると信じる。

混合戦略は、適当な外部の無作為な機械 (コイントスやサイコロ等、数字を無作為に選ぶ物) の手助けで実行される。あまり使われない無作為化の方法としては、時計の秒針がその役割を果たす。例えば、Odd-or-Even のプレイヤー　は、自分の最適戦略を実行するために、1/12 の割合での外部のランダムな出来事を欲する。7/12=35/60 なので、彼はすばやく時計を見て、秒針が 0 から 35 までの数字を示しているのなら 1 を、35 から 60 の間なら 2 を宣言する。

2.1.4　ミニマックス定理

2 人ゼロ和ゲーム (X, Y, A) は、両方の戦略集合 X, Y が有限集合なら、**有限ゲーム**という。von Neumann によるゲーム理論の基本的な定理では、Odd-or-Even のゲームで出会う状況は、全て有限 2 人ゼロ和ゲームが適用される。特に、

■ミニマックス定理　全ての 2 人ゼロ和ゲームにおいて、

(1) ゲームの値という数字 V がある。

(2)　の平均的な収益が、　が何をしても少なくとも V であるような混合戦略がある。

(3)　の平均的な損益が、　が何をしても多くとも V であるような混合戦略がある。

これは後ほどより詳細に述べられ、深く議論されるミニマックス定理の 1 つの形である。もし V が 0 なら、ゲームは公平である。もし V が正なら、ゲームはプレイヤー　に有利である。一方、V が負なら、ゲームはプレイヤー　に有利であるといえる。

2.1.5　Exercises

1. Odd-or-Even のゲームで、敗者は選んだ数の和ではなく、積を勝者に払う (勝ち負けは和で判定する)。利得関数 A の表を求め、値とプレイヤーの最適戦略を求め、ゲームを解析せよ。ゲームは公平か？

A の表は、次のようになる。

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{(even)}\quad y \\
 & & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\
\text{(odd)}\quad x & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & +2 \\ +2 & -4 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

　が 1 を宣言する割合を p とおくと、最適戦略は、

$$
\begin{aligned}
-p + 2(1-p) &= 2p - 4(1-p) \\
2 - 3p &= 6p - 4 \\
9p &= 6 \\
p &= 2/3
\end{aligned}
$$

1 を 2/3 の割合、2 を 1/3 の割合で宣言する事である。

ゲームの値は、$-1(2/3) + 2(1/3) = 0$ なので、ゲームは公平である。

2. プレイヤー　は、黒のエースと赤の 8 を持っている。プレイヤー　は、赤の 2 と黒の 7 を持っている。プレイヤーは同時にカードを選んでプレーする。もし選んだカードが同じ色であったら、プレイヤー　が勝つ。違う色であればプレイヤー　が勝つ。勝ち分は、勝者のカードの数字分のドルである (エースは 1 と数える)。利得関数を定め、ゲームの値とプレイヤーの最適混合戦略を求めよ。
利得関数 A の表は、次のようになる。

$$
\begin{array}{ccc}
 & & y \\
 & & \begin{array}{cc} \text{黒 }7 & \text{赤 }2 \end{array} \\
x & \begin{array}{c} \text{黒 A} \\ \text{赤 }8 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 & -2 \\ -7 & +8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

　が黒のエースを選ぶ割合をを p とおくと、最適戦略は、

$$
\begin{aligned}
p - 2(1-p) &= -7p + 8(1-p) \\
3p - 2 &= 8 - 15p \\
18p &= 10 \\
p &= 5/9
\end{aligned}
$$

黒のエースを 5/9 の割合、赤の 8 を 4/9 の割合で選ぶ事である。

ゲームの値は、$5/9 - 2(4/9) = -1/3$ なので、ゲームはプレイヤー　に有利である。

3. Sherlock Holmes は、Moriarty 教授から逃れようとヨーロッパ大陸へ行くために、London から Dover への列車に乗り込む。Moriarty は急行列車に乗って Dover で Holmes を捕まえられる。しかしながら、Holmes は途中の駅 Canterbury で、列車から降りて惨事を避けることができる。しかしもちろん、Moriarty がこれに気づき、代わりに Canterbury で止まる事もできる。von Neumann

と Morgenstern は、次の行列で与えられるこれらの 4 つの可能性の Moriarty の値を定める (不確定な単位で)。

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Holmes} \\ & & \begin{array}{cc} \text{Canterbury} & \text{Dover} \end{array} \\ \text{Moriarty} & \begin{array}{c} \text{Canterbury} \\ \text{Dover} \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & -50 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

Holmes と Moriarty の最適戦略は何か。また値は何か。(歴史的に、Arthur Conan Doyle の The Memories of Sherlock Holmes の中の The Final Problem で Watson 医師によって物語られ、Holmes は Canterbury で列車を降り、Moriarty は Dover に行った。)

Moriarty が Canterbury に行く割合を p とおくと、最適戦略は、

$$\begin{aligned} 100p - 50(1-p) &= 100(1-p) \\ 150p - 50 &= 100 - 100p \\ 250p &= 150 \\ p &= 3/5 \end{aligned}$$

3/5 の割合で Canterbury で降り、2/5 の割合で Dover で降りる事である。

ゲームの値は、$100(3/5) - 50(2/5) = 40$。

4. 興味深い本である John Williams の The Compleat Stratetyst には多くの単純な例と戦略ゲームの有益な議論が載っている。これはその中の問題の 1 つである。

「いいゲームがあるんだ」と Alex は言った。「互いに 1 本か 2 本の指を指す。もし 1 本の指で合えば、君は私に 1 杯ダイキリをおごる。もし 2 本の指で合えば、君は私にダイキリを 2 杯おごる。もし合わなければ、私が君に 10 セント払う。これは暇つぶしになるだろう」

Olaf は言った。「それはとても退屈なゲームのようだ。少なくとも今の段階では」彼はしばらく考えた後こう言った。「55 セントの飲み物をおごらなくてはならないという不公平なゲームの補償として、ゲームをする前に毎回 42 セント私に払ってくれるのなら、君と楽しい時間を過ごせると思うよ」

Olaf は、ゲームは元々彼に不利であるという事がわかっていたので、補償としての利得を要求した。この利得によってゲームは公平になるか？ 最適戦略とゲームの値は何か？

利得関数 A の表は次のようになる。

$$\begin{array}{cccc} & & \text{Alex} & y \\ & & 1 & 2 \\ \text{Olaf} & x & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -13 & +52 \\ +52 & -68 \end{pmatrix} \end{array}$$

Olaf が 1 本の指を指す割合を p とすると、最適戦略は、

$$
\begin{aligned}
-13p + 52(1-p) &= 52p - 68(1-p)\\
52 - 65p &= 120p - 68\\
185p &= 120\\
p &= 24/37
\end{aligned}
$$

24/37 の割合で 1 本の指、13/37 の割合で 2 本の指を指す事である。
ゲームの値は、$-13(24/37) + 52(13/37) = 364/37$ なので、補償をすることによってゲームは Olaf に有利になる。

2.2 行列ゲーム - 支配

戦略形 (X, Y, A) の有限 2 人ゼロ和ゲームは、利得関数 A が行列によって表されるため、行列ゲームと呼ばれる。$X = \{x_1, ..., x_m\}$ で $Y = \{y_1, ..., y_n\}$ ならば、ゲーム行列または利得行列によって、行列は次を意味する。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = A(x_i, y_j)$$

この形では、プレイヤー　は行を選び、プレイヤー　は列を選び、　は　に選ばれた行と列にある値を払う。行列の値は、行を選んだ者の勝ち分と、列を選んだ者の負け分である。

プレイヤー　の混合戦略は、足すと 1 である m 組 $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ で表される。もし　が混合戦略 $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ を使い、　が列 j を選ぶとすると、　への (平均の) 利得は $\sum_{j=1}^{m} p_i a_{ij}$ である。同様にプレイヤー　の混合戦略は、n 組 $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ である。もし　が q を使い、　が行 i を使うと、　への利得は $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} q_j$ である。より一般的にもし　が混合戦略 p、　が混合戦略 q を使うと、　への (平均の) 利得は $p^T A q = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$ である。

行 i を選ぶプレイヤー　の純粋戦略は、混合戦略の i 番目の場所が 1 で、その他は全て 0 の単位ベクトルである e_i として表される。同様に列 j を選ぶ　の純粋戦略は e_j によって表される。次のようにゲームを解いてみようと思う。ゲームを解くとは、値を求め、少なくとも各プレイヤーに対して 1 つの最適戦略を見つけることである。時折、プレイヤーに対して全ての最適戦略を求めたいと思う。

2.2.1 Saddle points

時折、ゲームを解くのは簡単である。行列 A のある値 a_{ij} が

(1)a_{ij} は i 行目の最小値である。

(2)a_{ij} は j 列目の最大値である。

なら a_{ij} は saddle point であるという。もし a_{ij} が saddle point なら、プレイヤー　は i 行目を選ぶことによって、少なくとも a_{ij} 勝つ事ができ、プレイヤー　は j 列目を選ぶことによって、多くとも a_{ij} 負け続ける。従って、a_{ij} はゲームの値である。

Example 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

中央の値 2 はその行の最小値でその列の最大値であるから、saddle point である。従って、2 行目を選ぶ事が　にとっての最適であり、2 列目を選ぶ事が　にとっての最適である。ゲームの値は 2 で、(0,1,0) は両方のプレイヤーにとっての最適混合戦略である。

$m \times n$ の行列では、行列の値が saddle point であるかどうかを 1 つ 1 つチェックするのは面倒である。各行の最小値と各列の最大値が合うかどうかを計算する方が簡単である。ここでその方法の例を紹介する。

$$\begin{array}{rc}
 & \text{row min} \\
A = \left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \\
\text{col max} \;\; \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 2 & 2 \end{array} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rc}
 & \text{row min} \\
B = \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \\
\text{col max} \;\; \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 2 \end{array} &
\end{array}$$

行列 A では、全ての列の最大値と全ての行の最小値が合わないので、saddle point はない。しかしながら、a_{12} の 2 を 1 に変えれば、行列 B になる。ここで 4 行目の最小値は、2 列目の最大値と合うので、b_{42} は saddle point である。

2.2.2　全ての 2 × 2 の行列ゲームの解

一般的な 2×2 のゲームの行列を考えよう。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

このゲームを解く (値を求め、各プレイヤーに対して少なくとも 1 つの最適戦略を見つける事) ためには、次のように進める。

1. saddle point の有無を調べる。
2. もし saddle point がないなら、均等化戦略を求める事によって解く。

saddle point がない時に、値と最適戦略を導く事によって、2.1.2 の均等化戦略を求める方法が機能することを証明する。

saddle point がないと仮定する。もし $a \geq b$ なら、$b < c$ である (そうでなければ b は saddle point なので)。$b < c$ より、$c < d$ でなければならない (そうでなければ c が saddle point なので)。このように続けると、$d < a, a > b$ である事がわかる。言い換えれば、もし $a \geq b$ なら、$a > b < c > d < a$ であるという事である。対称性によって、もし $a \leq b$ なら、$a < b > c < d > a$ である。これは次を示す。

もし saddle point がなければ、$a > b, b < c, c > d, d < a$ か、$a < b, b < c, c < d, d > a$ のどちらかである。

次の式 (2.1),(2.2),(2.3) では、最適戦略と一般の 2×2 のゲームの値の公式を考える。もし　が p の割合で 1 行目を選ぶとすると (混合戦略 $(p, 1 - p)$ を使う)、　が 1,2 列目を使う時の平均収益は次のように等式化される。

$$ap + d(1 - p) = bp + c(1 - p)$$

p を解くと、

$$p = \frac{c - d}{(a - b) + (c - d)} \tag{2.1}$$

saddle point がないので、$(a-b)$ と $(c-d)$ は両方正か両方負かのどちらかである。従って、$0<p<1$ である。この戦略を使う時のプレイヤー　の平均的な負け分は、

$$v = ap + d(1-p) = \frac{ac-bd}{a-b+c-d}$$

もし　が割合 q で 1 列目を選ぶと (戦略 $(q, 1-q)$ を使う)、　が 1 行目と 2 行目を使った時の平均的な負け分は次のように等式化される。

$$aq + d(1-q) = bq + c(1-q)$$

従って、

$$q = \frac{c-b}{a-b+c-d} \tag{2.2}$$

saddle point がないので、$0<q<1$ である。この戦略を使う時のプレイヤー　の平均的な負け分は、

$$aq + b(1-q) = \frac{ac-bd}{a-b+c-d} = v \tag{2.3}$$

　によって同じ値は達成可能である。これは、ゲームは値があり、プレイヤーは最適戦略を持つことを示している (ミニマックス定理で述べられているものは全ての有限ゲームに適用される)。

Example 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$p = \frac{-4-3}{-2-3-4-3} = 7/12$$

$$q = \text{same}$$

$$v = \frac{8-9}{-2-3-4-3} = 1/12$$

Example 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p = \frac{2-1}{0+10+2-1} = 1/11$$

$$q = \frac{2+10}{0+10+2-1} = 12/11$$

しかし、q は 0 から 1 の間になければばならない。何が起こったのか。この問題は、この行列の saddle point があるかどうかを調べる事を忘れており、もちろんこの行列には saddle point が存在するので起こったものである (J. D. Williams The Compleat Strategyst Revised Edition, 1966, McGraw-Hill, page56)。左下の角は saddle point である。よって、$p=0, q=1$ が最適戦略で、値は $v=1$ である。

2.2.3　支配戦略を取り除く

時折、大きな行列のゲームでは、明らかにそれらを使うプレイヤーにとって悪い行や列を消す事によって、サイズを小さくする事ができる (可能ならば 2×2 の行列に)。

■Definition　行列 $A = (a_{ij})$ の i 行目は、全ての j に対して $a_{ij} \geq a_{kj}$ なら、k 行目を支配していると言う。A の j 行目は、全ての j に対して $a_{ij} > a_{kj}$ なら、k 行目を強支配していると言う。同様に、A の j 列目は、$a_{ij} \leq a_{ik}(a_{ij} < a_{ik})$ なら、k 列目を (強) 支配していると言う。

支配されている行を使ってプレイヤー　が達成できる全ての事は、少なくとも支配している行によって達成できる。従って、支配されている行は行列から消去する事ができる。同様に、支配されている列も取り除ける。より正確に言えば、支配されている行や列の除去は、ゲームの値を変える事はない。しかしながら、支配されている行か列を使った最適戦略は存在する (Exercise 9 を見よ)。もしそうであるなら、支配されている行や列の除去はまた、最適戦略の使用を取り除くことになるだろう (少なくとも 1 つの最適戦略がまだ残っているけれども)。しかしながら、強支配されている行や列を取り除く場合は、最適戦略の集合は変わらない。

この手順を繰り返し、幾つかの行か列を連続して取り除く例として、行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

最後の列は中央の列によって支配されているので、最後の列を消す事で次が得られる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

現在 1 番上の行は、1 番下の行によって支配されているので (元の行列の場合ではなく、今の状態であることに注意)、1 番上の行をを消す事によって次が得られる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

この 2×2 の行列には saddle point がないので、$p = 3/4, q = 1/4, v = 7/4$ である。元のゲームでの　の最適戦略は $(0, 3/4, 1/4)$、　は $(1/4, 3/4, 0)$ である。

行 (列) は、他の行 (列) との組合せの確率によって支配されているのなら、取り除く事ができる。

$0 < p < 1$、全ての j に対して $pa_{i_1 j} + (1 - p)a_{i_2 j} \geq a_{kj}$ ならば、k 行目は、i_1 行目を p の確率、i_2 行目を $1 - p$ の確率で選ぶ混合戦略によって支配されている。プレイヤー　は k 行目を選ぶ代わりにこの混合戦略を使って少なくとも同じ事ができる (加えて k 行目を確率 p_k で選ぶ全ての混合戦略は k の確率が i_1 と i_2 で分かれたものによって書き換えられる。これは i_1 の確率は pp_k によって増え、i_2 の確率は $(1 - p)p_k$ によって増える)。同様の議論が列にも適用される。

次の行列 A を考える。$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

中央の列は、外側の列をそれぞれ 1/2 の確率で選ぶ戦略によって支配されている。中央の列を消すと、中央の行は、1/3 の確率の 1 行目と 2/3 の確率の 2 行目の組合せによって支配されている。少なくした行列 $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ は簡単に解ける。値は $V = 54/12 = 9/2$ である。

もちろん 2 つ以上の行 (列) の混合が他の行 (列) を支配している場合でも、他の行 (列) を取り除くことができる。例として行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ の 1,2,3 列目の確率 1/3 ずつの混合は最後の列を支配しているので、取り除ける。

支配によって、全てのゲームが減らせるとは限らない。実際、たとえ行列に saddle point があっても、支配されている行や列は存在しないかもしれない。Example 1 の saddle point をもつ 3×3 のゲームがこれを証明する。

2.2.4　$2 \times n$ と $m \times 2$ のゲームを解く

サイズが $2 \times n$ と $m \times 2$ の行列のゲームは、グラフによる説明で解く事ができる。次の例を挙げる。

$$\begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

プレイヤー　が確率 p で 1 行目、確率 $1-p$ で 2 行目を選ぶとすると、もし　が 1 列目を選ぶと１への平均利得は、$2p + 4(1-p)$ である。同様に 2 列目、3 列目、4 列目の結果の利得は、それぞれ $3p + (1-p), p + 6(1-p), 5p$ となる。$0 \leq p \leq 1$ である p に対する 4 つの一次関数のをグラフにする。固定の値 p に対してプレイヤー　の勝ち分は少なくとも p に対する 4 つの関数の最小値である事は確かである。これは、これらの関数の lower envelope として知られている。　は最大の平均の勝ち分の保証を求めているので、この lower envelope の最大値を達成する p を見つけることを求める。図を見ると、2 列目と 3 列目の線が交わる所でそれが起こる。これは本来は　が 2 列目と 3 列目に制限されているゲームを解く事を意味する。ゲーム $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ の値は $v = 17/7$ である。　の最適戦略は $(5/7, 2/7)$ で、　の最適戦略は $(5/7, 2/7)$ である。図の正確さを前提とすると、元のゲームの　の最適戦略は $(5/7, 2/7)$ で、　は $(0, 5/7, 2/7, 0)$ で、値は 17/7 である。

図の正確さはチェックされている。ゲームにおける解答のいくつかの推測が与えられた時、推測が正しいかどうかを確かめる次のような絶対確実なテストがある。もし　が戦略 $(5/7, 2/7)$ を使えば、　への平均的な利得は　が 1,2,3,4 列目を使えばそれぞれ、18/7,17/7,17/7,25/7 である。従って、　への平均的な利得は、　が何をしようとも少なくとも 17/7 である。同様にもし　が (0,5/7,2/7,0) を使えば、　の平均的

図 2.2.1

な負け分は (多くとも)17/7 である。従って 17/7 は値で、これらの戦略は最適である。

1 列目の線は lower envelope の役目を果たしていないことに気づく (lower envelope は、もし 1 列目の線がグラフから取り除かれても変わらないであろう)。これは支配のテストである。実際、1 列目は 2 列目と 3 列目のそれぞれ 1/2 の確率によって支配されている。4 列目の線は、lower envelope で現れているので、4 列目は支配されない。

$m\times 2$ ゲームの例として、図 2.2.2 に関連する行列を考える。もし q が　が 1 列目を選ぶ確率とすると、　の 3 つの可能性のある行の選択に対する　の平均的な負け分は、それらを一緒にしたグラフで与えられる。ここで、プレイヤー　は与えられた q に対する最大の　の平均的な負け分を見る。これは関数の upper envelope である。　はこの upper envelope を最小にする q を見つけようとする。グラフから、1/4 から 1/3 の間にある q の値なら、この最小化が達成される。ゲームの値は 4 で、　は最適純粋戦略 2 行目を持つ。

$$\begin{array}{cc} q & 1-q \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

図 2.2.2

これらのテクニックは、$2\times\infty$ や $\infty\times 2$ のゲームでもうまく働く。

2.2.5 Latin Square Games

Latin square は、各行各列に 1 つずつ文字があるような、n 個の異なった文字の $n \times n$ の配列である。右の 5×5 の配列はその例である。もし、Latin square の各文字に絶対値が割り当てられれば、その結果の行列は Latin square game の行列である。そのようなゲームには単純な解答がある。値は行の数字の平均値で、各純粋戦略を確率 $1/n$ で選ぶ戦略が両方のプレイヤーにとっての最適である。その理由はそれほど深くはない。最適の条件は満たしている。

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & e & a & c & d \\ c & a & d & e & b \\ d & c & e & b & a \\ e & d & b & a & c \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} a = 1, b = 2, c = d = 3, e = 6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

上の例では、値は $v = (1 + 2 + 3 + 3 + 6)/5 = 3$ で混合戦略 $p = q = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$ が両方のプレイヤーにとっての最適である。matching pannies のゲームは、Latin square game である。その値は 0 で、(1/2,1/2) が両方のプレイヤーにとっての最適である。

2.2.6 Exercises.

1. 行列 $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ のゲームを解き、値と両方のプレイヤーにとっての最適 (混合) 戦略を求めよ。
   saddle point がないので、均等化戦略を求める事によって解く。式 (2.1) より、　が 1 行目を選ぶ確率を p とすると、
   $$p = \frac{2+2}{(-1+3)+(2+2)} = 2/3$$
   よって、　の最適戦略は (2/3,1/3)。
   式 (2.2) より、　が 1 列目を選ぶ確率を q とすると、
   $$q = \frac{2+3}{-1+3+2+2} = 5/6$$
   よって、　の最適戦略は (5/6,1/6)。
   以上よりゲームの値は
   $$v = \frac{-2+6}{-1+3+2+2} = 2/3$$

2. 任意の実数 t に対して、行列 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ を解け (saddle point をチェックする事を忘れない事)。また、$-\infty < t < \infty$ に対して、t の関数としてのゲームの値 $v(t)$ のグラフを描け。

$t \leq 0$ の時、0 は saddle point となり、両方のプレイヤーの最適戦略は (1,0) でゲームの値は 0 になる。$0 < t \leq 1$ の時、t は saddle point となり、両方のプレイヤーの最適戦略はそれぞれ (0,1)(1,0) でゲームの値は t になる。$t > 1$ の時、saddle point は存在しない。よって、　が 1 行目を選ぶ確率を p、　が 1 列目を選ぶ確率を q とすると、

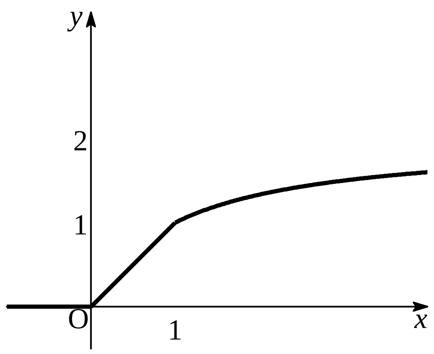
$$p = \frac{1-t}{0-2+1-t} = \frac{t-1}{t+1}$$

$$q = \frac{-1}{0-2+1-t} = \frac{1}{t+1}$$

よって、　の最適戦略は $\left(\frac{t-1}{t+1}, \frac{2}{t+1}\right)$、　の最適戦略は $\left(\frac{1}{t+1}, \frac{t}{t+1}\right)$ となり、ゲームの値は、

$$v = \frac{-2t}{0-2+1-t} = \frac{2t}{t+1}$$

これをグラフにすると、



3. $m \times n$ の行列が 2 つの saddle point を持つゲームであるなら、それらは等しい値を持つことを示せ。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行列 A が 2 つの saddle point $a_{ij}, a_{kl} (1 \leq i, k \leq m, 1 \leq j, l \leq n)$ を持つとする。
a_{ij} は saddle point なので、全ての $a_{is} (1 \leq s \leq n)$ に対して、$a_{ij} \geq a_{is}$ なので、$a_{ij} \geq a_{il}$
また、全ての $a_{tj} (1 \leq t \leq m)$ に対して、$a_{ij} \geq a_{tj}$ なので、$a_{ij} \geq a_{kj}$
さらに、a_{kl} は saddle point なので、$a_{il} \geq a_{kl}$
同様に、$a_{kj} \geq a_{kl}$
以上により、$a_{ij} \leq a_{il} \leq a_{kl}, a_{ij} \geq a_{kj} \geq a_{kl}$
よって、$a_{ij} = a_{kl}$ ■

4. 支配によって 2×2 のゲームに変形し、解け。

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(a) 支配によって、2×2 の行列にすると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

saddle point はないので、

$$p = \frac{3+1}{4-0+3+1} = 1/2, \quad q = \frac{3}{4-0+3+1} = 3/8$$

よって、　の最適戦略は $(1/2, 0, 1/2, 0)$、　の最適戦略は $(3/8, 0, 0, 5/8)$。
ゲームの値は、

$$v = \frac{12}{4-0+3+1} = 3/2$$

(b) まず 4 列目は 2 列目に支配されている。次に 3 行目は 1,2 行目を確率 1/2 で使う戦略によって支配されている。最後に 3 列目は 1,2 行目を確率 1/2 で使う戦略によって支配されている。取り除くと、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

saddle point はないので、

$$p = \frac{6-2}{10-0+6-2} = 2/7, \quad q = \frac{6}{10-0+6-2} = 3/7$$

よって、　の最適戦略は $(2/7, 5/7, 0)$、　の最適戦略は $(3/7, 4/7, 0, 0)$。
ゲームの値は、

$$v = \frac{60}{10-0+6-2} = 30/7$$

5. 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ を解け。

　が 1 行目を選ぶ確率を p とすると、　が 1,2,3,4 列目を選んだ場合の　への平均利得はそれぞれ、$5p-2, p+1, 8p-4, 5-5p$ である。これをグラフにすると、
グラフの太線で表されている lower envelope の最大値を達成する p は、

$$\begin{aligned} 5p-2 &= 5-5p \\ 10p &= 7 \\ p &= 7/10 \end{aligned}$$

の最適戦略は、(7/10,3/10)。

lower envelope の最大値は 1 列目と 4 列目の線が交わる所で達成されているので、　の最適戦略は、(7/10,0,0,3/10)。

ゲームの値は、

$$v = \frac{15}{3-0+5+2} = 3/2$$

6. 支配によって 3 × 2 のゲームに変形し、解け。

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 6 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

3 列目は、1,2 列目をそれぞれ 3/8,5/8 の確率で選ぶ戦略によって支配されているので、3 列目は取り除け、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 4 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

が 1 列目を選ぶ確率を q とすると、　が 1,2,3 行目を選んだ場合の　の平均的な負け分はそれぞれ、$8-8q, 4q+4, 16q-4$ である。これをグラフにすると、

グラフの太線で表されている upper envelope の最小値を達成する q は、

$$\begin{aligned} 8-8q &= 4q+4 \\ 12q &= 4 \\ q &= 1/3 \end{aligned}$$

の最適戦略は、(1/3,2/3,0)。

upper envelope の最小値は 1 行目と 2 行目の線が交わる所で達成されているので、　の最適戦略は、(1/3,2/3,0)。

ゲームの値は、

$$v = \frac{-64}{-8+4-8} = 16/3$$

7. 一般的に、絶対確実なテストはこのように述べられる。与えられたゲームにおいて推測された最適戦略 $(p_1, ..., p_m)$ と $(q_1, ..., q_n)$ は、もし $(p_1, ..., p_m)$ を使った時の　への平均的な利得最小値が、$(q_1, ..., q_n)$ を使った時の　の平均的な利得最大値と等しければ、確かに最適である。次の行列のゲームで、混合戦略 $p = (6/37, 20/37, 0, 11/37), q = (14/37, 4/37, 0, 19/37, 0)$ が　、　のそれぞれに最適である事を示せ。値は何か？

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

　が p を使った時の　への平均的な利得は、　が 1,2,3,4,5 列目を使った場合それぞれ、121/37, 121/37, 160/37, 121/37, 169/37 である。

よって最小値は 121/37。

　が q を使った時の　の平均的な利得は、　が 1,2,3,4 行目を使った場合それぞれ、121/37, 121/37, 120/37, 121/37 である。

よって最大値は 121/37。

以上により p, q は、　、　のそれぞれの最適戦略で、ゲームの値は 121/37。

8. $p = (52/143, 50/143, 41/143)$ が次の行列のゲームの　の最適戦略として与えられた時、ゲームの値は何か？

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

　が p を使った時の　への平均的な利得は、　が 1,2,3 列目を使った時に、それぞれ 168/143, 8/143, 112/143 である。

よって、ゲームの値は 8/143。

9. プレイヤー　が秘密に 1,2,3 から数字を 1 つ選び、プレイヤー　はそれを推測する。もし　が正しく推測できれば何も失わずに済むが、そうでなければ、　が選択した数字と　の推測した数字との差の絶対値を失う。行列を作り、2×2 の行列に減らして解け。　は、支配によって除かれる最適純粋戦略を持つ事に注意せよ。さらに、この戦略は 2×2 のゲームの最適混合戦略を支配する。
このゲームの行列は次のようになる。
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2 行目は、1,3 行目を確率 1/2 で使う戦略によって支配されている。次に、2 列目は、1,3 列目を確率 1/2 で使う戦略によって支配されている。これらを取り除くと、次のようになる。
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
saddle point はないので、
$$p = \frac{0-2}{0-2+0-2} = 1/2, \quad q = \frac{0-2}{0-2+0-2} = 1/2$$
よって、　の最適戦略は $(1/2, 0, 1/2)$、　の最適戦略は $(1/2, 0, 1/2)$。
ゲームの値は、
$$v = \frac{0-4}{0-2+0-2} = 1$$
しかし、問題にあるように、元の行列の 2 列目は　の最適戦略 $(1/2, 0, 1/2)$ を支配している。

10. Magic Square Games
magic square は、全ての行と列の和が等しい特性を持つ最初の n 個の整数の $n \times n$ の配列である。magic square game の行列の全てのゲームの解き方を示せ。例を解け。
$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$
(これは、Albrecht Dürer の本、Melencolia に掲載されている magic square である。)

11. Moves,No.6 の中の W. Drakert による記事 ”Normandy : Game and Reality”で、第 2 次世界大戦の Normandy でのヨーロッパの侵略に関する解析が与えられている。連合国による 6 つの攻撃形態 (1 から 6) と、ドイツによる 6 つの守備戦略 (A から F) の組合せ 36 の状況の全てにおいてシュミレート化し、その評価を数値化した。次の表は、ある単位でのそれぞれの仮想の戦いの連合軍に対

して与えられる値を示している。

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 13 & 29 & 8 & 12 & 16 & 23 \\ 18 & 22 & 21 & 22 & 29 & 31 \\ 18 & 22 & 31 & 31 & 27 & 37 \\ 11 & 22 & 12 & 21 & 21 & 26 \\ 18 & 16 & 19 & 14 & 19 & 28 \\ 23 & 22 & 19 & 23 & 30 & 34 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) これを 6×6 の行列のゲームとし、支配によって変形して解け。

E, F 列目は、A 列目によって支配されている。次に、4,5 行目は、6 行目によって支配されている。D 列目は、C 列目によって支配されている。2 行目は、3 行目によって支配されている。B 列目は、A, C 列目を確率 3/4,1/4 で使う戦略に支配されている。最後に、1 行目は、3 行目によって支配されている。これらを取り除くと、次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 18 & 31 \\ 23 & 19 \end{pmatrix} \end{array}$$

saddle point はないので、

$$p = \frac{19 - 23}{18 - 31 + 19 - 23} = 4/17, \quad q = \frac{19 - 31}{18 - 31 + 19 - 23} = 12/17$$

よって、連合国の最適戦略は $(0, 0, 4/17, 0, 0, 13/17)$、ドイツの最適戦略は $(12/17, 0, 5/17, 0, 0, 0)$。ゲームの値は、

$$v = \frac{342 - 713}{18 - 31 + 19 - 23} = 371/17$$

(b) 歴史的にドイツは B の戦略で守り、連合国は 1 の形態で攻撃した。これらの選択を批判せよ。

ドイツは、(a) で求めた最適戦略の通り、A か C の戦略を使うべきだった。連合国は、最適戦略を使ってはいないが、結果的にゲームの値より大きい 29 を得ており、ドイツが B を使ってくるとわかっていたのなら、それに対して最適な戦略を使ったと言える。

2.3　無差別の原理

　$m \times n$ の行列 A の行列ゲームに対して、もしプレイヤー　が混合戦略 $p = (p_1, ..., p_m)$、プレイヤー　が j 列目を使うなら、プレイヤー　への平均利得は $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$ である。もし V がゲームの値なら、　の最適戦略 p は、プレイヤー　への平均利得が、プレイヤー　が常に j 列目を選ぶならば、少なくとも V であるという特性によって述べられる。すなわち、

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \geq V \qquad {}^{\forall} j = 1, ..., n \tag{2.1}$$

同様に、戦略 $q = (q_1, ..., q_n)$ は次のようであれば最適である。

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq V \qquad {}^{\forall} j = 1, ..., m \tag{2.2}$$

両方のプレイヤーがそれぞれの最適戦略を使う時、平均利得 $\sum_i \sum_j p_i a_{ij} q_j$ は、まさしく V である。これは次の不等式からもわかる。

$$\begin{aligned} V = \sum_{j=1}^{n} V q_j \leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}) q_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j \\ = \sum_{i=1}^{m} p_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j) \leq \sum_{i=1}^{m} p_i V = V \end{aligned} \tag{2.3}$$

この V の始まりと終わりから、最後まで等しくならなくてはならない。

2.3.1　均衡定理

　次の単純な定理である均衡定理は、ある値 j に対して (2.1)、ある値 i に対して (2.2) を達成する式の条件を与える。

■Theorem3.1　$m \times n$ の行列 A のゲームと値 V を考える。　の最適戦略を $p = (p_1, ..., p_m)$、　の最適戦略を $q = (q_1, ..., q_n)$ とすると、$p_i > 0$ である全ての i に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = V \tag{2.4}$$

かつ、$q_j > 0$ である全ての j に対して、

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = V \tag{2.5}$$

■証明　$p_k > 0$ で $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}q_j \neq V$ であるような k があるとする。(2.2) から $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j < V$ である。しかし (2.3) から

$$V = \sum_{i=1}^{m} p_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j) > \sum_{i=1}^{m} p_i V = V$$

和の k 項目に対して正しいので、この等式は正しい。この矛盾は、最初の結論を証明する。2 つ目の結論も同様に解く。■

この定理の最初の結論を言い換えてみると、もし i 行目に正の確率を与える　の最適戦略が存在するなら、　の全ての最適戦略は、　が i 行目を使った時に　にゲームの値を与える、という事である。

この定理は、あるゲームの種類において、解答を導く手助けとなり、役立つ。この定理がプレイヤーに提案する方法は、$q_j > 0$ であるような j によって形作られる式 (2.5) の集合への解答を見つけようとする事である。プレイヤー　はプレイヤー　を (よい) 純粋戦略を使う事に無関心にさせる戦略を探すという事である。同様に、プレイヤー　はプレイヤー　を (よい) 戦略について無関心にさせるようにプレーすべきである。これは**無差別の原理**といわれる。

■例　この例として、両方のプレイヤーが同時に 0,1,2 を宣言する Odd-or-Even のゲームを与える。行列は、次のようになる。

$$\begin{array}{cc} & \text{Even} \\ \text{Odd} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

やはり、誰が有利かを推測するのは難しい。もしゲームを 2,3 回プレーするなら、Even の最適戦略がそれぞれの列に対して正の重み (確率) を与えるという事を確信するかもしれない。もし、この仮定が正しいなら、Odd はプレイヤー　を無関心にさせるプレーをすべきであり、Odd の最適戦略 p は次を満たさなくてはならない。

$$\begin{aligned} p_2 - 2p_3 &= V \\ p_1 - 2p_2 + 3p_3 &= V \\ -2p_1 + 3p_2 - 4p_3 &= V \end{aligned} \tag{2.6}$$

ある数字 V に対して、4 つの未知数の 3 つの等式である。満たされなくてはならない 4 つ目の等式は、

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \tag{2.7}$$

これは、4 つの未知数と 4 つの等式を与える。この方程式は次のように解かれる。最初に (6) の最初の等式を 2 番目に足す。

$$p_1 - p_2 + p_3 = 2V \tag{2.8}$$

2 番目の等式を 3 番目に足す。

$$-p_1 + p_2 - p_3 = 2V \tag{2.9}$$

(2.8) と (2.9) より、$V = 0$。(2.7) を (2.9) に足すと、$2p_2 = 1$ なので、$p_2 = 1/2$ である。(2.6) の最初の式から、$p_3 = 1/4$。(2.7) から $p_1 = 1/4$ である。従って、

$$p = (1/4, 1/2, 1/4) \tag{2.10}$$

p は　が何をしても平均利益が 0 になり続ける戦略である。従って、ゲームの値は少なくても 0 であり、もし　の最適戦略が全ての列に対して正の重みを与えるという仮定が正しければ、$V = 0$ である。答えを完璧にするためには、もし　に対する最適 p が全ての行に対して正の重みを与えるなら、　の最適戦略 q は (2.6) と (2.7) の式の p を q に置き換えたものを同じである事を満たさなくてはならない (ゲームの行列はここでは対称なので)。従って、

$$q = (1/4, 1/2, 1/4) \tag{2.11}$$

q は　が何をしても平均的な負け分が 0 になり続ける　の戦略である。従って、ゲームの値は 0 で、(2.10) と (2.11) は、それぞれ　と　の最適である。ゲームは公平である。

2.3.2 正則ゲームの行列

任意の複数の正方行列の例を解くために使われた方法を広げてみる。ゲームの行列 A を $m \times n$ とし、A は正則であるとする。　が各行に対して正の重みを与える最適戦略を持っているとする (これを all-strategies-active の場合という)。無差別の原理によって、　の全ての最適戦略 q は、(2.4) または次を満たす。

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j = V \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2.12}$$

これは、m 個の未知数の m 個の等式の集合であり、A は正則なので、q_i を解く。　の戦略の列ベクトルを表す $\mathbf{q}$ と全て 1 である列ベクトルを表す $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^\top$ を使って、ベクトル表記でこの式の集合を書いてみると、

$$A\mathbf{q} = V\mathbf{1} \tag{2.13}$$

(2.13) が A は非正則である事を意味するなら、V は 0 になり得ないという事に注意する。A は正則なので、A^{-1} が存在する。(2.13) の両辺に左から A^{-1} をかけることによって、

$$\mathbf{q} = VA^{-1}\mathbf{1} \tag{2.14}$$

もし V の値が知られていたら、これは　にただ 1 つの最適戦略を与える。V を求めるために、$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$ の式か、ベクトル表記 $\mathbf{1}^\top q = 1$ を使う。(2.14) の両辺に左から $\mathbf{1}^\top$ をかけると、$1 = \mathbf{1}^\top\mathbf{q} = V\mathbf{1}^\top A^{-1}\mathbf{1}$ である。これは、$\mathbf{1}^\top A^{-1}\mathbf{1}$ は 0 にならず、V を解く事ができることを示している。

$$V = 1/\mathbf{1}^\top A^{-1}\mathbf{1} \tag{2.15}$$

　のただ 1 つの戦略は従って、

$$\mathbf{q} = A^{-1}\mathbf{1}/\mathbf{1}^\top A^{-1}\mathbf{1} \tag{2.16}$$

しかしながら、もしある要素 q_j が負になるなら、　が各行に正の重みを与える最適戦略をもつという仮定は偽である。

しかしながら、全ての j に対して $q_j \geq 0$ なら、同じ方法によって　の最適戦略を探せる。結果は、

$$\mathbf{p}^\top = \mathbf{1}^\top A^{-1}/\mathbf{1}^\top A^{-1}\mathbf{1} \tag{2.17}$$

この議論を定理として要約すると、

■Theorem 3.2　平方行列 A は、正則で $\mathbf{1}^\top A^{-1}\mathbf{1} \neq 0$ であるとする。その時行列 A のゲームは、値 $V = 1/\mathbf{1}^\top A^{-1}\mathbf{1}$ と最適戦略 $\mathbf{p}^\top = V\mathbf{1}^\top A^{-1}$、$\mathbf{q} = VA^{-1}\mathbf{1}$ をもつ ($\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{q} \geq \mathbf{0}$)。

もしゲームの値が 0 なら、この方法は (2.13) より A は非正則なので、全く働かない。しかしながら、値を正にするために正の定数を行列の全ての値に加える事は、ゲームの行列を正則に変えるかもしれない。前の Odd-or-Even の例は通例である。行列は非正則なので、上の方法は働かないように思える。しかし例えば 1 を下の行列 A を得るために行列の全ての値に加えるなら、A は正則で、上の方法を利用できる。計算をしてみよう。ある方法かその他の方法によって、A^{-1} が得られる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -7 \\ -2 & 4 & 6 \\ -7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

A^{-1} の要素の和 $\mathbf{1}^\top A^{-1}\mathbf{1}$ は 1 になることがわかるので、(2.15) から $V = 1$ である。従って、$\mathbf{p}^\top = \mathbf{1}^\top A^{-1} = (1/4, 1/2, 1/4)^\top$ と $\mathbf{q} = A^{-1}\mathbf{1} = (1/4, 1/2, 1/4)^\top$ を計算できる。両方とも非負なので、両方とも最適で、1 は、行列 A のゲームの値である。

$\mathbf{p}$ か $\mathbf{q}$ のどちらかが負の要素を持っていたらどうすべきか。この種の疑問への完璧な解答は、Shapley と Snow(1950) の広範囲な定理の中で与えられる。この定理は、任意の値が 0 でない $m \times n$ の行列のゲームは、適切な平方部分行列 A を選び、前の方法を利用して結果の最適戦略が全体の行列 A で最適かどうかをチェックする事によって解かれる。この方法で得られた最適戦略は**基本戦略**といいい、全ての最適戦略が最適基本戦略の確率的な混合である事がわかる。Karlin(1959,Vol.　Section 2.4) の議論と証明を見よ。問題はどの平方部分行列を使うかを決める事である。線形計画法のシンプレックス法は、単純に (2.13) の形の式を解くだけでなく、どの平方部分行列を使うべきかを見つけることにも効果的な方法である。これは 2.4.4 で説明される。

2.3.3　対角ゲーム

ゲームの行列 A が平方で対角行列である対角ゲームの種類にこれらの考えを適用する。

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_m \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

全ての対角の項が正、全ての i に対して $d_i > 0$ であるとする (他の場合は Exercise 2 で扱う)。解答を求めるために定理 3.2 を利用するが、直接取り掛かるのは簡単である。式 (2.12) の集合は、

$$p_i d_i = V \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2.19}$$

この解答は単純に、

$$p_i = V/d_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2.20}$$

V を求めるために、両辺を i まで足すと、

$$1 = V \sum_{i=1}^{m} 1/d_i \quad \text{または} \quad V = (\sum_{i=1}^{m} 1/d_i)^{-1} \tag{2.21}$$

同様に、プレイヤー　の式は、

$$q_i = V/d_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2.22}$$

V は (2.21) より正なので、全ての i に対して $p_i > 0, q_i > 0$ であるので、(2.20) と (2.22) は　と　それぞれに最適戦略を与え、(2.21) はゲームの値を与える。

例として、行列 C のゲームを考える。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2.20) と (2.22) から、最適戦略は対角の元の逆数と比例する。これらの逆数の和は $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 25/12$ である。従って、値は $V = 12/25$ で、最適戦略は $p = q = (12/25, 6/25, 4/25, 3/25)$ である。

2.3.4　三角ゲーム

式 (2.12) を解くのが簡単であるゲームの他の種類は主な対角の上か下が 0 である行列である三角行列のゲームである。対角ゲームと違い、方法は常に三角ゲームを解くためには働かない。なぜなら、結果の p か q に負の要素を持つかもしれないからである。それにもかかわらず、十分に特別な言及に値するくらいしばしば働く。三角行列 T のゲームを考えよ。

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

式 (2.12) は、

$$\begin{aligned} p_1 \qquad\qquad\qquad &= V \\ -2p_1 + \ p_2 \qquad\qquad &= V \\ 3p_1 - 2p_2 + \ p_3 \qquad &= V \\ -4p_1 + 3p_2 - 2p_3 + p_4 &= V \end{aligned}$$

これらの式は、上から一度に解かれる。

$$p_1 = V \quad p_2 = 3V \quad p_3 = 4V \quad p_4 = 4V$$

$\sum p_i = 1$ から、$V = 1/12$ で $p = (1/12, 1/4, 1/3, 1/3)$ である。q の式は、

$$\begin{aligned} q_1 - 2q_2 + 3q_3 - 4q_4 &= V \\ q_2 - 2q_3 + 3q_4 &= V \\ q_3 - 2q_4 &= V \\ q_4 &= V \end{aligned}$$

答えは、

$$q_1 = 4V \quad q_2 = 4V \quad q_3 = 3V \quad q_4 = V$$

p と q は非負なので、$V = 1/12$ は値で、$p = (1/12, 1/4, 1/3, 1/3)$ は　にとっての最適で、$q = (1/3, 1/3, 1/4, 1/12)$ は　にとっての最適である。

2.3.5　対称ゲーム

もしプレイヤーの間で区別をしないのなら、ゲームは対称である。対称ゲームでは、両方のプレイヤーに同じ選択があり (ゲームの行列は平方である)、　が i を使い、　が j を使った時の利得は、　が j を使い、　が i を使った時の利得負である。これはゲームの行列が、**歪対称** ($A = -A^{\top}$、またはすべての i と j に対して $a_{ij} = -a_{ji}$) という事である。

■Definition 3.1　有限ゲームは、ゲームの行列が平方で歪対称なら、**対称**であるという。

じゃんけんはその例である。このゲームでは、プレイヤー　と　が同時にグー、チョキ、パーを見せ合う。もし同じものを見せ合ったら、利得はない。もし両者が違うものを見せ合えば、チョキはパーに勝ち (はさみは紙を切る)、グーはチョキに勝ち (岩ははさみを壊す)、パーはグーに勝つ (紙は岩を包む)。もし勝ち分または負け分の利得が 1 の単位なら、ゲームの行列は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ \text{パー} \\ \text{チョキ} \\ \text{グー} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{パー} & \text{チョキ} & \text{グー} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

この行列は歪対称なので、ゲームは対称である。行列の対角線の要素は 0 である。これは $a_{ii} = -a_{ii}$ が全ての i に対して $a_{ii} = 0$ を意味するので、歪対称行列である。

対照的な例は、matching pennies のゲームである。2 人のプレイヤーが同時にペニー硬貨の表か裏のどちらかを見せ合う。プレイヤー　は、選択が合えば勝つ。プレイヤー　は、選択が違えば勝つ。このゲームでは、多くの対称性があるが、対称ゲームとは呼ばない。その行列は、

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{表} & \text{裏} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{表} \\ \text{裏} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

この行列は歪対称ではない。

対称ゲームは公平である。つまり、値 $V = 0$ である事を期待する。これは確かにこの場合である。

■Theorem 3.3　有限な対称ゲームは値 0 を持つ。1 人のプレイヤーに対して最適な全ての戦略は他者にとっても最適である。

■証明　$\mathbf{p}$ を　にとっての最適戦略とする。もし　が同じ戦略を使うなら、平均的な利得は 0 である。なぜなら、

$$\mathbf{p}^\top A\mathbf{p} = \sum\sum p_i a_{ij} p_j = \sum\sum p_i(-a_{ji})p_j = -\sum\sum p_j a_{ji} p_i = -\mathbf{p}^\top A\mathbf{p} \tag{2.23}$$

これは $\mathbf{p}^\top A\mathbf{p} = 0$ を意味する。これは値 $V \le 0$ という事を示す。対称の議論では、$V \ge 0$ である事が示されている。従って、$V = 0$ である。今、$\mathbf{p}$ を　にとっての最適としている。全ての j に対して、$\sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \ge 0$。従って、全ての i に対して $\sum_{j=1}^m a_{ij} p_j = -\sum_{j=1}^m p_j a_{ji} \le 0$ なので、$\mathbf{p}$ は　にとっても最適である。対称性により、もし $\mathbf{q}$ が　にとって最適なら、　にとっても最適である。■

■Mendelsohn Games　2 人のプレイヤーが同時に 1 から $n(n \ge 3)$ までの整数の中から 1 つを選ぶ。もし数字が等しいなら、利得はない。相手が選んだ数字より 1 つ大きい数字を選べば、1 勝つ。相手が選んだ数字より 2 つ以上大きい数字を選べば、2 負ける。ゲームの行列を求め、ゲームを解け。

■解答　利得行列は、

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 2 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 & \dots \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ -2 & -2 & 1 & 0 & -1 & \dots \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.24}$$

ゲームは対称なので、値は 0 で、プレイヤーはただ 1 つの最適戦略を持つ。1 行目は 4,5,6,... 行目を支配しているので、3×3 の部分行列に制限できる。$p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$ である　にとっての最適戦略があるかを疑う。もしそうであるなら、無差別の原理から ($q_1 = p_1 > 0, q_2 = p_2 > 0, q_3 = p_3 > 0$ が　にとっての最適なので)、

$$\begin{aligned} p_2 - 2p_3 &= 0 \\ -p_1 \quad + \quad p_3 &= 0 \\ 2p_1 - p_2 \quad &= 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

最初の 2 つの式から、$p_2 = 2p_3$ と $p_1 = p_3$ がわかり、3 つ目の式は不要である。$p_1 + p_2 + p_3 = 1$ なので、$4p_3 = 1$ で、$p_1 = 1/4, p_2 = 1/2, p_3 = 1/4$ である。p_1, p_2, p_3 は正なので、これは $p = q = (1/4, 1/2, 1/4, 0, 0, ...)$ が両方のプレイヤーにとっての最適であるという解答を与える。

2.3.6　不変性

matching pennies のゲームを考える。2 人のプレイヤーが同時に表か裏を選ぶ。プレイヤー　は選択が合えば勝ち、プレイヤー　はそうでなければ勝つ。

どちらかのプレイヤーが裏の代わりに表を選ぶ多くの理由はないように思える。実際、問題は表と裏の名前を交換しても同じである。言い換えれば、問題は純粋戦略の名前を変換した下での不変性である。このセクションでは、不変性の考え方を正確にする。不変戦略の考え方を定義し、ミニマックス戦略の捜索を示し、不変戦略に制限する。この結果の使用は、多くのゲームのミニマックス戦略を探すのを大いに簡単にする。例の matching pennies のゲームでは、どちらかのプレイヤーに 1 つの不変戦略しかない。つまり、表か裏を 1/2 の確率で選ぶものである。従って、この戦略はさらなる計算のないミニマックスである。

プレイヤー　の視点から問題を見る。Y をプレイヤー　の純粋戦略空間とし、有限であると仮定する。変換 $g{:}Y \mapsto Y$ は、g の値域が Y の全体、つまり全ての $y_1 \in Y$ に対して $g(y_2) = y_1$ であるような $y_2 \in Y$ があれば、Y への全射であると言う。Y 自身への変換 g は、$g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ ならば、単射であると言う。

■Definition 3.2　$G = (X, Y, A)$ を有限ゲームとし、g を Y 自身への全単射の変換とする。全ての $x \in X$ に対して、次のようなただ 1 つの $x' \in X$ が存在すれば、ゲーム G は、g の下で**不変**であるという。

$$A(x, y) = A(x', g(y)) \qquad {}^{\forall}y \in Y \tag{2.26}$$

ただ 1 つの x' という必要条件は、次のようなもう 1 つの $x'' \in X$ があれば、制限されない。

$$A(x, y) = A(x'', g(y)) \qquad {}^{\forall}y \in Y \tag{2.27}$$

そうすると、$A(x', g(y)) = A(x'', g(y)) \qquad {}^{\forall}y \in Y$ であり、g は全射なので、

$$A(x', y) = A(x'', y) \qquad {}^{\forall}y \in Y \tag{2.28}$$

従って、戦略 x' と x'' は同じ利得を持ち、問題が少しも変わる事なく X からそれらの 1 つを取り除くことができる。

物事を単純に保つために、全ての重複している純粋戦略は取り除けるという一般性の損失を考えない事にする。すなわち、次のように仮定する。

$$\begin{aligned} A(x', y) = A(x'', y) &\qquad {}^{\forall}y \in Y \Rightarrow x' = x'' \\ A(x, y') = A(x, y'') &\qquad {}^{\forall}y \in Y \Rightarrow y' = y'' \end{aligned} \tag{2.29}$$

定義 3.2 の x' の一致性は、この仮定から導かれる。

定義 3.2 で与えられた x' は、g と x だけに依存する。$x' = \bar{g}(x)$ によって、それを示す。不変性を定義する式 (2.26) を次のように書く。

$$A(x, y) = A(\bar{g}(x), g(y)) \qquad {}^{\forall}x \in X, {}^{\forall}y \in Y \tag{2.26′}$$

写像 g は、$\bar{g}(x_1) = \bar{g}(x_2)$ なら次のようになるので、単射の X の変換である。

$$A(x_1, y) = A(\bar{g}(x_1), g(y)) = A(\bar{g}(x_2), g(y)) = A(x_2, y) \tag{2.30}$$

仮定 (2.29) から、全ての $y \in Y$ に対して $x_1 = x_2$ である。従って、g の逆写像 g^{-1} は、$g^{-1}(g(x)) = g(g^{-1}(x)) = x$ が存在する事によって、定義される。さらに、有限集合の全ての単射である変換は、自動的に全射であるので、$\bar{g}$ は自身に全単射である X の変換である。

■Lemma 1　もし有限ゲーム $G = (X, Y, A)$ が単射 g の下で不変なら、G もまた g^{-1} の下で不変である。

■**証明**　全ての $x \in X$ と $y \in Y$ に対して、$A(x, y) = A(\bar{g}(x), g(y))$ が与えられる。全ての x と y に対して真なので、y を g^{-1} に、x を g^{-1} に置き換えても真である。これらは、全ての $x \in X$ と全ての $y \in Y$ に対して $A(\bar{g}^{-1}(x), \bar{g}^{-1}(y)) = A(x, y)$ を与える。これは、G は g^{-1} の下で、不変である事を示す。■

■Lemma 2　もし有限ゲーム $G = (X, Y, A)$ が、2 つの単射である g_1, g_2 の下で不変なら、G もまた $g_2g_1(y) = g_2(g_1(y))$ によって定義される合成変換 g_2g_1 の下で不変である。

■**証明**　全ての $x \in X$ と $y \in Y$ に対して、$A(x, y) = A(\bar{g_1}(x), g_1(y))$ と全ての $x \in X$ と $y \in Y$ に対して、$A(x, y) = A(\bar{g_2}(x), g_2(y))$ が与えられる。従って、

$$A(x, y) = A(\bar{g_2}(g_1(x)), g_2(g_1(y))) = A(\bar{g_2}(\bar{g_1}(x), g_2g_1(y)) \qquad {}^{\forall}y \in Y, {}^{\forall}x \in X \tag{2.31}$$

これは、g_2g_1 の下で G が不変である事を示す。■

さらに、これらの証明は次を示している。

$$\overline{g_2g_1} = \bar{g_2}\bar{g_1} \quad \text{かつ} \quad \overline{g^{-1}} = \bar{g}^{-1} \tag{2.32}$$

従って、問題が不変である下での Y 上の変換の class g は、乗法の演算子としての群 $\mathcal{G}$ を形作る。群の単位元 e は、全ての $y \in Y$ に対して恒等変換 $e(y) = y$ である。X 上に対応する変換 $\bar{g}$ の集合 $\mathcal{G}$ もまた群であり、全ての $x \in X$ に対して、恒等式 $\bar{e}(x) = x$ である。式 (2.32) は、$\bar{\mathcal{G}}$ は $\mathcal{G}$ と群として同型であり、それらは indistinguishable である事を示している。

これは、プレイヤー　の視点から問題を解析でき、同じ群 $\bar{\mathcal{G}}$ と $\mathcal{G}$ に辿り着く事を示す。

■Definition 3.3　有限ゲーム $G = (X, Y, A)$ は、全ての $g \in \mathcal{G}$ に対して (2.26’) を満たすなら、変換の群 $\mathcal{G}$ の下で不変であるという。

今、群 $\mathcal{G}$ の下で不変であるプレイヤー　にとっての混合戦略 q が何を意味するかを定義する。m を X の元の数、n を Y の元の数とする。

■Definition 3.4　有限ゲーム $G = (X, Y, A)$ が、Y の単射の変換の群 $\mathcal{G}$ の下で不変であれば、プレイヤー　にとっての混合戦略 $q = (q(1), ..., q(n))$ は、次のようであれば $\mathcal{G}$ の下で不変であるという。

$$q(g(y)) = q(y) \qquad {}^\forall y \in Y, {}^\forall g \in \mathcal{G} \tag{2.33}$$

同様にプレイヤー　にとっての混合戦略 $p = (p(1), ..., p(m))$ は、次のようであれば $\mathcal{G}$(または $\overline{\mathcal{G}}$) の下で不変であるという。

$$p(\overline{g}(x)) = p(x) \qquad {}^\forall x \in X, {}^\forall \overline{g} \in \overline{\mathcal{G}} \tag{2.34}$$

Y の 2 点 y_1 と y_2 は、$g(y_2) = y_1$ のような $g \in \mathcal{G}$ が存在するなら、同値であるという。これは、同値関係であるという事を示す簡単な練習である。これらの同値類はまた、軌道という。従って、もし同じ軌道上にあるなら、y_1 と y_2 は同値である。言い換えれば、プレイヤー　の混合戦略 q は、軌道上で定数なら、すなわち、もし軌道上の全ての純粋戦略に同じ確率を割り当てるなら、不変である。この考えの power は、次の定理に含まれている。

■Theorem 3.4　もし有限ゲーム $G = (X, Y, A)$ が群 $\mathcal{G}$ の下で不変であるなら、プレイヤーにとっての不変最適戦略が存在する。

■**証明**　プレイヤー　が不変最適戦略を示すのは十分である。ゲームが有限なので、値 V とプレイヤー　にとっての最適混合戦略 q^* が存在する。すなわち、

$$\sum_{y \in Y} A(x, y) q^*(y) \leq V \qquad {}^\forall x \in X \tag{2.35}$$

同じ条件を満たす不変戦略 $\tilde{q}$ があることを示さなくてはならない。$N = |\mathcal{G}|$ を群 $\mathcal{G}$ の元の数とする。次を定義する。

$$\tilde{q}(y) = \frac{1}{N} \sum_{g \in \mathcal{G}} q^*(g(y)) \tag{2.36}$$

(これは各軌道を導き、軌道での確率の平均によって各確率を置き換える。) $\tilde{q}$ は、全ての $g' \in \mathcal{G}$ に対して、次のようになるので不変である。

$$\begin{aligned} \tilde{q}(g'(y)) &= \frac{1}{N} \sum_{g \in \mathcal{G}} q^*(g(g'(y))) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{g \in \mathcal{G}} q^*(g(y)) = \tilde{q}(y) \end{aligned} \tag{2.37}$$

さらに、次のようになるので、$\tilde{q}$ は (35) を満たす。

$$\begin{aligned}\sum_{y\in Y} A(x,y)\tilde{q}(y) &= \sum_{y\in Y} A(x,y)\frac{1}{N}\sum_{g\in\mathcal{G}} q^*(g(y)) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{y\in Y} A(x,y)q^*(g(y)) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{y\in Y} A(\overline{g}(x),g(y))q^*(g(y)) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{y\in Y} A(\overline{g}(x),y)q^*(y) \\ &\le \frac{1}{N}\sum_{g\in\mathcal{G}} V = V\end{aligned} \tag{2.38}$$

■

matching pennies では、$X = Y = \{1,2\}$、$A(1,1) = A(2,2) = 1$、$A(1,2) = A(2,1) = -1$ である。ゲーム $G = (X,Y,A)$ は、e が恒等変換である群 $\mathcal{G} = \{e,g\}$ の下で不変であり、g は変換 $g(1) = 2, g(2) = 1$ である。(混合) 戦略 $(q(1),q(2))$ は、$q(1) = q(2)$ なら $\mathcal{G}$ の下で不変である。$q(1) + q(2) = 1$ なので、これは $q(1) = q(2) = 1/2$ はプレイヤー　にとってただ 1 つの不変戦略であるという事を意味する。従って、ミニマックスである。同様に、$p(1) = p(2) = 1/2$ はプレイヤー　にとってただ 1 つの不変であり、従ってミニマックスである戦略である。

同様に、じゃんけんは群 $\mathcal{G} = \{e,g,g^2\}, g(\text{パー}) = \text{チョキ}, g(\text{チョキ}) = \text{グー}, g(\text{グー}) = \text{パー}$ である下で不変である。ただ 1 つの不変であり、従ってミニマックスである戦略は、グー、チョキ、パーそれぞれに 1/3 の確率を与える。

■Colonel Blotto Games　不変性によって変形できる面白いゲームとして、Tukey(1949) によって紹介された Blotto Games という戦略的な軍事ゲームの種類を考えてみる。これらのゲームには多くのバリエーションがあり、例として次の web ページを見よ。

http://www.amsta.leeds.ac.uk/~pmt6jrp/personal/blotto.html

ここでは、Williams(1954), Karlin(1959), Dresher(1961) で扱われた discrete version を説明する。

Colonel Blotto は、2 つの区域を占領するための 4 つの連隊がある。有名な Lieutenant Kije は、同じ区域を占領するための 3 つの連隊がある。利得は次のように定義される。どちらかの区域により多くの部隊を送った軍がその場所を占領し、もう一方によって全ての連隊は送られ、区域を占領すると 1 ポイントが得られ、占領した区域に送られた相手の連隊 1 つにつき 1 ポイントを得る。もしプレイヤーが 1 つの区域に同じ数の連隊を送ったなら、引き分けとなり、利得はない。

Colonel Blotto は、2 つの区域に自分の連隊をどのように分けるかを決めなくてはならない。利用できる純粋戦略は 5 つあり、(n_1,n_2) は n_1 の連隊が番号 1 の区域に送られ、n_2 の連隊が番号 2 の区域に送られる戦略を表すとすると、$X = \{(4,0),(3,1),(2,2),(1,3),(0,4)\}$ である。Lieutenant Kije には 4 つの純粋戦

略があり、$Y = \{(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\}$ である。利得行列は、

$$\begin{array}{c} \\ (4,0) \\ (3,1) \\ (2,2) \\ (1,3) \\ (0,4) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (3,0) & (2,1) & (1,2) & (0,3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.39}$$

あいにく、5×4 の行列は、支配戦略による除去によって減らす事はできない。なので、これを解くにはシンプレックス法を使わなくてはならないように思える。しかしながら、この問題にはずいぶん問題を簡単にする不変性がある。これは区域の間の対称性に関連する。これは次のようである群 $\mathcal{G} = \{e, g\}$ を導く。

$$g((3,0)) = (0,3) \quad g((0,3)) = (3,0) \quad g((2,1)) = (1,2) \quad g((1,2)) = (2,1)$$

また、次のようである対応する群 $\overline{\mathcal{G}} = \{\overline{e}, \overline{g}\}$ も導く。

$$\overline{g}((4,0)) = (0,4) \quad \overline{g}((0,4)) = (4,0) \quad \overline{g}((3,1)) = (1,3) \quad \overline{g}((1,3)) = (3,1) \quad \overline{g}((2,2)) = (2,2)$$

(ゲームはまた、g_1 を (3,0) と (0,2)、g_2 を (2,1) と (1,2) と入れ替えた次のような 4 つの元の群 $\mathcal{G}' = \{e, g_1, g_2, g_1 g_2\}$ の下で不変である。

$$\begin{array}{llll} g_1((3,0)) = (0,3) & g_1((0,3)) = (3,0) & g_1((2,1)) = (2,1) & g_1((1,2)) = (1,2) \\ g_2((3,0)) = (3,0) & g_2((0,3)) = (0,3) & g_2((2,1)) = (1,2) & g_2((1,2)) = (2,1) \end{array}$$

しかしこれは同じ軌道を導き、$\mathcal{G}$ としての不変戦略を持つ。)

Kije の軌道は、$\{(3,0),(0,3)\}$ と $\{(2,1)(1,2)\}$ である。従って戦略 q は、$q((3,0) = q((0,3)), q((2,1)) = q((1,2))$ であれば不変である。同様に Blotto の軌道は、$\{(4,0),(0,4)\}, \{(3,1),(1,3)\}, \{(2,2)\}$ である。よって Blotto の戦略 p は、$p((4,0)) = p((0,4)), p((3,1)) = p((1,3))$ であれば不変である。

Kije の戦略空間を 2 つの元に減らし、次のように定義する。

$(3,0)^*$: (3,0) と (0,3) をそれぞれ 1/2 の確率で使う。

$(2,1)^*$: (1,2) と (2,1) をそれぞれ 1/2 の確率で使う。

同様に、Blotto の戦略空間を 3 つの元に減らす。$(4,0)^*$: (4,0) と (0,4) をそれぞれ 1/2 の確率で使う。

$(3,1)^*$: (1,3) と (3,1) をそれぞれ 1/2 の確率で使う。

$(2,2)$: (2,2) を使う。

これらの戦略空間によって、利得行列は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ (4,0)^* \\ (3,1)^* \\ (2,2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (3,0)^* & (2,1)^* \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0 & 1.5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.40}$$

これらの利得を導くために使われた計算の例として、左上の値を考える。もし Blotto が (4,0) と (0,4) をそれぞれ 1/2 の確率で使い、Kije が (3,0) と (0,3) をそれぞれ 1/2 の確率で使うとすると、行列 (14) の 4

つの角はそれぞれ 1/4 の確率で起こるので、期待される利得は、4 つの数字,4,0,0,4 の平均となり、すなわち 2 である。

解析を完全にするために、行列 (2.40) のゲームを解く。最初に、中央の行が 1 番上の行によって支配されている事に注意する (最初の行列には支配はないけれども)。中央の行を取り除き、解答が簡単に求められる 2×2 の行列に減らす。混合戦略 $(8/9, 0, 1/9)$ が Blotto にとっての最適で、混合戦略 $(1/9, 8/9)$ が Kije にとっての最適であり、$V = 14/9$ は値である。

2.3.7 Exercises

1. 行列 $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のゲームを考えよ。

   (a) このゲームが saddle point を持つことを示せ。
   第 2 行第 3 列の 1 は、行の最小値であり、列の最大値であるので saddle point である。

   (b) 逆行列が存在する事を示せ。

   与えられた行列を A、$A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ とすると、$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ なので、A^{-1} は A の逆行列。よって存在する。

   (c) 　は各列に正の重みを与える最適戦略を持つことを示せ。

   A は正則な正方行列なので、定理 3.2 より、$V = 1/\mathbf{1}^{\top}A^{-1}\mathbf{1} = 1$。よって、　の最適戦略 $\mathbf{q} = VA^{-1}\mathbf{1} = (2/5, 4/5, -1/5)^{\top}$

   (d) ところで、式 (2.16) は、　にとっての最適戦略を与えないか？

2. 行列 (2.18) の対角行列のゲームを考えよ。

   (a) 対角の項の 1 つが 0 であるとする。ゲームの値は何か？
   対角の項の 1 つが 0 であるとすると、その項は saddle point になるので、ゲームの値は 0 になる。

   (b) 対角の項の 1 つが正であり、その他が負であるとする。ゲームの値は何か？
   $d_i > 0$ であるとすると、i 行目はその他の全ての行を支配し、それらを取り除ける。すると、i 列目

はその他の全ての列によって支配されているので、取り除かれ、ゲームの値は 0 になる。

(c) 全ての対角の項が負であるとする。ゲームの値は何か？
　と　の名前が入れ替わるだけなので、ゲームの値は $V = p_i d_i (i = 1, .., m)$ になる。

3. プレイヤー　が数字 $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ を選び、プレイヤー　はプレイヤー　が選んだ数字が何かを推測しようとする。もし正しく推測し、その数字が j であれば、　に 2^j 勝つ。そうでなければ利得はない。このゲームの行列を作り、解け。

このゲームの行列は、次のようになる。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \end{array}$$

これは対角行列で、全ての対角の項が正なので、ゲームの値は $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 15/16$ より、$V = 16/15$ である。よって最適戦略は、$p = q = (8/15, 4/15, 2/16, 1/16)$ である。

4. プレイヤー　が数字 $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ を選び、プレイヤー　がそれを推測しようとする。もし正しく推測すれば、　に 1 勝つ。もし正しい数字よりも多い数字を推測したら、　に 1/2 勝つ。もし少ない数字を推測したら、利得はない。このゲームの行列を作り、解け。

このゲームの行列は、次のようになる。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

これは三角行列なので、2.3.4 のように解くと、

$$\begin{aligned} p_1+p_2/2+p_3/2+p_4/2 &= V \\ p_2+p_3/2+p_4/2 &= V \\ p_3+p_4/2 &= V \\ p_4 &= V \end{aligned}$$

$$p_1 = V/8 \quad p_2 = V/4 \quad p_3 = V/2 \quad p_4 = V$$

$\sum p_i = 1$ より、$V = 8/15$ で、$p = (1/15, 2/15, 4/15, 8/15)$ である。同様に q は、

$$\begin{aligned} q_1 \qquad\qquad\qquad &= V \\ q_1/2+\quad q_2 \qquad\quad &= V \\ q_1/2+q_2/2+\quad q_3 &= V \\ q_1/2+q_2/2+q_3/2+q_4 &= V \end{aligned}$$

$$q_1 = V \quad q_2 = V/2 \quad q_3 = V/4 \quad q_4 = V/8$$

$\sum q_i = 1$ より、$V = 8/15$ で、$q = (8/15, 4/15, 2/15, 1/15)$ である。p と q は非負なので、V はゲームの値で、p, q はそれぞれのプレイヤーにとっての最適戦略である。

5. プレイヤー　は数字 $j \in \{1, 2, ..., n\}$ を選び、　はそれを推測しようとする。もし正しく推測すれば、1 勝つ。もし推測が高すぎれば、1 負ける。もし推測が低すぎれば、利得はない。行列を作り、解け。

このゲームの行列は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

これは三角行列なので、2.3.4 のように解く。

$$
\begin{aligned}
p_1 - p_2 - \ldots - p_n &= V \\
p_2 - \ldots - p_n &= V \\
&\vdots \\
p_n &= V
\end{aligned}
$$

すると $p_1 = nV, ..., p_n = V$ なので、　の最適戦略 p は、$p = (p_1, ..., p_n)\left(p_i = \dfrac{2(n+1-i)}{n(n+1)}\right)$ である。同様に　の最適戦略 q は、

$$
\begin{aligned}
q_1 \qquad\qquad &= V \\
-q_1 + q_2 \qquad &= V \\
-q_1 - q_2 + q_3 &= V \\
\vdots \qquad\qquad & \\
-q_1 + q_2 - \ldots + q_n &= V
\end{aligned}
$$

すると $q_1 = V, q_2 = 2V, ..., q_n = nV$ なので、$V = \dfrac{2}{n(n+1)}$。p, q 共に非負なので、これはこのゲームの最適戦略である。

6. プレイヤー　は数字 $j \in \{1, 2, ..., n\}, n \geq 2$ を選び、プレイヤー　はある数字 $i \in \{1, 2, ..., n\}$ を選んでそれを推測しようとする。もし正しく推測すれば、すなわち $i = j$ ならば、1 勝つ。もし $i > j$ ならば、ある数字 $b < 1$ に対して b^{j-i} 勝つ。そうでなく、もし $i < j$ ならば、利得はない。行列を作り、解け。

   ヒント：$A_n = (a_{ij})$ がゲームの行列を表すとすると、逆行列 $A_n^{-1} = (a^{ij}), a^{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ -b & (i = j+1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

   そして、定理 3.2 を使え。

   このゲームの行列は、次のようになる。

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
b^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
b^{-2} & b^{-1} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
b^{-3} & b^{-2} & b^{-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
b^{-4} & b^{-3} & b^{-2} & b^{-1} & 1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b^{1-n} & b^{2-n} & b^{3-n} & b^{4-n} & b^{5-n} & \ldots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

ヒントにより、上の行列 A_n の逆行列は存在し、次のようになる。

$$A_n{}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

定理 3.2 より、$V = 1/\mathbf{1}^\top A_n{}^{-1}\mathbf{1} = 1/(nb+n-b)$、$\mathbf{p}^\top = V\mathbf{1}^\top A^{-1} = ((b+1)/(nb+n-b), (b+1)/(nb+n-b), ..., 1/(nb+n-b))^\top$、$\mathbf{q} = VA^{-1}\mathbf{1} = (1/(nb+n-b), (b+1)/(nb+n-b), ..., (b+1)/(nb+n-b))$ となり、p, q は共に非負なので、これらは最適戦略である。

7. Pascal 行列ゲーム
階数 n の Pascal の行列は、次のような元 b_{ij} の $n \times n$ の行列 B_n である。

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix} \quad (i \geq j) \qquad b_{ij} = 0 \quad (i < j)$$

B_n の i 行目は、$(x+y)^i$ の拡張に二項係数を含んでいる。Call と Velleman(1993) は、B_n の逆行列が $a_{ij} = (-1)^{i+j} b_{ij}$ である行列 A_n である事を示した。これを使って、値と行列 A_n のゲームの最適戦略を求めよ。

8. 次の行列のゲームを解け。

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5/4 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) 三角行列なので、2.3.4 と同様に解くと、値 $V = 3/7$ で、$p = (3/7, 3/7, 1/7), q = (5/7, 1/7, 1/7)$ で、p, q 共に非負なので、これはそれぞれ　と　の最適戦略である。

(b) 行列の全ての要素に -1 を加えると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

これは対角行列なので、このゲームの値を V' とすると、$V' = 1/10$ より、$p = q = (1/10, 2/10, 3/10, 4/10)$ である。従って、元のゲームの値 $V = 11/10$ である。

9. Another Mendelsohn game

2 人のプレイヤーが同時に 1 から $n(n \geq 5)$ までの数字を選び、もし数字が同じであれば利得はない。相手によって選ばれた数字よりも 1 大きい数字を選んだプレイヤーは、2 勝つ。相手によって選ばれた数字よりも 2 以上大きい数字を選んだプレイヤーは、1 負ける。

(a) ゲームの行列を作れ。

このゲームの行列は、次のようになる。

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & -2 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
2 & 0 & -2 & 1 & 1 & \cdots \\
-1 & 2 & 0 & -2 & 1 & \cdots \\
-1 & -1 & 2 & 0 & -2 & \cdots \\
-1 & -1 & -1 & 2 & 0 & \cdots \\
\vdots & & & & & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

(b) 最適戦略は、$i = 1, ..., 5$ に対して $p_i > 0$、かつその他の全ての i に対して $p_i = 0$ である事がわかっている。最適 $\mathbf{p}$ を解け (式の対称性によって $p_1 = p_5, p_2 = p_4$ という議論ができるので難しくはない)。実際に求めた戦略が最適かどうかチェックせよ。

これは対称行列なので、ゲームの値は 0 である。無差別の原理から、

$$
\begin{aligned}
2p_2 - p_3 - p_4 - p_5 &= 0 \\
-2p_1 + 2p_3 - p_4 - p_5 &= 0 \\
p_1 - 2p_2 + 2p_4 - p_5 &= 0 \\
p_1 + p_2 - 2p_3 + 2p_5 &= 0 \\
p_1 + p_2 + p_3 - 2p_4 &= 0
\end{aligned}
$$

式の対称性より $p_1 = p_5, p_2 = p_4$。よって、$\mathbf{p} = (1/16, 5/16, 1/4, 5/16, 1/16)$。これは、同じ戦略を が使っても平均利得は 0 なので、$\mathbf{p}$ は確かに最適である。

10. Silverman Games(R.T.Evans(1979) と Huuer と Leopold-Wildburger(1991) を見よ)

2 人のプレイヤーが同時に正の整数を選ぶ。Medelsohn games では、大きい整数を選ぼうとするが、相手よりも大きすぎてはいけない。しかし、Silverman games では、‘ 大きすぎる ’ は、加法ではなく乗法によって定義されている。次の例を解け : 相手が選んだ数字より大きいが、その 3 倍よりは小さい数字を選んだプレイヤーは、1 勝つ。しかし、3 倍以上の数字を選べば 2 負ける。数字が同じなら、利得はない。

(a) これが対称ゲームである事に注意し、支配によって 3×3 の行列に変形できる事を示せ。

このゲームの行列は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots \\
1 & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\
-2 & 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots \\
-2 & 1 & 1 & 0 & -1 & \cdots \\
-2 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
\vdots & & & & & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}$$

(b) 解け。

3 行目は、4,5,6,... 行目を支配しており、3 列目は、4,5,6,... 列目を支配しているので、3×3 の行列に変形でき、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これは対称ゲームなので、ゲームの値は 0 である。次の式を解くと、

$$\begin{aligned} p_2 - 2p_3 &= 0 \\ -p_1 \quad + p_3 &= 0 \\ 2p_1 - p_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

$p = q = (1/4, 1/2, 1/4, 0, 0, ...)$ となる。

11. 解け。

$$(a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) 対称ゲームなので、ゲームの値は 0 である。方程式を解くと、$p = q = (1/2, 1/3, 1/6)$ となる。

(b) 無差別の原理より、

$$\begin{aligned} -2p_2 + p_3 &= V \\ p_1 \quad - 2p_3 &= V \\ -2p_1 + p_2 \quad &= V \end{aligned}$$

$V = -1/3$ であり、$p = (1/3, 1/3, 1/3)$ である。q も同様に計算すると、$q = (1/3, 1/3, 1/3)$ となり、p, q 共に非負なので、最適である。

12. http://www.math.ucla.edu/~tom/gamesolve.html の Matrix Game Solver で、元の Blotto の行列 (39) を解いてみると、異なった最適戦略が与えられる事に気づく。これは何を意味するか？ $(3,1)^*$ が (2.40) で強支配されている事を示せ。これは $(3,1)^*$ に重みが与えられる最適戦略が存在しない事を意味する。求められた解答は正しいか？

   Matrix Game Solver で行列 (2.39) を解いてみると、
   The value is 1.55556.
   An optimal strategy for Player I is:
   (0.44444,0,0.11111,0,0.44444)
   An optimal strategy for Player II is:
   (0.03333,0.53333,0.35556,0.07778)
   となり、プレイヤー　の最適戦略が異なっている事がわかる。

13. (a)2 つの区域を占領するために、Blotto が 2 つの隊、Kije が 1 つの隊を持っているとする。解け。Blotto の純粋戦略は $X = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$ であり、Kije の純粋戦略は $Y = \{(1,0), (0,1)\}$ とおける。従って、ゲームの行列は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ (2,0) \\ (1,1) \\ (0,2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (1,0) & (0,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

   2 行目は、1,3 行目をそれぞれ 1/2 の確率で使う戦略に支配されているので取り除け、2×2 の行列になる。従って、$V = 1, p = (1/2, 0, 1/2), q = (1/2, 1/2)$ である。

   (b)2 つの区域を占領するために、Blotto が 3 つの隊、Kije が 2 つの隊を持っているとする。解け。Blotto の純粋戦略は $X = \{(3,0), (2,1), (1,2), (0,3)\}$ で、Kije の純粋戦略は $Y = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$ とおける。従って、ゲームの行列は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ (3,0) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (0,3) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (2,0) & (1,1) & (0,2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

   これは次のようである群 $\mathcal{G} = \{e, g\}$ を導く。

$$g((2,0)) = (0,2) \quad g((0,2)) = (2,0) \quad g((1,1)) = (1,1)$$

また、次のようである対応する群 $\overline{G} = \{\overline{e}, \overline{g}\}$ も導く。

$$\overline{g}((3,0)) = (0,3) \quad \overline{g}((0,3)) = (3,0) \quad \overline{g}((2,1)) = (1,2) \quad \overline{g}((1,2)) = (2,1)$$

Kije の軌道は、$\{(2,0),(0,2)\},\{(1,1)\}$ である。同様に Blotto の軌道は、$\{(3,0),(0,3)\},\{(2,1),(1,2)\}$ である。次のように定義する。

$(2,0)^*$: (2,0) と (0,2) をそれぞれ 1/2 の確率で使う。

(1,1) : (1,1) を使う。

$(3,0)^*$: (3,0) と (0,3) をそれぞれ 1/2 の確率で使う。

$(2,1)^*$: (2,1) と (1,2) をそれぞれ 1/2 の確率で使う。

従って、利得行列は次のようになる。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} (2,0)^* & (1,1) \end{array} \\ \begin{array}{c} (3,0)^* \\ (2,1)^* \end{array} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

よって、$V = 4/5$ であり、(2/5,3/5) が Kije の最適戦略、(4/5,1/5) が Blotto の最適戦略である。従って、$p = (2/5, 1/10, 1/10, 2/5), q = (1/5, 3/5, 1/5)$ である。

14. (a) 占領するための 3 つの区域があるとする。Blotto が 4 つの隊、Kije が 3 つの隊を持っているとする。解け (不変性によって 4×3 の行列まで変形する事ができ、さらに支配によって 2×2 に変形できる)。

不変性により、Blotto の軌道は $\{(4,0,0),(0,4,0),(0,0,4)\}$, $\{(3,1,0),(3,0,1),(1,3,0),(1,0,3),(0,3,1),(0,1,3)\}$, $\{(2,2,0),(2,0,2),(0,2,2)\}$, $\{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ であり、Kije の軌道は $\{(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3)\}$, $\{(2,1,0),(2,0,1),(1,2,0),(1,0,2),(0,2,1),(0,1,2)\}$, $\{(1,1,1)\}$ である。次のように定義する。

$(4,0,0)^*$: (4,0,0), (0,4,0), (0,0,4) をそれぞれ 1/3 の確率で使う。

$(3,1,0)^*$: (3,1,0), (3,0,1), (1,3,0), (1,0,3), (0,3,1), (0,1,3) をそれぞれ 1/6 の確率で使う。

$(2,2,0)^*$: (2,2,0), (2,0,2), (0,2,2) をそれぞれ 1/3 の確率で使う。

$(2,1,1)^*$: (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2) をそれぞれ 1/3 の確率で使う。

$(3,0,0)^*$: (3,0,0), (0,3,0), (0,0,3) をそれぞれ 1/3 の確率で使う。

$(2,1,0)^*$: (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,0,2), (0,2,1), (0,1,2) をそれぞれ 1/6 の確率で使う。

$(1,1,1)$: (1,1,1) を使う。

従って、利得行列は次のようになる。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} (3,0,0)^* & (2,1,0)^* & (1,1,1) \end{array} \\ \begin{array}{c} (4,0,0)^* \\ (3,1,0)^* \\ (2,2,0)^* \\ (2,1,1)^* \end{array} & \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ -1 & 4/3 & 3 \\ -1/3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

4 行目は、2,3 行目をそれぞれ確率 1/2 で使う戦略によって支配されており、2 列目は、1,3 列目をそれぞれ確率 1/2 で使う戦略によって支配されている。さらに、2 行目は、1,3 行目をそれぞれ確

率 2/3,1/3 で使う戦略によって支配されている。これらを取り除くと、次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ (4,0,0)^* \\ (2,2,0)^* \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (3,0,0)^* & (1,1,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

従って、ゲームの値は $V = 3/4$ で、Blotto の最適戦略は (3/4,1/4)、Kije の最適戦略は (9/16,7/16) である。

(b) 占領するための 4 つの区域があるとする。Blotto が 4 つの隊、Kije が 3 つの隊を持っているとする。解け (5×3 の行列まで変形した行列は、支配によって 4×3 に変形できる。しかし、Matrix Game Solver を使ってもよい)。

不変性により、Blotto と Kije の戦略を次のように定義する。

$(4,0,0,0)^*$: (4,0,0,0), (0,4,0,0), (0,0,4,0), (0,0,0,4) をそれぞれ 1/4 の確率で使う。

$(3,1,0,0)^*$: (3,1,0,0), (3,0,1,0), (3,0,0,1), (1,3,0,0), (0,3,1,0), (0,3,0,1), (1,0,3,0), (0,1,3,0), (0,0,3,1), (1,0,0,3), (0,1,0,3), (0,0,1,3) をそれぞれ 1/12 の確率で使う。

$(2,1,1,0)^*$: (2,1,1,0), (2,1,0,1), (2,0,1,1), (1,2,1,0), (1,2,0,1), (0,2,1,1), (1,1,2,0), (1,0,2,1), (0,1,2,1), (1,1,0,2), (1,0,1,2), (0,1,1,2) をそれぞれ 1/12 の確率で使う。

$(2,2,0,0)^*$: (2,2,0,0), (2,0,2,0), (2,0,0,2), (0,2,2,0), (0,2,0,2), (0,0,2,2) をそれぞれ 1/6 の確率で使う。

$(1,1,1,1)$: (1,1,1,1) を使う。

$(3,0,0,0)^*$: (3,0,0,0), (0,3,0,0), (0,0,3,0), (0,0,0,3) をそれぞれ 1/4 の確率で使う。

$(2,1,0,0)^*$: (2,1,0,0), (2,0,1,0), (2,0,0,1), (1,2,0,0), (0,2,1,0), (0,2,0,1), (1,0,2,0), (0,1,2,0), (0,0,2,1), (1,0,0,2), (0,1,0,2), (0,0,1,2) をそれぞれ 1/12 の確率で使う。

$(1,1,1,0)^*$: (1,1,1,0), (1,1,0,1), (1,0,1,1), (0,1,1,1) をそれぞれ 1/4 の確率で使う。

従って、利得行列は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ (4,0,0,0)^* \\ (3,1,0,0)^* \\ (2,1,1,0)^* \\ (2,2,0,0)^* \\ (1,1,1,1)^* \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (3,0,0,0)^* & (2,1,0,0)^* & (1,1,1,0)^* \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -1/2 \\ 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/12 & 3/2 \\ -1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3 行目は、4,5 行目をそれぞれ確率 1/2 で使う戦略によって支配されているので、取り除く。ここで、Matrix Game Solver を使うと、次のようになる。

The value is 0.6.

An optimal strategy for Player I is:

(0,0.8,0,0.2)

An optimal strategy for Player II is:

(0.53333,0.4,0.06667)

15. Battleship(戦艦)

戦艦ゲーム (salvo ともいう) は、2 つの四角形のボード (たいてい 10×10) によってプレーされる。各プレイヤーは、船団を自分のボードに隠し、相手の船を相手に自分の船が沈められる前に沈めようとする (ルールの 1 つとして、http://www.kielack.de/games/destroya.htm を見よ。そこでゲームができる)。

単純に、3×3 のボードを考え、プレイヤー　が駆逐艦 (長さが 2 マス) を水平方向か垂直方向に、このボード上に隠す。プレイヤー　は、一度に一つのマスを呼ぶ事によって攻撃する。攻撃の後、プレイヤー　はその攻撃が当たったか (hit)、外れたか (miss) を宣言する。プレイヤー　は、駆逐艦の両方のマスに攻撃が当たるまで続ける。プレイヤー　への利得は、プレイヤー　が攻撃した回数である。次のようにマスに 1 から 9 までの番号付けをしてみよう。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

問題はボードの順番と影響の下で不変である。実際、駆逐艦を置ける場所は 12 あり、プレイヤー　が利用できる完全不変な選択は 2 つしかない。その戦略は、[1,2],[2,3],[3,6],[6,9],[8,9],[7,8],[4,7],[1,4] の 1 つを無作為にそれぞれ 1/8 の確率で選ぶ戦略 $[1, 2]^*$ と、[2,5],[5,6],[5,8],[4,5] の 1 つを無作為にそれぞれ 1/4 の確率で選ぶ戦略 $[2, 5]^*$ である。これは不変性によって、ゲームを $2 \times m$(m は、プレイヤー　の不変戦略の数) まで変形できる事を意味する。さらに支配によって幾分変形する事ができる。ゲームを解け。

16. Dresher's Guessing Game

プレイヤー　は、秘密で数字 $1, 2, ..., n$ の 1 つを書く。プレイヤー　は、プレイヤー　の数字が何かを正しく推測ができるまで推測を繰り返さなくてはならず、1 回の推測につき 1 負ける。1 回推測するたびに、プレイヤー　はその推測が正しいか、高すぎるか、低すぎるかを言わなくてはならない。$n = 3$ の時のゲームを解け。(このゲームは、Dresher(1961) によって調べられ、Johnson(1964) によって $n \leq 11$ が解かれた。関係した問題は Gal(1974) によって扱われた。)

プレイヤー　の純粋戦略を $Y = \{(1), (2), (3)\}$(最初に (i) の数字を推測し、プレイヤー　の宣言によって次の数字を推測する) とすると、ゲームの行列は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5/2 \\ 5/2 & 1 & 5/2 \\ 5/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

不変性により、次のように定義する。

1^* : 1,3 をそれぞれ 1/2 の確率で使う。

$(1)^*$: (1),(3) をそれぞれ 1/2 の確率で使う。

従って、利得行列は次のようになる。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} (1)^* & 2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1^* \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 7/4 & 2 \\ 5/2 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

これを解くと、ゲームの値 $V = 13/7$ で、プレイヤー　の最適戦略は $(6/7, 1/7)$、プレイヤー　の最適戦略は $(4/7, 3/7)$ である。

17. Thievery

プレイヤー　は、プレイヤー　から $m \geq 2$ 個のアイテムの 1 つを盗もうとする。プレイヤー　は、1 度に 1 つのアイテムしか守る事ができない。アイテム i の価値は、$u_i > 0(i = 1, ..., m)$ である。このゲームの $m \times m$ の行列は次のようになる。

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & u_1 & u_1 & \dots & u_1 \\
u_2 & 0 & u_2 & \dots & u_2 \\
u_3 & u_3 & 0 & \dots & u_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
u_m & u_m & u_m & \dots & 0
\end{pmatrix}
$$

このゲームを解け。

ヒント : プレイヤー　は、最も価値が高い $k(k \leq m)$ 個のアイテムの 1 つを盗む事に全ての確率を与えるであろう。アイテムを価値が高い方から $u_1 \geq u_2 \geq ... \geq u_m > 0$ と並べ、ある k に対する A の左上の $k \times k$ の部分行列に無差別の原理を使う。

18. プレイヤー　は、数字 $j \in \{1, 2, ..., n\}(n \geq 2)$ を選び、プレイヤー　は、それが何かを数字 $i \in \{1, 2, ..., n\}$ を選ぶ事によって推測する。正しく推測できれば、すなわち $i = j$ ならば、1 勝つ。1 違いで正しく推測できなければ、すなわち $|i - j| = 1$ ならば、1/2 負ける。そうでなければ、利得はない (もし $|i - j| = 1$ によって利得 $-1/2$ がある数字 $\alpha > 0$ に置き換えられていれば、これは Helicopter versus Submarine Game と呼ばれる。これは Garnaev(1992) によって解かれ、$0 \leq \alpha \leq 1/2$ である)。

ヒント : A_n を $n \times n$ の利得行列とし、$A_n^{-1} = (2/(n+1))B_n(B_n = (b_{ij})$ は、$b_{ij} = b_{ji}$ であり、$i \leq j$ に対して $b_{ij} = i(n + 1 - j)$ である行列) を示せ。

このゲームの利得行列 A_n は、次のようになる。

$$
A_n = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{pmatrix}
1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

ヒントで与えられている A_n^{-1} は、次のようになる。

$$\frac{2}{(n+1)}\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & \dots & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

19. The Number Hides Game

次のゲームは、Ruckle(1983) によって紹介され、Baston, Bostock, Ferguson(1989) によって解かれた、the Number Hides Game の特別な場合である。プレイヤー　は整数 $j(1 \le j \le n)$ を選ぶ。プレイヤー　は整数 $i(1 \le i \le n)$ を選ぶことによって、j を推測しようとする。プレイヤー　は正しく推測すれば $(i = j)$、2 勝つ。1 違いなら $(|i - j| = 1)$、1 勝つ。そうでなければ何もない。次を示せ。

(a) 奇数 n に対して、値が $V_n = 4/(n+1)$ である。$(1, 0, 1, 0, ..., 0, 1)$ に比例する (両方のプレイヤーにとって同じ) 最適均等化戦略がある。

(b) 偶数 n に対して、値が $4(n+1)/(n(n+2))$ である。$(k, 1, k-1, 2, k-3, 3, ..., 2, k-1, 1, k)(k = n/2)$ に比例する (両方のプレイヤーにとって同じ) 最適均等化戦略がある。

2.4　有限ゲームを解く

$m \times n$ の行列 $\mathbf{A}$ の任意の有限 2 人ゼロ和ゲーム (X, Y, A) を考える。最初の m 個の整数の戦略集合を $X = \{1, 2, ..., m\}$、同様に $Y = \{1, 2, ..., n\}$ とする。プレイヤー　の混合戦略は、足すと 1 になる確率の列ベクトル $(p_1, p_2, ..., p_m)^\top$ で表される。同様にプレイヤー　の混合戦略は、$\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)^\top$ である。プレイヤー　と　の混合戦略の集合を X^* と Y^* によってそれぞれ表す。

$$X^* = \{\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m)^\top : p_i > 0,\ \text{for } i = 1, ..., m \text{ and } \sum_1^m p_i = 1\}$$

$$Y^* = \{\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)^\top : q_i > 0,\ \text{for } i = 1, ..., n \text{ and } \sum_1^n q_j = 1\}$$

m 次元の k 番目の要素が 1 でその他は全て 0 である単位ベクトル $e_k \in X$ は、k 行目を選ぶ純粋戦略として判別される。従って、プレイヤー　の純粋戦略の集合 X は、X^* の部分集合であると考える事ができる。同様に Y は、Y^* の部分集合であると考える事ができる。このゲームを有限ゲームとは言えないにもかかわらず、$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^\top\mathbf{A}\mathbf{q}$ である混合戦略を使ってもよい新しいゲーム (X^*, Y^*, A) として、ゲーム (X, Y, A) を考えてよいといえる。

このセクションでは、有限ゲームを解くためのアルゴリズムを与える。すなわち、値と各プレイヤーに対して少なくとも 1 つの最適戦略の求め方を示すということである。時折、プレイヤーに対しての全ての最適戦略を求める事にも関心を持つことにする。

2.4.1　最適反応

プレイヤー　は $\mathbf{q} \in Y^*$ を使って無作為に列を選ぶとする。もしプレイヤー　が i 行目を選べば、　の利得は次のベクトル $\mathbf{A}\mathbf{q}$ の i 番目の要素となる。

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = (\mathbf{A}\mathbf{q})_i \tag{2.1}$$

同様に、プレイヤー　が $\mathbf{p} \in X^*$ を使い、プレイヤー　が j 列目を選べば、　の利得は次のベクトル $\mathbf{p}^\top\mathbf{A}$ の j 番目の要素となる。

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} = (\mathbf{p}^\top\mathbf{A})_j \tag{2.2}$$

さらに一般的に、プレイヤー　が $\mathbf{p} \in X^*$ を使い、プレイヤー　が $\mathbf{q} \in Y^*$ を使えば、　の平均利得は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) p_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = \mathbf{p}^\top\mathbf{A}\mathbf{q} \tag{2.3}$$

プレイヤー　が特定の戦略 $\mathbf{q} \in Y^*$ を使おうとしている事は知られているとする。プレイヤー　は、(2.1) を最大化する i 行目を選ぶか、(2.3) を最大化する $\mathbf{p} \in X^*$ を選ぶであろう。平均利得は次のようになる。

$$\max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \max_{\mathbf{p} \in X^*} \mathbf{p}^\top \mathbf{A} \mathbf{q} \tag{2.4}$$

これらの量が等しい事がわかるために、左辺は $\mathbf{p} \in X^*$ の $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \mathbf{q}$ の最大値であり、それから $X \subset X^*$ より、右辺以下か、等しくならなくてはならない。(2.3) は (2.1) での平均量であり、(2.1) での値の最大値以下か、等しくなくてはならないので、逆の不等式は従う。

(2.3) の最大値を達成する全ての $\mathbf{p} \in X^*$ を $\mathbf{q}$ に対する最適反応、もしくはベイズ戦略という。特に、(2.1) の最大値を達成する全ての i 行目を $\mathbf{q}$ に対する (純粋) ベイズ戦略という。有限ゲームの全ての $\mathbf{q} \in Y^*$ に対して、$\mathbf{q}$ に対する純粋ベイズ戦略は常に存在する。

同様に、プレイヤー　が特定の戦略 $\mathbf{p} \in X^*$ を使おうとしている事は知られているとする。プレイヤー　は、(2.2) を最小化する j 列目を選ぶか、(2.3) を最小化する $\mathbf{q} \in Y^*$ を選ぶであろう。平均的な利得は次のようになる。

$$\min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = \min_{\mathbf{q} \in Y^*} \mathbf{p}^\top \mathbf{A} \mathbf{q} \tag{2.5}$$

(2.5) の最小値を達成する全ての $\mathbf{q} \in Y^*$ を $\mathbf{p}$ に対する最適反応、もしくはベイズ戦略という。

最適反応の考え方は、ゲームをプレーする効果的な方法を与える。相手が様々な純粋戦略でプレーすることを考えた確率を推測し、それに対する最適反応を選ぶ。この方法は、かなり複雑な状況でも有効である。加えて、相手の弱点を理解する事ができるというアドバンテージもある。もちろん、これは危険な方法であるかもしれない。相手は自分よりもこの推測のタイプを良くして来るかもしれない (Exercise 1 を見よ)。

2.4.2　ゲームの上限値と下限値

　は　が選択をする前に混合戦略 $\mathbf{q} \in Y^*$ を使う事を宣言する事が求められるとする。これはゲームをより　に好ましい状態にするように思える。もし　が $\mathbf{q}$ を宣言すれば、確かに　は q に対するベイズ戦略を使い、　は平均における (2.4) の量で負けてしまうだろう。従って、　は (2.4) を最小化する $\mathbf{q}$ を宣言する選択をする。$\mathbf{q} \in Y^*$ 全体における (2.4) の最小値を $\overline{V}$ と表し、ゲーム (X, Y, A) の上限値 (upper value) という。

$$\overline{V} = \min_{\mathbf{q} \in Y^*} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \min_{\mathbf{q} \in Y^*} \max_{\mathbf{p} \in X^*} \mathbf{p}^\top \mathbf{A} \mathbf{q} \tag{2.6}$$

(2.6) における最小値を達成する全ての $\mathbf{q} \in Y^*$ を　のミニマックス戦略という。最大の負けを最小にするものである。有限ゲームでは常にミニマックス戦略が存在する。$\mathbf{q}$ の m の数の一次関数の最大値である (2.4) の量は、$\mathbf{q}$ の連続関数であり、Y^* は有界閉集合なので、この関数は Y^* のある点で、Y^* における最小値をとる。

つまり、$\overline{V}$ は、　が何をしようともプレイヤー　に保証される最小の平均な負けということである。

同様の解析は、　が選択をする前に　が混合戦略 $\mathbf{p} \in X^*$ を選択する事を宣言しなければならないと仮定しても成り立つ。もし　が $\mathbf{p}$ を宣言すれば、　は平均利得を最も小さくする列を選ぶか、平均利得 (2.5) を最小化する $\mathbf{q} \in Y^*$ と同値であるものを選ぶであろう。もし　が $\mathbf{p}$ を宣言し、(2.5) が　の平均利得であるという事が与えられていれば、(2.5) を最大化する $\mathbf{p}$ を選び、次の平均を得るであろう。

$$\underline{V} = \max_{\mathbf{p} \in X^*} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = \max_{\mathbf{p} \in X^*} \min_{\mathbf{q} \in Y^*} \mathbf{p}^\top \mathbf{A} \mathbf{q} \tag{2.7}$$

量 $\underline{V}$ は、ゲームの下限値 (lower value) という。これは、　が何をしようとも　に保証される最大の量ということである。(2.7) における最大値を達成する全ての $\mathbf{p} \in X^*$ を　のミニマックス戦略という。おそらく (2.7) を考えると、マックスミニ戦略がよりふさわしい用語であろうが、対称性から (どちらかのプレイヤーが解析の目的のために、自分をプレイヤー　とみなすかもしれない) 同じ考えを表すために同じ言葉であるほうが好ましく、習慣的な専門用語になるのは確かである。プレイヤー　に対する解析では、プレイヤー　は常にミニマックス戦略を持つ。行列ゲームにおけるミニマックス戦略の存在は、次の補題で述べられている。

■Lemma 1　有限ゲームでは、両方のプレイヤーがミニマックス戦略を持つ。

下限値が上限値以下である事を証明する事は簡単である。もし $\overline{V} < \underline{V}$ であり、　は少なくとも $\underline{V}$ だけ勝つ事を保証できれば、プレイヤー　は $\overline{V}$ 以上負けないことを保証できず、明らかに矛盾となる。この事実は、補題としても述べられている。

■Lemma 2　下限値は最大値以下である。

$$\underline{V} \le \overline{V}$$

この補題はまた任意の実数値関数 $f(x,y)$ と任意の集合 X^*, Y^* による一般的な数学的原理により、次のようになる。

$$\max_{x \in X^*} \min_{y \in Y^*} f(x,y) \le \min_{y \in Y^*} \max_{x \in X} f(x,y)$$

この一般的な原理を理解するために、x, y を固定し、$\min_{y'} f(x,y') \le f(x,y) \le \max_{x'} f(x',y)$ としてみる。左の $\max_x$ は不等式には変わらず、右の $\min_y$ もまた変わらないので、結果を得る。

もし $\underline{V} < \overline{V}$ なら、平均利得は $\underline{V}$ と $\overline{V}$ の間になるべきである。プレイヤー　は $\overline{V}$ より大きくさせない事ができるし、プレイヤー　は $\underline{V}$ より小さくさせない事ができる。$\underline{V} = \overline{V}$ の時、非常によく安定した状態が存在する。

■Definition　もし $\underline{V} = \overline{V}$ なら、ゲームの値が存在し、$\underline{V}$ と $\overline{V}$ の共通の値に等しく、単純に V と表せる。もしゲームの値が存在すれば、最適戦略をミニマックス戦略という。

1 章で述べられたミニマックス定理は、有限ゲームにおいて $\underline{V} = \overline{V}$ を言う事によって単純に表せる。

■ミニマックス定理　全ての有限ゲームには値があり、両方のプレイヤーはミニマックス戦略を持つ。

この定理の系に注目する。もしゲームのルールが変わり、その結果プレイヤー　がプレイヤー　が選択をする前に混合戦略の選択を宣言しなければならなくなれば、プレイヤー　に明白なアドバンテージを与えられたように思えるが、これは錯覚である。プレイヤー　は単純にミニマックス戦略を宣言する事ができる。

2.4.3　位置と規模の変更の下の不変性

もう 1 つの単純な注意点はこの点において便利である。これはゲームの行列の各値に一定の値を加える操作、ゲームの行列の各値に正の一定の値を乗じる操作の下でのミニマックス戦略の不変性に関係する。行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ を持つゲームと行列 $\mathbf{A'} = (a'_{ij})(a'_{ij} = a_{ij} + b, {}^{\forall} b \in \mathbb{R})$ を持つゲームは、とても密接に関係している。実際、行列 **A'** のゲームは、　が　に b の量を払うゲームと同値であり、　と　は行列 **A** のゲームをプレーする。明らかに行列 **A'** のゲームで使われる全ての戦略は、行列 **A** のゲームでの同じ戦略を使った時の利得に b を足したものをプレイヤー　に与える。従って、1 つのゲームでのどちらかのプレイヤーの全てのミニマックス戦略は、もう一方のミニマックスでもあり、行列 **A'** のゲームの上限 (下限) 値は、行列 **A** のゲームの上限 (下限) 値に b を足したものになる。

同様に、行列 $\mathbf{A''} = (a''_{ij})(a''_{ij} = ca_{ij}, c > 0)$ は、規模の変更をした (通貨単位の変更でもよい) 行列 **A** のゲームとして考える事ができる。同様に、ミニマックス戦略は変わらず、**A''** の上限 (下限) 値は **A** の上限 (下限) 値に c をかけたものとなる。これらの注意点を次のように結合させる (Exercise 2 を見よ)。

■Lemma 3　もし $\mathbf{A} = (a_{ij})$ と $\mathbf{A'} = (a'_{ij})$ が $a'_{ij} = ca_{ij} + b, c > 0$ である行列であれば、行列 **A** のゲームは　と　に対して行列 **A'** のゲームと同じミニマックス戦略を持つ。また、もし行列 **A** のゲームの値が V と表されるなら、行列 **A'** のゲームの値 V' は、$V' = cV + b$ を満たす。

2.4.4　線形計画法問題への変形

ミニマックス定理の幾つかのよい証明がある。最も単純な証明は、G.Owen によるものである。しかし、証明は行列の大きさにおける帰納法を使った矛盾によるものである。解答の特性、または値と最適戦略の求め方における見識を与えない。分離超平面定理と Brouwer の不動点定理を基にした他の証明は、幾つかの見識を与えるが、明らかでない定理が基になっており、全ての学生が知っているわけでない。

ここでは、線形計画法を基にした証明を使う。全ての学生が具体的に知っている素材ではないが、有限ゲームを解く単純なアルゴリズムを導くという好都合な面がある。線形計画法の背景については、Chvátal(1983) の本が推薦される。ここで表されている素材と一致するさらなる線形計画法の近道は、

http://www.math.ucla.edu/~tom/LP.pdf. で見つけられる。

線形計画法は、目的関数と呼ばれる変数が複数ある一次関数を最大化、または最小化させる実変数を選ぶ問題として定義され、変数における線形制約を条件としている。制約は等式、または不等式である。この問題の標準的な形は、次の関数を最大化させる $y_1, ..., y_n$ を選ぶことである。

$$b_1 y_1 + ... + b_n y_n \tag{2.8}$$

次の制限を条件とする。

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n &\le c_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}y_1 + ... + a_{mn}y_n &\le c_m \\ y_j \ge 0 \qquad \text{for} \quad j &= 1, ..., n \end{aligned} \tag{2.9}$$

プレイヤー　の視点からこのゲームの問題を考える。制限 $p \in X^*$ を条件とし、(2.5) を最大化する $p_1, ..., p_m$ を選びたい。これは数学的な問題になる。
次の式を最大化する $p_1, ..., p_m$ を選べ。

$$\min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \tag{2.10}$$

次の制限を条件とする。

$$\begin{aligned} p_1 + ... + p_m &= 1 \\ p_i \ge 0 \qquad \text{for} \quad i &= 1, ..., m \end{aligned} \tag{2.11}$$

制限は一次だが、目的関数は min の演算子により p の一次関数ではないので、これは線形問題ではない。しかしながら、トリックを通して線形問題に変える事ができる。プレイヤー　の変数のリストに新しい変数 v を加え、目的関数以下になるように制限し ($v \le \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$)、この新しい制限を条件として、できるだけ v を大きくしようとする。問題は次のようになる。
次の式を最大化する v と $p_1, ..., p_m$ を選べ。

$$v \tag{2.12}$$

次の制限を条件とする。

$$\begin{aligned} v &\le \sum_{i=1}^{m} p_i a_{i1} \\ &\vdots \\ v &\le \sum_{i=1}^{m} p_i a_{in} \\ p_1 + ... + p_m &= 1 \\ p_i \ge 0 \qquad \text{for} \quad i &= 1, ..., m \end{aligned} \tag{2.13}$$

これは確かに線形問題である。このような問題を解くために、シンプレックス法として知られている単純なアルゴリズムが存在する。

同様の方法で、プレイヤー　の視点から問題を見て、同様の線形問題に辿り着く事ができる。　の問題は次のようになる。
次を最小化する w と $q_1, ..., q_n$ を選べ。

$$w \tag{2.14}$$

次の制限を条件とする。

$$\begin{aligned} w &\geq \sum_{j=1}^{n} a_{1j} q_j \\ &\vdots \\ w &\geq \sum_{j=1}^{n} a_{mj} q_j \\ q_1 + ... + q_n &= 1 \\ q_j \geq 0 \qquad \text{for} \quad j &= 1, ..., n \end{aligned} \tag{2.15}$$

線形計画法では、(2.12)-(2.14) と (2.14)-(2.16) のこれら 2 つの問題が双対問題であるという双対の理論がある。そして双対問題は同じ値を持つという双対定理と呼ばれる注目すべき定理がある。プレイヤー　が (2.14) で達成できる最大値は、プレイヤー　が (2.12) で達成できる最小値と等しい。しかし、これはまさにミニマックス定理の主張である。言い換えれば、双対定理はミニマックス定理を暗に意味する。

線形問題 (2.12)-(2.14) をゲームの値が正である事を知る時の計算が幾分簡単な他の線形問題に変える方法がある。$v > 0$ で $x_i = p_i/v$ とする。制限 $p_1 + ... + p_m = 1$ は $x_1 + ... + x_m = 1/v$ になり、線形でないように見える。しかし v を最大化することは、$1/v$ を最小化することと同値であるので、代わりに $x_1 + ... + x_m$ を最小化することによって、問題から v を取り除く事ができる。問題 (2.12)-(2.14) は、次のようになる。
次の式を最小化する $x_1, ..., x_m$ を選べ。

$$x_1 + ... + x_m \tag{2.16}$$

次の制限を条件とする。

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{i=1}^{m} x_i a_{i1} \\ &\vdots \\ 1 &\leq \sum_{i=1}^{m} x_i a_{in} \\ x_i \geq 0 \qquad \text{for} \quad i &= 1, ..., m \end{aligned} \tag{2.17}$$

この問題を解く時に、元のゲームの解答は簡単に見つけられる。値は $v = 1/(x_1 + ... + x_m)$ で、プレイヤー　の最適戦略は、$P_i = vx_i (i = 1, ..., m)$ になるであろう。

2.4.5　Description of the Pivot Method for Solving Games

次の有限ゲームを解くためのアルゴリズムは、本来は Williams(1966) によって (2.16)-(2.18) を解くためのシンプレックス法として説明されている。

ステップ１. 値が正である事を保証するために、必要ならばゲームの行列の全ての元に定数を加える (もしそうするなら、元の行列ゲームの値を得るために新しい行列ゲームからこの定数を最後に引くことを忘れてはいけない)。

ステップ２. 下の端が -1 で、右の端が $+1$ で、右下の角が 0 であるゲームの行列に拡大する事によって、tableau を作れ。　の戦略を左から x_1 から x_m と名付け、　の戦略を上から y_1 から y_n と名付けよ。

	y_1	y_2	$\ldots$	y_n	
x_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	1
x_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	1
	-1	-1	$\ldots$	-1	0

ステップ３. 次の特性を条件として、tableau の内部の幾つかの値を選んで pivot(p 行目 q 列目) とせよ。

a. pivot の列 $a(m+1, q)$ の境界の数字は、負でなければならない。
b. pivot　$a(p, q)$ は、自身が正でなければならない。
c. pivot のある p 行目は、pivot に対する pivot の行の境界の数字の比率 $a(p, n+1)/a(p, q)$ が、その列に対する全ての正の pivot の中で最小になるように選ばなければならない。

ステップ４.　次のように pivot せよ。

a. pivot の行でも列でもない各値 $a(i, j)$ を $a(i, j) - a(p, j)\cdot a(i, q)/a(p, q)$ に置き換えよ。
b. pivot を除いた pivot の行の各値を、pivot の値で割った値に置き換えよ。
c. pivot を除いた pivot の列の各値を、pivot の値で割った値の負に置き換えよ。
d. pivot を、自身の逆数に置き換えよ。

これは次のように表される。

$$\boxed{\begin{matrix} p & r \\ c & q \end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} 1/p & r/p \\ -c/p & q-(rc/p) \end{matrix}}$$

p は pivot を意味し、r は pivot と同じ行の数字を表し、c は pivot と同じ列の数字を表し、q は pivot と同じ行でも列でもない任意の値を表す。

ステップ５．pivot の行の左の標号と、pivot の列の 1 番上の表号を交換せよ。

ステップ６．もし下端の行に負の数字が残っているのなら、ステップ３に戻れ。

ステップ７．そうでなければ、解答は次のように導き出される。

a. 値 v は、右下の角の数字の逆数である (もしステップ１で行列の各値から数字を引いているのなら、ここで v に加えなければならない)。
b. 最適戦略は次のように構成される。最後には左側で終わるプレイヤー　の変数は確率 0 を受け取り、上で終わるものは右下の角によって割られた同じ列の 1 番下端の値を受け取る。
c. 　の最適戦略は次のように構成される。最後に上で終わるプレイヤー　の変数は確率 0 を受け取り、左で終わるものは右下の角によって割られた同じ行の右端の値を受け取る。

2.4.6　計算例

例を使ってこれらのステップを説明する。以前の方法を使って解く事ができない最も単純な例なので 3×3 の行列を用いる。次の行列の行列ゲームを考えよ。

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

saddle point をチェックし (これにはない)、支配もチェックする (これにはない)。値は正であるか？ 行列を十分に長く見つめる事で推測する事ができるかもしれないが、行列の各値に 2 を加えて、単純に最初の行を正にしてみてはどうだろうか。

$$B' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

最初 (2 番目) の行を使う事によってプレイヤー　に少なくとも 1 が保証されるので、このゲームの値は少なくとも 1 である。B の値を得るために B' の値から 2 を引くことを覚えていなくてはならない。これで、ステップ１のアルゴリズムは終了する。

ステップ２では、行列 B' の tabluau を次のように作る。

ステップ３では、pivot を選ばなくてはならない。3 列は全て下端に負の数字があるので、これらの列の幾つかを pivot の列として選ぶ事ができる。1 列目を選ぶとする。pivot の行はこの列に正の数がなくてはならないので、上 2 つの行のどちらかでなくてはならない。どちらの行かを決めるために、pivot に対す

	y_1	y_2	y_3	
x_1	4	1	8	1
x_2	2	3	1	1
x_3	0	4	3	1
	-1	-1	-1	0

る境界の数字の割合を計算する。最初の行が 1/4 で、次の行が 1/2 である。前者がより小さいので、pivot は 1 行目にあるということになる。左上の角の 4 について pivot する。

ステップ４は、pivot の仕方を説明している。pivot 自身を逆数 1/4 に置き換え、pivot の行の残りの数字は単純に pivot で割って、1/4,2,1/4 を得る。pivot の列の残りの数字は pivot で割って符号を変える。残りの 9 つの数字は、対応する r, c に対して $r \cdot c/p$ を引くことによって変更する。例えば、2 行目の 3 列目の 1 から、$8 \times 2/4 = 4$ を引き、3 を残す。pivot を完了すると、次のようになる。

	y_1	y_2	y_3	
x_1	4	1	8	1
x_2	2	3	1	1
x_3	0	4	3	1
	-1	-1	-1	0

$\longrightarrow$

	x_1	y_2	y_3	
y_1	1/4	1/4	2	1/4
x_2	-1/2	5/2	-3	1/2
x_3	0	4	3	1
	1/4	-3/4	1	1/4

ステップ５では、pivot の行と列の標号を交換する。ここでは、x_1 と y_1 を交換する。これは、上のようになされる。

ステップ６では、下端に負の値があるかをチェックする。1 つあるので、ステップ３に戻る。

今回は、下端に唯一負の数字があるので 2 列目で pivot する。この列の 3 つの数字は全て正である。pivot に対する境界の数字の割合を求めると、1,2,3 行目はそれぞれ、1,1/5,1/4 になる。最小は、2 列目なので、2 行目の 2 列目の 5/2 について pivot する。ステップ４，５を終えると、次を得る。

	x_1	y_2	y_3	
y_1	1/4	1/4	2	1/4
x_2	-1/2	5/2	-3	1/2
x_3	0	4	3	1
	-1/4	-3/4	1	1/4

$\longrightarrow$

	x_1	x_2	y_3	
y_1	.3	-.1	2.3	.2
y_2	-.2	.4	-1.2	.2
x_3	.8	-1.6	7.8	.2
	.1	.3	.1	.4

ステップ６において今回は、下端の全ての値が非負なので、ステップ７に進む。行列 B' のゲームに対する解答を導く。

値は.4 の逆数で、5/2 である。

最後の tableau で、x_3 は左にあるので、最適な p_3 は 0 である。最適な p_1 と p_2 は、.1/.4 と.3/.4 の割合

で、1/4 と 3/4 である。従って、　の最適混合戦略は、$(p_1, p_2, p_3) = (.25, .75, 0)$ である。

最後の tableau で、y_3 は上にあるので、最適な q_3 は 0 である。最適な q_1 と q_2 は、.2/.4 と.2/.4 の割合で、1/2 と 1/2 である。従って、　の最適混合戦略は、$(q_1, q_2, q_3) = (.5, .5, 0)$ である。

行列 B のゲームは、同じ最適混合戦略を持つが、値は、5/2-2=1/2 である。

■注意点

1. pivot の行がステップ３ (c) のルールに沿って選ばれる理由は、tableau の右端の数字を非負に保つためである。もし pivot をした後に最後の列に負の数字を見つけたなら、pivot の行の選択または pivot をするときの計算をミスしている。
2. pivot の行を選ぶために割合を比べる時において、同じ数字になる事があるかもしれない。ルールでは、これら最小の割合の行の中で選ぶ事が許されている。最小の割合は 0 になる。
3. 右下の角の数字の値は、決して減らない (これがなぜだかわかるか)。実際右下の角は、常に上のプレイヤー　の標号に対応している下端における値の和に等しい。同様にまた、左のプレイヤー　の標号に対応している右端における値の和にも等しい。これは、計算をする際の小さなチェックポイントとなる。
4. tableau の主な部分における数字の周りの唯一の pivot は、決して下端または右端にはない。
5. この方法で、各プレイヤーの最適戦略を得られる。もし他の最適戦略が存在するならば、最終的な tableau の下端か右端に 1 つまたはそれ以上の 0 がある。他の最適戦略は、下端に 0 のある列で、または右端に 0 のある行でそれらを非負に保つように pivot をさらにする事で見つけられる。

2.4.7　Exercises

1. 行列 A のゲームを考えよ。プレイヤー　は、プレイヤー　との過去のゲームのプレーの経験から、　が選ぶであろう列の考え方を表した確率の集合がわかっている。　は、　はそれぞれ 1,2,3,4 の列を 1/5,1/5,1/5,2/5 の確率で選ぶであろうと考えている。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 9 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

(a)(1/5,1/5,1/5,2/5) に対する　のベイズ戦略 (最適反応) を求めよ。

$\mathbf{q} = (1/5, 1/5, 1/5, 2/5)^\top$ とすると、$A\mathbf{q} = (17/5, 9/5, 23/5)^\top$ となるので、プレイヤー　は 3 行目を選べば、式 (1) の最大値を達成する。よって、　のベイズ戦略は、(0,0,1) である。

(b)　は、　が (1/5,1/5,1/5,2/5) の対するベイズ戦略を使おうとしている事を正しく推測しているとする。　に使うべき戦略を教えよ。すなわち、　の (1/5,1/5,1/5,2/5) に対するベイズ戦略に対する　のベイズ戦略を求めよ。

(a) より のベイズ戦略は (0,0,1) で、$\mathbf{p} = (0, 0, 1)^{\top}$ とすると、$\mathbf{p}^{\top}A = (9, 3, -1, 6)$ となるので、プレイヤー は 3 列目を選べば、式 (5) の最小値を達成する。よって、 のベイズ戦略は、(0,0,1,0) である。

2. 行列 A のゲームは、値が 0 で、 の最適戦略は (6/11,3/11,2/11) である。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 1 \\ -1 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) 行列 B のゲームの値と の最適戦略を求めよ。
$A_n = (a_{ij}), B_n = (b_{ij})$ とすると、全ての i, j に対して、$b_{ij} = 2a_{ij} + 5$ が成り立つ。よって、B のゲームの値は 5 で、 の最適戦略は $(6/11, 3/11, 2/11)$ である。

(b) 両方のゲームの の最適戦略を求めよ。
無差別の原理より、ゲームの値 0 を多くても保証する の最適戦略は、(1/3,1/3,1/3) となり、これは A, B のどちらでも最適戦略である。

3. 値がないゲーム
$X = \{1, 2, 3, ...\}, Y = \{1, 2, 3, ...\}$ とし、

$$A(i, j) = \begin{cases} +1 & (i > j) \\ 0 & (i = j) \\ -1 & (i < j) \end{cases}$$

これは、より大きい整数を選んだプレイヤーの勝ちというゲームである。ここでプレイヤー の混合戦略の空間 X^* をとってみると、

$$X^* = \{(p_1, p_2, ...) : p_i \geq 0, \ {}^{\forall}i, \text{ and} \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1\}$$

同様に、

$$Y^* = \{(q_1, q_2, ...) : q_j \geq 0, \ {}^{\forall}j, \text{ and} \sum_{j=1}^{\infty} q_j = 1\}$$

$p \in X^*, q \in Y^*$ に対する利得は、

$$A(p, q) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_i A(i, j) q_j$$

(a)$^\forall q \in Y^*, \sup_{1\leq i<\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A(i,j)q_j = +1$ である事を示せ。

(b)$\overline{V} = +1$ と結論付けよ。

(c) 対称性を使って、$\underline{V} = -1$ である事を示せ。

(d) このゲームにおける　のミニマックス戦略は何か。

4. 次の行列のゲームを解くために 2.4.5 の方法を使え。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

値が正であることを示すか、行列の各要素に +1 を加えよ。宿題の採点者を楽にするために、2 列目で最初の pivot を行う事。

まず最初に saddle point と支配戦略の存在をチェックすると、この行列にはないので、問題にある通りに行列の全ての要素に +1 を加える。

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

次に行列 A' の tableau を次のように作る。

	y_1	y_2	y_3	
x_1	1	2	3	1
x_2	3	0	-1	1
x_3	4	-2	1	1
	-1	-1	-1	0

問題の通り、最初の pivot の列は 2 列目を選ぶ。すると、pivot は正でなければならないので、1 行目 2 列目の 2 を pivot とする。そして pivot すると、次のようになる。

	y_1	y_2	y_3	
x_1	1	2	3	1
x_2	3	0	-1	1
x_3	4	-2	1	1
	-1	-1	-1	0

$\longrightarrow$

	y_1	x_1	y_3	
y_2	1/2	1/2	3/2	1/2
x_2	3	0	-1	1
x_3	5	1	4	2
	-1/2	1/2	1/2	1/2

下端に負の数が 1 つあるので、もう一度 pivot する。今回は 1 列目で pivot する。1 列目の数字は全て正なので、pivot に対する右端の数字の割合を求めると、1,2,3 行目はそれぞれ、1,1/3,2/5 になる。よって、2 行目 1 列目の 3 について pivot する。

	y_1	x_1	y_3	
y_2	1/2	1/2	3/2	1/2
x_2	③	0	-1	1
x_3	5	1	4	2
	-1/2	1/2	1/2	1/2

$\longrightarrow$

	x_2	x_1	y_3	
y_2	-1/6	1/2	5/3	1/3
y_1	1/3	0	-1/3	1/3
x_3	-5/3	1	17/3	1/3
	1/6	1/2	1/3	2/3

今回は下端の数字が全て正になったので、次に進む。
値は 2/3 の逆数で、3/2。
最後の tableau で x_3 は左にあるので、$p_3 = 0$。p_1 と p_2 はそれぞれ、3/4,1/4 なので、プレイヤーの最適戦略は $(p_1, p_2, p_3) = (3/4, 1/4, 0)$。
同様に、最後の tableau で y_3 は上にあるので、$q_3 = 0$。q_1 と q_2 はそれぞれ、1/2,1/2 なので、プレイヤー　の最適戦略は $(q_1, q_2, q_3) = (1/2, 1/2, 0)$。
よって、行列 A のゲームは、同じ最適戦略を持ち、値は $3/2 - 1 = 1/2$ である。

5. 下限値が上限値より大きいかどうかの例
戦略空間 $X = Y = \{0, 1, 2, ...\}$ と次の利得関数の無限ゲームを考えよ。

$$A(i, j) = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ 4^j & (i > j) \\ -4^i & (i < j) \end{cases}$$

ゲームが対称である事に注意する。$p = (p_0, p_1, p_2, ...) = (1/2, 1/4, 1/8, ...), (p_i = 2^{-(i+1)})$ をプレイヤー　の混合戦略とする。

(a) プレイヤー　がこの戦略を使った時、平均利得 $\sum_{i=0}^{\infty} p_i A(i, j)$ がプレイヤー　の全ての純粋戦略 j の 1/2 に等しい事を示せ。
(b)p はプレイヤー　に少なくとも 1/2 を保証する均等化戦略である。よって、下限値は少なくとも 1/2 である。おそらくより良くできる。ゲームは対称である。値は 0 にすべきではないだろうか? プレイヤー　が同じ戦略を使うとする。対称性により、プレイヤー　はプレイヤー　がどんな純粋戦略を選ぼうとも、　の勝ち分を $-1/2$ 以下に保つ事ができる。よって、上限値は多くとも $-1/2$ である。何が間違いなのか? 両方のプレイヤーが混合戦略 p を使ったらどうなるだろうか。無限ゲームについては多くを議論していないが、このようなおかしな例を避ける無限ゲームの制限は何だろうか。その制限は利得関数 A に設けるべきものなのか、混合戦略の考え方に設けるべきものな

のか。

2.5　ゲームの展開形

ゲームの戦略形は、ゲームの数学的な側面を述べる簡潔な方法である。加えて、少なくとも原理の中で解析の簡潔な方法が許されている。しかしながら、多くのゲームの雰囲気はそのような単純なモデルではない。もう一つのゲームの数学的なモデル、展開形ゲームは、ゲームの戦略形において概念が明確でない、状態と動作の基本的な考え方に基づいている。展開形ゲームでは、はったり (bluffing)、きっかけ (signaling)、強制?(sandbagging) などの他の特徴な考え方を話題にするであろう。3 つの新しい概念は、ゲームの展開形において、ゲーム木、偶然の動作 (chance move)、情報集合を存在させる。

2.5.1　ゲーム木

ゲームの展開形は、有向グラフを使ってモデル化される。**有向グラフ**は、空集合でない頂点の集合 T、各 $x \in T$ に対する T の部分集合で、x の followers と言われる $F(x)$ で与えられる関数 F の組 (T, F) である。有向グラフがゲームを表すために使われている時、頂点はゲームの状態を表す。状態 x の follower、$F(x)$ は、x から 1 回の動作で動かす事ができる状態の集合である。

頂点 t_0 から頂点 t_1 への道は、$x_0 = t_0, x_n = t_1$ かつ、x_i が $i = 1, ..., n$ に対して x_{i-1} の follower である頂点の数列 $x_0, x_1, ..., x_n$ である。ゲームの展開形では、木という有向グラフの特別なタイプを扱う。

■Definition　**木**は、根 (root) または initial vertex と呼ばれる特別な頂点 t_0 があり、他の全ての頂点 $t \in T$ に対して、t_0 から始まり t 出終わるただ一つの道がある有向グラフ (T, F) である。

道の存在性と一意性は、木が連結で、唯一つの initial vertex を持ち、円周や輪を持たないことを意味する。

ゲームの展開形では、プレーは initial vertex で始まり、道の 1 つに沿って続け、結果的に terminal vertex の 1 つで終わる。terminal vertice で、ゲームのルールにより利得が決まる。n 人ゲームにおいて、これは利得の n 組になるだろう。ここでは 2 人ゼロ和ゲームを扱うので、この利得はプレイヤー　からプレイヤー　が得る勝ち分と言える。terminal vertex でない状態 (nonterminal vertex) においては、3 つの可能性がある。nonterminal vertex は、その状態で動作を選ぶプレイヤー　に割り当てられる。その他はプレイヤー　に割り当てられる。しかしながら、幾つかの頂点は、偶然の動作がなされるかどうかから選ばれる。

■**偶然の動作**　多くのゲームは偶然の動作が関わっている。例としては、モノポリーやバックギャモンのようなボードゲーム、クラップスのような賭博ゲームにおけるサイコロ転がし、ブリッジやポーカーにおけるカード引き、ルーレット、ロットにおけるボール取り出し等がある。これらのゲームでは、偶然の動作が重要な役割を担う。チェスにおいてでさえ、どちらのプレイヤーが白い駒を得るか (有利な先攻を得られる) 決めるために一般的に偶然の動作がある。プレイヤーは、様々な確率の結果が偶然の動作から生じるものである事を知っているとする。

■情報　ゲームの展開形を学習する事においてもう一つ考えなくてはならない重要な側面は、ゲームの過去の動作についてプレイヤーが役立つ情報の量である。例えばポーカーでは、最初の動作はカードをシャッフルして引くという偶然の動作で、各プレイヤーはこの動作の結果の確かな側面 (受け取ったカード) を知るが、完全な結果 (他のプレイヤーが受け取ったカード) は知らされない。これにより bluffing の可能性が生じる。

2.5.2　Basic Endgame in Poker

ポーカーで起こる単純で最も役に立つ数学的な状況の 1 つのモデルは、Friedman(1971) による classical betting situation と、Cutler(1976) による basic endgame である。これらの論文では、スタッドポーカーやローボールのゲームでのとても的確な説明ができるモデルである明白な状況が紹介されている。このモデルは、Ferguson の本の練習問題でも見つけられる。これは 2 人のプレイヤーが残っている時のベットの最後のラウンドで時折起こる状況のモデルなので、Cutler の方を採用し、これを Basic Endgame in poker と呼ぶ。これはまた、チェス、碁、バックギャモン等の他のゲームのような、ポーカーのゲームの重要な特色と、終盤に起こり、解析的に扱いやすい特別な戦略や戦術が重要になるゲームの特殊な状態がある事を強調している。

Basic Endgame は次のようにプレーされる。両方のプレイヤーが 1 ドル (アンティーという) をテーブルの中央に置く。テーブルの中央に置かれたお金 (今のところ 2 ドル) は、ポットと呼ばれる。それからプレイヤー　は、デッキからカードを 1 枚引く。確率 1/4 で勝てるカード、確率 3/4 で負けるカードである。プレイヤー　はこのカードを見るが、プレイヤー　からは隠し続ける (プレイヤー　はカードを持たない)。プレイヤー　はそれからチェックかベットをする。チェックをしたならカードを見せ、勝てるカードを持っていたなら、ポットを勝ち分とし、従って　からアンティーの 1 ドルを得るが、そうでないのなら、アンティーの 1 ドル分　に負けることになる。ベットをしたなら、ポットにさらに 2 ドルを置く。それからプレイヤー　はプレイヤー　の持っているカードがわからない状態で、フォールドかコールをしなくてはならない。フォールドをしたなら、　がどんなカードを持っていてもアンティーの 1 ドル分負ける。コールをしたなら、2 ドルをさらにポットに加える。それからプレイヤー　はカードを見せ、勝てるカードだったのなら　が 3 ドル (ベットで足したアンティー) 勝ち、そうでなければ　が 3 ドル勝つ。

このゲームの木を描いてみる。このゲームは多くても 3 つの動作で成り立っている。(1)　がカードを選ぶ偶然の動作、(2) チェックかベットのどちらかの　の動作、(3) フォールドかコールの　の動作、である。ゲーム木の各頂点には、その状態から動かすプレイヤーがどちらなのかを示すプレイヤーの名前が付けられている。偶然の動作は、自然による動作として一般的に用い、名前は N を使う。図 2.5.1 を見よ。

各辺には、動作を判別するための名前が付けられている。(矢印は見やすいように省いた。動作はページの下のほうへ進む。) また、自然の動作をする頂点からの動作には、それらが起こる確率が書かれている。各 terminal vertex には、　の勝ち分 (　の負け分) の数値が書かれている。

図から欠けている特色がただ 1 つある。木からゲームの全ての重要なルールを推測できるようにすべきである。　が決定を下す時に　が持っているカードを知らない事を指し示していないので、図 2.5.1 の木

図 2.5.1

の場合ではそれができていない。すなわち、　が動く番の時、2 つの可能な状態のどちらに進むべきなのかを知らないという事である。これを 2 つの状態を閉じた輪を描く事によって指し示し、2 つの頂点が情報集合を構成していると言う。　が動作をする 2 つの頂点は、偶然の動作の結果を知らされるので、2 つの分かれた情報集合を構成する。完全にするために、これもまたこれらの頂点について小さな円を描いて特色を示さなくてはならない。同じ情報集合に属しているので、　の頂点の名前の一つを取り除いてもよい。実際は、情報集合は名付けられなければならない。完成したゲーム木は次のようになる。

図 2.5.2

今の特色はゲームの全ての重要なルールを含んでいる。

2.5.3　Kuhn 木

含まれている辺と頂点に全て利得、情報集合、名前付けされているゲーム木は、Kuhn 木として知られている。今から Kuhn 木の形式的な定義をする。

全ての頂点の集合が情報集合を形作るわけではない。プレイヤーはどの頂点にゲームが来た時に情報集合が与えられるのかを知らないため、情報集合での各頂点では、残りの辺の数が同じでなければならない。さらに、情報集合の各頂点からの辺は同じ名前の集合でをもつ事は重要である。そのような情報集合から動かすプレイヤーは、名前を選ぶ。プレイヤーは各情報集合からただ 1 つの選択をすると仮定する。

■Definition　展開形での有限 2 人ゼロ和ゲームは、次によって与えられる。

1) 頂点 T の有限木。
2) 各 terminal vertex に実数を割り当てる利得関数。
3) non-terminal vertex(偶然の動作がおこる状態を表す) の集合 T_0 と各 $t \in T_0$ に対する t からの辺における確率の配分。
4) 残りの頂点 (terminal でも T_0 にもない) を情報集合 $T_{11}, T_{12}, ..., T_{1k_1}$(プレイヤー　) と $T_{21}, T_{22}, ..., T_{2k_2}$(プレイヤー　) の 2 つのグループへの割り当て。
5) プレイヤー j の各情報集合 T_{jk}、名前の集合 L_{jk}、t からの辺の集合においての各 $t \in T_{jk}$ に対する L_{jk} の 1 対 1 写像。

展開形ゲームでの情報構造はかなり複雑にもなりうる。それは他のプレイヤーの動作の知識や、いくつかの偶然の動作の欠如に関連するかもしれない。ゲームで既にされている動作がいくつかという知識の欠如を示すことはできる (図 2.5.3 でのプレイヤー　の場合である)。

1 人のプレイヤーが自分が既にした動作を忘れてしまったという状況を説明する事ができる (図 2.5.3,2.5.4 でのプレイヤー　である)。実際、2 人ゼロ和ゲームとしてのブリッジのゲームをモデル化しようとする方法の 1 つは、この考えを使っている。ブリッジでは、それぞれ 2 人ずつでチームを組んだ 4 人がいる。パートナーと利害は一致するので、これを 2 人ゲームとして説明する事ができる。しかし、パートナーは交互に自分以外の誰も知らないカードに基づいてビッドする。これは幾つかの前の無作為な動作の結果を交互に思い出したり、忘れたりする 1 人のプレイヤーとして説明される。過去の全てのかつて知っていた情報と過去の全ての動作を覚えているプレイヤーのゲームを **perfect recall** のゲームという。

情報集合が道によってつながっている 2 つの頂点を含んでいる時に、図 2.5.5 の　の情報集合のような、一種の退化した状況が存在する。

プレイヤーがゲームの間に各情報集合から 1 つの選択をする、という約束として採り上げる。その選択は、何回情報集合が及ぼうとも使われる。図 2.5.5 では、　が a を選ぶのなら問題はない。　が b を選ぶと、下の 2 つの頂点では a は不必要であり、木は実際図 2.5.6 に同値となる。上の慣習の代わりに、道によってつながれている 2 つの頂点を含んでいる情報集合がない展開形ゲームの定義として考えてもよい。

図 2.5.3

図 2.5.4

両方のプレイヤーがゲームのルールを知っている、すなわち、両方のプレイヤーが Kuhn 木を知っているゲームを**完全情報ゲーム**という。1 人または両方のプレイヤーが利得、または偶然の動作の確率、または情報集合、または全体の木の枝でさえも知らないゲームを**不完全情報ゲーム**もしくは **pseudogames** という。完全情報ゲームを扱うと考える事にする。

2.5.4　展開形での戦略形ゲームの表現

戦略形ゲームの考え方は、かなり単純である。セクション 1 での 3 つの組 (X, Y, A) によって表される。一方、ゲームの展開形はかなり複雑である。偶然の動作または 1 人のプレイヤーの動作として名付けられた各 non-terminal vertex と、具体的に述べられた全ての情報集合と、全ての偶然の動作に対する確率の割

図 2.5.5　　　　図 2.5.6

り当て、各 terminal vertex に結び付けられている利得があるゲーム木によって表される。展開形ゲーム理論は、戦略形ゲーム理論よりも広範囲に思えるかもしれない。しかしながら、展開形ゲームを採り上げ、戦略と平均利得だけを考える事によって、戦略形に変形する事ができる。

最初に、戦略形ゲームが展開形ゲームと置ける事をチェックする。ゲームの展開形では、同時の動作が許されていないのに対し、ゲームの戦略形では、プレイヤーは同時に自身の選択をする。しかしながら、同時の動作は次のように連続して起こるものとすることができる。プレイヤーの一人、いわゆるプレイヤー　が最初に動かし、次にプレイヤー　が　の動作の結果を知らないで動かす。この知識の欠如は、適切な情報集合を使う事によって表される。例を下に示す。

プレイヤー　は 2 つ、プレイヤー　は 3 つの純粋戦略をもつ。プレイヤー　は、最初に 1 行目か 2 行目を選ぶと考える。次にプレイヤー　が、プレイヤー　の選択を知らないまま動かす。これは、プレイヤー　に対する情報集合によって示される。それからプレイヤー　が 1,2,3 列目を選ぶことによって動かし、適切な利得を得る。

2.5.5　展開形ゲームの戦略形への変形

逆方向、ゲームの展開形から戦略形への変形を行うためには、純粋戦略の考察と、無作為の利得に関してのいつもの慣習が求められる。

[純粋戦略] 展開形ゲームが与えられ、最初に戦略形で使われるプレイヤーの純粋戦略 X, Y を求

める。プレイヤー　の純粋戦略は情報集合の各々でどのような選択をするのかを示す規則である。$T_{11}, ..., T_{1k_1}$ をプレイヤー　の情報集合とし、$L_{11}, ..., L_{1k_1}$ を名前に対応する集合とする。　の純粋戦略は、k_1 組 $x = (x_l, ..., x_{k_1})(x_i \in L_{1i}(i = 1, ..., l))$ である。もし L_{1i} に m_i 個の要素があるなら、k_l 組の数と　の純粋戦略の数は、積 $m_1 m_2 ... m_k$ である。全てのそのような戦略の集合は、X である。同様に、$T_{21}, ..., T_{2k}$ が　の情報集合を示し、$L_{21}, ..., L_{2k_2}$ を名前に対応する集合とすると、　の純粋戦略は k_2 組 $y = (y_1, ..., y_k)(y_j \in L_{2j}(j = 1, ..., k))$ である。L_{2j} の要素の数が n_j なら、プレイヤー　は $n_1 n_2 ... n_k$ の純粋戦略を持つ。Y はこれらの戦略の集合を示す。

[無作為の利得] $x \in X, y \in Y$ が与えられ、　の情報集合の一つにゲームが入るたびに、x から適切な動作でプレーし、　の情報集合の一つにゲームが入るたびに、y から適切な動作でプレーし、各偶然の動作において示された確率の無作為な動作でプレーする事ができる。与えられた $x \in X, y \in Y$ に対するゲームの実際の結果は、選ばれた偶然の動作、すなわち無作為の数に依存する。厳密に言えば、無作為の利得は普通の形でのゲームの定義を認めない。しかしながら、プレイヤーによる混合戦略の使用に対して無作為が与えられる時に、平均値 (期待値) で無作為の利得を置き換えることにすっかり慣れている。偶然の動作に対して無作為が与えられる時の無作為の利得の扱いにおいて、同じ慣習を採用する。この正当性は、効用理論から来ている。

■Convention　プレイヤーの固定の純粋戦略 $x \in X, y \in Y$ に対して、利得が無作為の数なら、利得を平均値に置き換え、この平均値を $A(x, y)$ と表す。

例えば、戦略 $x \in X, y \in Y$ が与えられ、プレイヤー　が確率 1/4 で 3 勝ち、確率 1/4 で 1 勝ち、確率 1/2 で 1 負けるとすると、平均利得は $\frac{1}{4}(3) + \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 1/2$ なので、$A(x, y) = 1/2$ とする。

従って、展開形ゲームが与えられ、X, Y がそれぞれプレイヤー　,　の純粋戦略空間で、$A(x, y)$ が $x \in X.y \in Y$ に対する平均利得なら、(X, Y, L) はゲームの戦略形と同値であるといえる。

2.5.6　例

図 2.5.2 で与えられている木における、2.5.2 で説明されている Basic Endgame in Poker の均等戦略形を求める。プレイヤー　は 2 つの情報集合を持つ。各集合においては 2 つの選択肢の中から選択をしなければならない。従って、$2 \cdot 2 = 4$ の純粋戦略がある。これらを次のように表す。

(b, b): 勝てるカードまたは負けるカードでベットする。
(b, c): 勝てるカードでベットし、負けるカードでチェックする。
(c, b): 勝てるカードでチェックし、負けるカードでベットする。
(c, c): 勝てるカードまたは負けるカードでチェックする。

従って、$X = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$ である。良かろうと悪かろうと、X は全ての純粋戦略を含んでいる (特に、(c, b) は道理に反した戦略に思える)。

プレイヤー　は 1 つだけしか情報集合を持たない。従って、$Y = \{c, f\}$ で、

c:　がベットするなら、コールする。
f:　がベットするなら、フォールドする。

利得行列を求める。　が (b, b) を使い、　が c を使うとする。すると、　が勝てるカードを得たなら (1/4 の確率で起こる)、ベットし、　はコールし、　は 3 ドル勝つ。しかし、　が負けるカードを得たなら (3/4 の確率で起こる)、ベットし、　はコールし、　は 3 ドル負ける。　の平均 (期待) 値は次のようになる。

$$A((b, b), c) = \frac{1}{4}(3) + \frac{3}{4}(-3) = -\frac{3}{2}$$

これは、次の行列の左上の値となる。他の値も同様に計算する (練習問題として残しておく)。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} c & f \end{array} \\ \begin{array}{c} (b, b) \\ (b, c) \\ (c, b) \\ (c, c) \end{array} & \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \\ -2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

この 4×2 のゲームを解いてみる。3 行目は 1 行目によって支配されていて、4 行目は 2 行目によって支配されている。ゲームの元の形から、これは何かおかしいと言える。もし　が勝てるカードを得たなら、チェックする事が良いとはいえない。ベットすれば少なくともそれと同じ分だけ勝て、あるいはそれ以上勝てる可能性もある。下の 2 つの行を取り除いた行列は $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ となり、解答が簡単に求められる。値は $V = -1/4$ である。　の最適戦略は (b, b) と (b, c) をそれぞれ確率 1/6 と 5/6 で選ぶ混合戦略である。一方、　の最適戦略は c と f をそれぞれ同じ確率 1/2 で選ぶ混合戦略である。戦略 (b, b) はプレイヤー　の bluffing 戦略である。負けるカードを持っている時に、ベットする事で起こる。戦略 (b, c) はプレイヤー　の honest 戦略であり、勝てるカードの時はベットし、負けるカードの時はチェックする。
　の最適戦略は多少のはったりと正直さが求められる。

Exercise4 では、　に対して各 2 つの選択で 6 つの情報集合がある。　の純粋戦略の数は従って $2^6 = 64$ である。　は各 2 つの選択で 2 つの情報集合を持つ。従って、　は $2^2 = 4$ の純粋戦略を持つ。均等戦略形のゲームの行列は 64×4 となる。支配によって 2×3 のゲームに変形する事ができる (Exercise10(d) を見よ)。

2.5.7　完全情報ゲーム

これから、展開形ゲームを定義し、完全情報ゲームの考え方を正確にする。

■Definition　完全情報ゲームは全てのプレイヤーの各情報集合が 1 つの頂点を含んでいる展開形ゲームである。

完全情報ゲームでは、動作をする番になった各プレイヤーは、木における正確な状態を知っている。特に、各プレイヤーは偶然の動作を含めたゲームの過去の全ての動作を知っている。例としては、tic-tac-toe、チェス、バックギャモン、クラップス等がある。

完全情報ゲームは、特に数学的に単純な構造になっている。主な結果は、完全情報ゲームの全てのゲームは、戦略形に変形した時、saddle point を持っていて、両方のプレイヤーが最適純粋戦略を持つ。さらに、saddle point は支配されている行や列を取り除くことによって求められる。これにより、例としてのチェスのゲームで興味深い結果が出る。偶然の動作がないので、チェスのゲームの行列の全ての値は +1(プレイヤー　が勝つ) か、−1(プレイヤー　が勝つ) か、0(引き分け) のいずれかである。saddle point はこれらの数字の一つでなければならない。従って、プレイヤー　が勝てる保証をする事ができるか、プレイヤー　が勝てる保証をする事ができるか、両方のプレイヤーが少なくとも引き分けである事を保証する事ができる。ゲーム理論的な視点から、チェスはとても単純なゲームである。ゲームの行列を書くだけである。もし全ての値が +1 の行があるなら、プレイヤー　は勝てる。もし全ての値が −1 の列があるなら、プレイヤー　は勝てる。そうでなければ、全て +1 と 0 の行と全て −1 と 0 の列があるので、ゲームは最高のプレーで引き分けとなる。もちろん、チェスの実際のゲームは複雑であり、最適戦略が見つかる望みはほとんどない。実際、どんなに上手くプレーできる人間でもまだ誰も見つけていない。

2.5.8　行動戦略

展開形ゲームに対して、純粋戦略の中から選ぶ違った無作為化の方法を考える事は有益である。全てのプレイヤーは実際にすべき事は、ゲームの情報集合に対する辺の選択をする事である。行動戦略はその集合の選択において、各情報集合に確率を割り当てる戦略である。

例えば、ゲームの最初の動作が、プレイヤー　に 52 枚のカードのデッキから 1 枚を配る事であるとする。カードを見た後、プレイヤー　はベットかパスをし、それからプレイヤー　は何らかの行動をする。プレイヤー　は各 2 つの行動の選択に対して 52 の情報集合を持つので、2^{52} の純粋戦略を持つ。従って　の混合戦略は、2^{52} の要素に 1 を足したベクトルである。これに対して、　の行動戦略は、単純に受け取ったカードに対してのベットの確率によって与えられるので、52 の数字でだけで述べる。

一般的に、行動戦略空間の次元は、混合戦略空間の次元よりかなり小さい。ここで、行動戦略でできる事は混合戦略でできる事と同じぐらいなのか、という疑問が浮かぶが、その答えはゲームの両方のプレイヤーが perfect recall を持つかどうかで決まる。1953 年の Kuhn による基本定理によれば、perfect recall の有限ゲームでは、利得のどんな配分においても、混合戦略で達成可能なことは、行動戦略で同じように達成可能である。

行動戦略が常に十分であるとは限らない事を確かめるために、図 2.5.4 の perfect recall でないゲームを

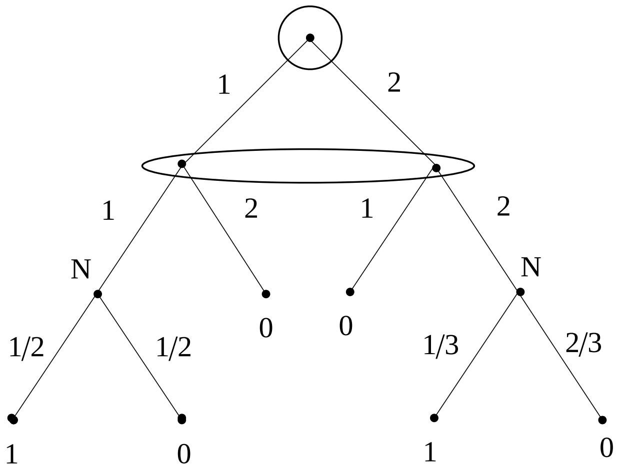
考えよ。戦略形にゲームを変形した上で、次の行列を求める。

$$\begin{array}{c} \\ (f,c) \\ (f,d) \\ (g,c) \\ (g,d) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad a \quad & \quad b \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \\ -2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

一番上と一番下の行は支配によって取り除かれるので、　と　のただ 1 つの最適混合戦略がそれぞれ、(0,2/3,1/3,0) と (2/3,1/3) である事は容易にわかる。値は 2/3 である。しかしながら、プレイヤー　の最適戦略は行動戦略によっては達成可能ではない。　の行動戦略は、最初の情報集合における選択 f の確率 p_f と、2 つ目の情報集合における選択 c の確率 p_c という 2 つの数字によって与えられる。これにより、混合戦略 $(p_f p_c, p_f(1-p_c), (1-p_f)p_c, (1-p_f)(1-p_c))$ が導かれる。戦略 (0,2/3,1/3,0) は最初の要素に 0 があり、もし $p_f p_c = 0$ なら、$p_f = 0$ または $p_c = 0$ なので、2 つ目または 3 つ目の要素もまた 0 にならなくてはならないので、この形ではない。もしゲームのルールがプレイヤーが行動戦略を使う事を求めるなら、ブリッジの確かなモデルの場合のように、ゲームに値がないかもしれない。これはもしプレイヤー　が最初に行動戦略を使う事を宣言する事を求められるなら、はっきりと不利な状況に置かれる事になることを表す。図 2.5.4 のゲームは、この例である (Exercise11 を見よ)。

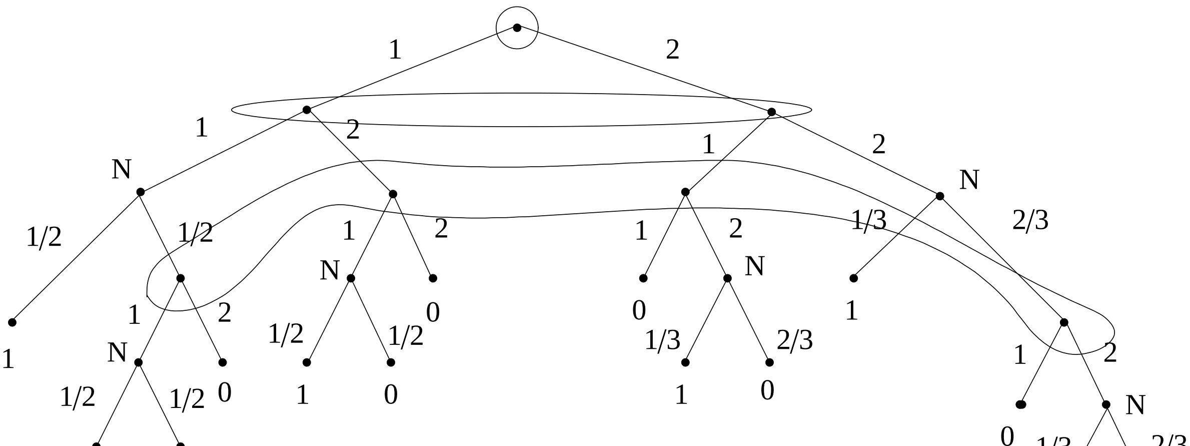
2.5.9　Exercises

1. **The Silver Dollar**
   プレイヤー　は、銀貨を隠すための 2 つの部屋の 1 つを選ぶ。次に、プレイヤー　はどちらの部屋に銀貨があるのかを知らないまま、探す部屋を 1 つ選ぶ。しかしながら、捜索は常に成功するとは限らない。実際、もし銀貨が部屋 1 にあり、　がそこを探せば、(偶然の動作によって)1/2 の確率でしか見つけられないし、もし銀貨が部屋 2 にあり、　がそこを探せば、1/3 の確率でしか見つけられない。もちろん、　が間違った部屋を探せば、見つけることはできない。もし　がコインを見つけられれば、自分のものにでき、そうでなければ銀貨はプレイヤー　に戻ってくる。ゲームの木を描け。



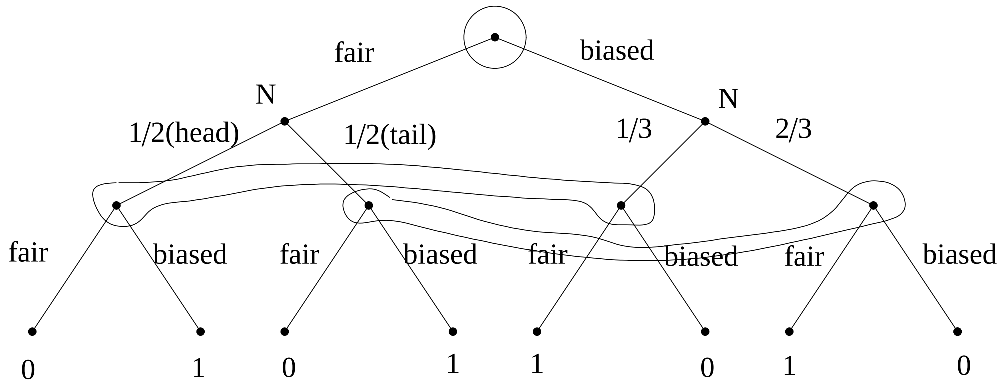
2. **Two Guesses for the Silver Dollar**

　が最初の試みが成功しなかった時に、前回の捜索に依存せず、もう 1 度同じ成功確率で部屋を探す 2 度目の機会が与えられる場合 (プレイヤー　はもう 1 度銀貨を隠す事はない) の Exercise1 のゲーム木を描け。



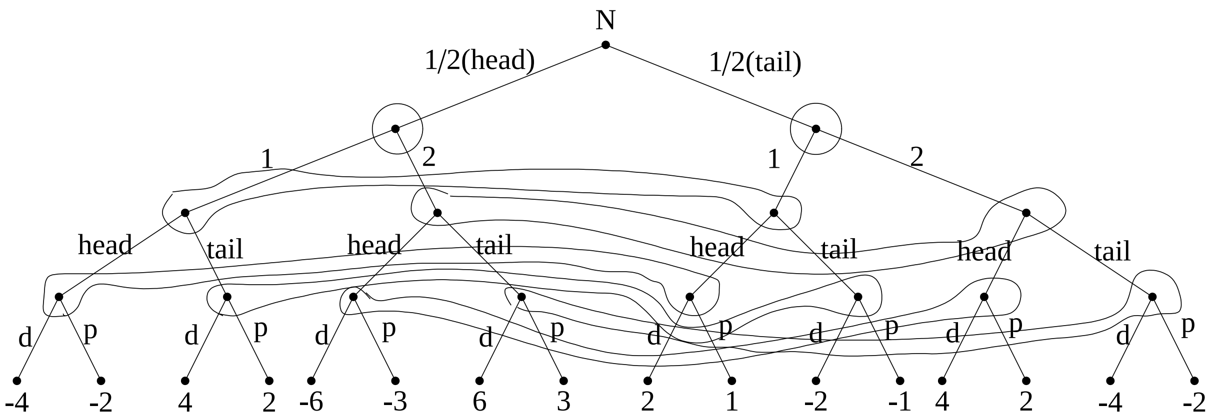
3. **A Statistical Game**

プレイヤー　は 2 枚のコインを持っている。1 枚は公平 (1/2 の確率で表が出て、1/2 の確率で裏が出る) で、もう 1 枚は偏っていて、1/3 の確率で表が出て、2/3 の確率で裏が出る。プレイヤー　はどちらのコインが公平か、または偏っているのかを知っている。　はコインの 1 枚を選び、トスする。トスの結果は　に宣言する。それから　は、　が公平なコインまたは偏ったコインのどちらを選んだかを推測しなければならない。　が正しければ利得はない。　が間違っていれば、　は 1 負ける。ゲーム木を描け。



4. **A Forgetful Player**

   公平なコイン (確率 1/2 で表が出て、確率 1/2 で裏が出る) がトスされ、プレイヤー　にその結果が示される。このトスの結果を基に、　は 1 か 2 をベットするかを決める。次にプレイヤー　は、トスの結果を知らずにベットの量だけを聞き、コインが表か裏かを推測しなければならない。そして最後に、プレイヤー　(現実的には、彼のパートナー) は、ベットの量と　の推測は覚えているが、トスの結果は忘れている状態で、ダブルかパスかを決める。　は推測が正しければ勝ち、推測が間違っていれば負ける。勝ち分の絶対値は、[ベットの量 (もしコインが表なら +1)](もしダブルなら ×2) である。ゲーム木を描け。

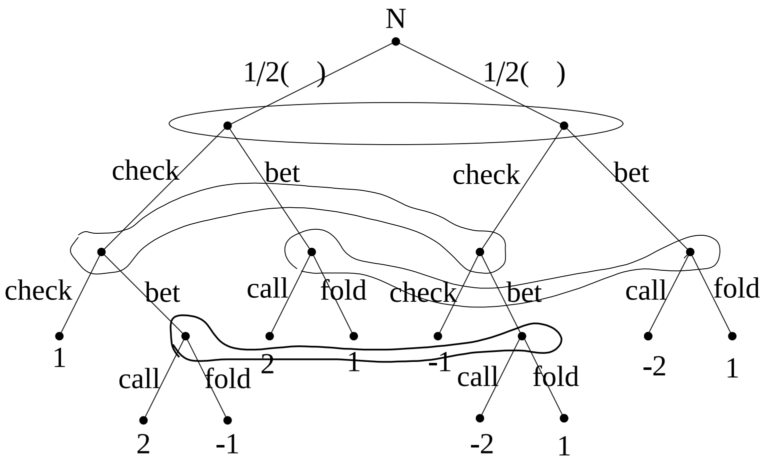


5. **The Kuhn Poker Model**(H. W. Kuhn(1950))

   2 人のプレイヤーは両方とも 3 枚のカード $\{1,2,3\}$ のデッキから無作為に 1 枚を引く (この偶然の動作の結果は 6 つの可能性がある)。それからプレイヤー　は、チェックかベットをする。もし　がベットをしたら、　はコールかフォールドをする。もし　がチェックをしたら、　はチェックかベットをする。もし　がチェックし、　がベットをしたら、　はフォールドかベットをする。両方のプレイヤーがチェックしたら、より大きいカードを持っている方のプレイヤーが 1 勝つ。もし 1

人のプレイヤーがベットし、他方がフォールドすれば、ベットしたプレイヤーが 1 勝つ。もし 1 人のプレイヤーがベットし、他方がコールすれば、より大きいカードを持っている方のプレイヤーが 2 勝つ。ゲームの木を描け。

それぞれのプレイヤーが自分と相手が引いたカードの数字をどちらも知らないとするならば、最初の偶然の動作の 6 つの組合せは、　が大きいカードを持っている場合 (確率 1/2) と　が大きいカードを持っている場合 (確率 1/2) の 2 つの組合せのゲーム木と同値になる。



6. **Basic Endgame in Poker**

勝てるカードを引く確率を任意の数 $0 \le p \le 1$ とし、ベットの量を任意の数 $b > 0$ とする事で Basic Endgame in poker を一般化せよ (図 2.5.2 では、1/4 は p によって、3/4 は $1 - p$ によって置き換えられ、3 は $1 + b$ によって、-3 は $-(1 + b)$ によって置き換えられる)。値と最適戦略を求めよ ($p \ge (2+b)/(2+2b)$ の時は、saddle point がある事に注意せよ。答えが出たとき、$p < (2+b)/(2+2b)$ の時は、プレイヤー　の最適戦略は p によらないことにも注意せよ)。

5.6 の様にプレイヤー　の純粋戦略をそれぞれ BB, BC, CB, CC とし (それぞれ 5.6 の $(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)$ に対応する)、プレイヤー　の純粋戦略を c, f とする。利得行列は次のようになる。

$$
\begin{array}{c}
 \\ BB \\ BC \\ CB \\ CC
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \qquad c \qquad & \qquad f \qquad \end{array} \\
\begin{pmatrix}
(2p-1)(b+1) & 1 \\
pb + 2p - 1 & 2p - 1 \\
2p + pb - b - 1 & 1 \\
2p - 1 & 2p - 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$(2p - 1)(b + 1) - \{2p + pb - b - 1\} = pb > 0$ なので、3 行目は 1 行目によって支配されている。また、$pb + 2p - 1 - \{2p - 1\} = pb > 0$ なので、4 行目は 2 行目によって支配されている。よって、こ

れを 2×2 の行列に変形すると、

$$\begin{pmatrix} (2p-1)(b+1) & 1 \\ pb+2p-1 & 2p-1 \end{pmatrix}$$

問題から、$p \geq (2+b)/(2+2b)$ の時は、saddle point があるので、1 行目 2 列目の 1 が saddle point でゲームの値となり、　と　の最適戦略はそれぞれ、(1,0),(0,1) となる。

$p < (2+b)/(2+2b)$ の時は、ゲームの値 v、　の最適戦略 $\mathbf{p}$、　の最適戦略 $\mathbf{q}$ は次のようになる。

$$v = \frac{4(b+1)p-(b+2)}{b+2}$$

$$\mathbf{p} = \left(\frac{pb}{(1-p)(b+2)}, \frac{-2p+b+2}{(1-p)(b+2)}\right)$$

$$\mathbf{q} = \left(\frac{2}{b+2}, \frac{b}{b+2}\right)$$

問題の記述の通り、　の最適戦略は p の値によらない。

7. (a) 次のゲーム木のゲームの均等戦略形を求めよ。

プレイヤー　の純粋戦略は $X = \{\mathrm{a,b,c}\}$ で、プレイヤー　の純粋戦略は {(d,f),(d,g),(e,f),(e,g)}(例えば (d,f) は d,e の選択肢で d を選び、f,g の選択肢で e を選ぶという事) である。従って、均等戦略形は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (\mathrm{d,f}) & (\mathrm{d,g}) & (\mathrm{e,f}) & (\mathrm{e,g}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) ゲームを解け。

支配によって、4 列目、1 行目、1 列目と順に取り除ける。これで 2×2 のゲームとなり、ゲームの値は 2/3。よって、プレイヤー　の最適戦略は $p = (0, 2/3, 1/3)$、プレイヤー　の最適戦略は

$q = (0, 2/3, 1/3, 0)$ である。

8. (a) 次のゲーム木のゲームの均等戦略形を求めよ。

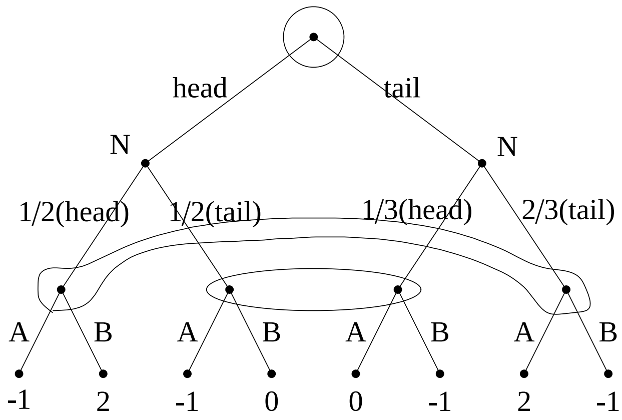
プレイヤー　の純粋戦略は $X = \{(A,C),(A,D),(B,C),(B,D)\}$(Exercise7 のプレイヤー　の純粋戦略の表記と同じ) で、プレイヤー　の純粋戦略を $Y = \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$ である。従って、均等戦略形は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ (A,C) \\ (A,D) \\ (B,C) \\ (B,D) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (a,c) & (a,d) & (b,c) & (b,d) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) ゲームを解け。

支配によって、2 列目、4 行目 (1,2 行目を確率 1/2)、1 行目 (2,3 行目を確率 1/3,2/3) と順に取り除ける。これで 2×3 のゲームとなり、ゲームの値は 1/2。プレイヤー　の最適戦略は $p = (0, 2/3, 1/3, 0)$、プレイヤー　の最適戦略は $q = (1/2, 0, 1/2, 0)$ である。

9. コイン A は、確率 1/2 で表が出て、確率 1/2 で裏が出る。コイン B は、確率 1/3 で表が出て、確率 2/3 で裏が出る。プレイヤー　は表か裏かを予想しなければならない。表だと予想すれば、コイン A がトスされる。裏だと予想すれば、コイン B がトスされる。プレイヤー　はプレイヤー　の予想が正しかったか間違っていたかを知っていて (だが、予想の内容と使われたコインは知らない)、コイン A とコイン B のどちらを使ったかを推測しなくてはならない。もし　の推測が正しければ、　から 1 ドルを得る。もし　の推測が間違っていて、　の予想があっていれば、　は　から 2 ドルを得る。もし両者とも間違っていれば、利得はない。
(a) ゲーム木を描け。



(b) ゲームの均等戦略形を求めよ。

プレイヤー　の純粋戦略は X = {h,t}、プレイヤー　の純粋戦略は Y = {(A,A),(A,B),(B,A),(B,B)}(　の予想が正しければ前者、間違っていれば後者を選ぶ) である。従って、均等戦略形は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ \text{h} \\ \text{t} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{(A,A)} & \text{(A,B)} & \text{(B,A)} & \text{(B,B)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 4/3 & 1 & -2/3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(c) 解け。

支配によって、2 列目 (1,4 列目を確率 3/4,1/4) を取り除け、2×3 のゲームとなる。従って、ゲームの値は 0。プレイヤー　の最適戦略は $p = (4/7, 3/7)$、プレイヤー　の最適戦略は $q = (1/3, 0, 2/3, 0)$ である。

10. 次のゲームの均等戦略形を求め、解け。

(a)Exercise 1

プレイヤー　の純粋戦略は $X = \{1, 2\}$、プレイヤー　の純粋戦略は $Y = \{1, 2\}$ なので、均等戦略形は次のようになる。

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

従って、ゲームの値は 1/5 で、プレイヤー　の最適戦略は $p = (2/5, 3/5)$ で、プレイヤー　の最適戦略は $q = (2/5, 3/5)$ である。

(b)Exercise 2

プレイヤー　の純粋戦略は $X = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$(1 回目の捜索が前者、2 回目の捜索が後

者) で、プレイヤー　の純粋戦略は $Y = \{1, 2\}$ であるので、均等戦略形は次のようになる。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} & \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 \\ 0 & 5/9 \end{pmatrix} \end{array}$$

支配によって 3 行目は取り除けるので、3×2 の行列となる。従って、ゲームの値は 15/47。プレイヤー　の最適戦略は $p = (20/47, 0, 0, 27/47)$ で、プレイヤー　の最適戦略は $q = (20/47, 27/47)$ である。

(c)Exercise 3

プレイヤー　の純粋戦略は $X = \{\mathrm{f,b}\}$ で、プレイヤー　の純粋戦略は $Y = \{(f, f), (f, b), (b, f), (b, b)\}$(表が出たら前者、裏が出たら後者を選ぶ) であるので、均等戦略形は次のようになる。

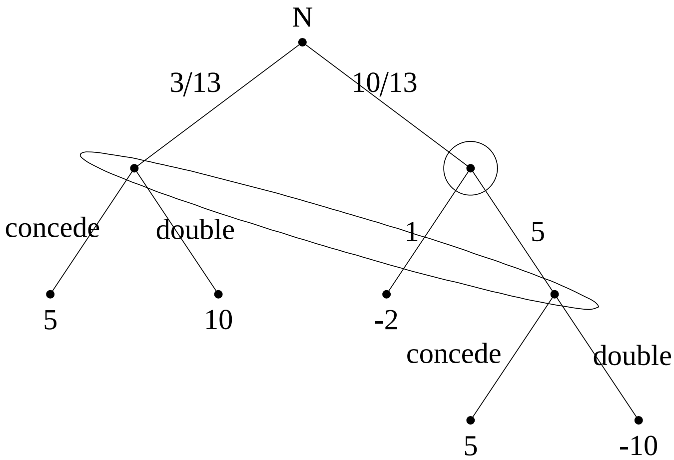
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathrm{(f,f)} & \mathrm{(f,b)} & \mathrm{(b,f)} & \mathrm{(b,b)} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{f} \\ \mathrm{b} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

支配によって 3 列目は取り除けるので、2×3 の行列となる。従って、ゲームの値は 3/7。プレイヤー　の最適戦略は $p = (4/7, 3/7)$ で、プレイヤー　の最適戦略は $q = (1/7, 6/7, 0, 0)$ である。

(d)Exercise 4

11. 図 2.5.4 のゲームにおいて、プレイヤー　は行動戦略を使う事を求められているとする。もしプレイヤー　が最初に行動戦略を使う事を宣言する事を求められるならば、　は下限値 1/2 しか達成できない事を示せ。また一方、もしプレイヤー　が最初に戦略を宣言する事を求められるならば、プレイヤー　は少なくとも上限値 2/3 を達成できる行動戦略を持つ事を示せ。

12. (Beasley(1990),Chap. 6.)
プレイヤー　は全 52 枚のトランプのデッキから無作為に 1 枚カードを引く。カードを見た後、　が引いたカードが絵札 (キング、クイーン、ジャック (確率 3/13)) かどうかで、1 または 5 をベットする。次にプレイヤー　は、降参かダブルをする。もし　が降参すれば、　は　にベットの量を支払わなくてはならない (カードが何であっても)。もし　がダブルをすれば、　はカードを　に見せ、絵札であればベットの 2 倍勝ち、そうでなければ 2 倍負ける。
(a) ゲーム木を描け (最初にプレイヤー　は常に絵札の時は 5 をベットし、プレイヤー　は常にプレイヤー　が 1 をベットすればダブルをすると考えてよい)。



(b) 均等標準形を求めよ。

プレイヤー　の純粋戦略は $X = \{1, 5\}$ で、プレイヤー　の純粋戦略は $Y = \{\mathrm{c,d}\}$ であるので、均等標準形は次のようになる。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -5/13 & 10/13 \\ 5 & -70/13 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

(c) 解け。

2×2 のゲームなので、ゲームの値は 2/13。プレイヤー　の最適戦略は $p = (9/10, 1/10)$ で、$q = (8/15, 7/15)$ である。

2.6 帰納的、確率的ゲーム

2.6.1 要素としてのゲームの行列ゲーム

プレイヤーの純粋戦略の特定の選択の結果がプレイヤーが他のゲームをプレーしなければならないという行列ゲームを考える。単純な例を挙げてみよう。

G_1, G_2 は、行列の 2×2 ゲームを表すとする。

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

そして、G は次によって表される行列の 2 のゲームを表すとする。

$$G = \begin{pmatrix} 4 & G_1 \\ G_2 & 5 \end{pmatrix}$$

ゲーム G は、プレイヤー　が行を選び、プレイヤー　が列を選ぶという普通のルールでプレーされる。もし選んだ行と列の値が数字なら、　は　にその量を払い、ゲームは終了する。もし　が 1 行目、　が 2 列目を選べば、ゲーム G_1 がプレーされる。もし　が 2 行目、　が 1 列目を選べば、ゲーム G_2 がプレーされる。

最初に、G_1, G_2 を解析することによって、ゲーム G を解析することができる。

$$\begin{aligned} G_1 : \quad & \text{の最適は } (1/2,1/2) \\ & \text{の最適は } (2/3,1/3) \\ & G_1 \text{ の値 } \mathrm{Val}(G_1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 : \quad & \text{の最適は } (0,1) \\ & \text{の最適は } (0,1) \\ & G_1 \text{ の値 } \mathrm{Val}(G_2) = 3 \end{aligned}$$

もしゲーム G をプレーした後に G_1 をプレーして終了するなら、G_1 の値の利得、すなわち平均的に 1 を期待できる。もしゲームが G_2 をプレーして終了するなら、G_2 の値の平均利得、つまり 3 が期待できる。従って、ゲーム G は次の行列のゲームと同値であると考える事ができる。

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \text{の最適は } (2/5,3/5) \\ G : \quad & \text{の最適は } (4/5,1/5) \\ & G_1 \text{ の値 } \mathrm{Val}(G) = 17/5 \end{aligned}$$

ゲーム G を解くこの方法は、次のように要約される。もしゲーム G の行列の要素に他のゲームがある

のなら、G の解答は、G の行列の各ゲームの値に置き換えることによって得られた行列のゲームの解答である。

2.6.2 多段階ゲーム

もちろん、いくつかの行列ゲームの要素には、解答を得るための上記の方法を何度も繰り返さなくてはならないような場合の、それ自身に要素としての他のゲームがあるかもしれない。段階が有限であるならば、この方法は機能する。

Example 1. The Inspection Game(M.Dresher(1962))

は次の n 回目のピリオドの一つに、ある禁止された行動を取ろうとする。 は、次の n 回目のピリオドでただ一度、内密に を調査する事ができる。もし が調査している間に が行動すれば、 は に対して 1 単位負ける。もし が行動している時に が調査していなければ、利得はゼロである。

次の G_n はこのゲームを表している。境界条件が $G_1 = 1$ の次のような帰納的な等式を得る。

$$G_n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{act} & \text{wait} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{inspect} \\ \text{wait} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G_{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{for} \quad n = 2, 3, ...$$

帰納的に解いていくと、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Val}(G_1) =& 1 \\
\mathrm{Val}(G_2) =& \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1/2 \\
\mathrm{Val}(G_3) =& \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = 1/3 \\
&\vdots \\
\mathrm{Val}(G_n) =& \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(n-1) \end{pmatrix} = 1/n
\end{aligned}$$

帰納性から、$\mathrm{Val}(G_n) = \frac{1}{n-1}/(1 + \frac{1}{n-1}) = 1/n$ である。ゲーム G_n における両方のプレイヤーの最適戦略は、$(1/n, (n-1)/n)$ である。この種の他のゲームの多くは、Garnaev(2000) の本で見られる。

Example 2. Guess it!(Rufus Isaacs(1955), Martin Gardner(1978))

多段階ゲームのより複雑な例としては、Cluedo のゲームにやや関係している次のようなゲームを考えよ。$m + n + 1$ 枚のそれぞれ違ったカードのデッキから、m 枚をプレイヤー が引き、n 枚をプレイヤー が引き、残ったカードを target card と呼び、テーブルの中央に置く。プレイヤーは自分のカードはわかっているが、相手のカードはわからない。目標は、target card を正しく推測する事である。プレイヤーはプレイヤー から始めて交互に動かしていく。各動作では、プレイヤーは次のいずれかをする。

(1) target card を推測し、ゲームを終了させる。もし正しく推測できれば、そのプレイヤーの勝ちで、正しく推測できなければ、その相手の勝ちとなる。
(2) 相手のプレイヤーにあるカードを持っているかを尋ねる。尋ねられたプレイヤーがそのカードを持っていれば、カードを見せ、プレーから取り除かれる。

デッキを 11 枚のカードとし、各プレイヤーが 5 枚ずつ持っているとすると、明らかな方法で bluffing の必要性を説明するのによいゲームである。もしプレイヤーが自分の持っているカードについて相手に尋ねれば、その答えがどうなるかを知っている。そのようなプレーを bluff という。もしプレイヤーが自分の持っていないカードについて相手に尋ねれば、そのプレイヤーを honest という。もしプレイヤーが常に honest で、彼の尋ねているカードが target card であれば、相手のプレイヤーは尋ねられているカードが target card であると知る事ができ、勝てるであろう。従って、プレイヤーは時々 bluff をしなくてはならない。Bluffing は相手の target card への間違った推測を導き出す囮となることができる。

$G_{m,n}$ によって、プレイヤー　の動作とこのゲームを表す。ゲーム $G_{m,0}$ をプレーするのは簡単である。プレイヤー　は即座に勝つ事ができる。相手はカードを持っていないので、　は target card が何なのかを言う事ができる。同様に、ゲーム $G_{0,n}$ も簡単である。プレイヤー　が即座に推測できなければ、　は次の動作で勝つ事ができるであろう。しかしながら、　が正しく推測できる確率は、$1/(n+1)$ しかない。勝ち分を 1、負け分を 0 とすると、

$$\mathrm{Val}(G_{m,0}) = 1 \quad {}^{\forall}m \geq 0, \qquad \mathrm{Val}(G_{0,n}) = \frac{1}{n+1} \quad {}^{\forall}n \geq 0 \tag{2.1}$$

もしプレイヤー　がプレイヤー　の持っているカードを尋ねた場合、カードはプレーから取り除かれ、プレイヤー　の動作の番となり、　が $n-1$ 枚のカードを持っているのに対し、相手は m 枚のカードを持っていることになる。これはまさしくゲーム $G_{n-1,m}$ だが、プレイヤー　が動かす。このゲームを $\overline{G}_{n-1,m}$ として表す。プレイヤー　が勝てる確率は 1 からプレイヤー　が勝てる確率を引いたものなので、

$$\mathrm{Val}(\overline{G}_{n,m}) = 1 - \mathrm{Val}(G_{m,n}) \qquad {}^{\forall}m, {}^{\forall}n \tag{2.2}$$

プレイヤー　がプレイヤー　の持っていないカードを尋ねたとする。プレイヤー　はすぐにプレイヤー　がだましていないか (bluff を使っていないか) を判断しなければならない。　がプレイヤー　が honest であると判断すれば、プレイヤー　が尋ねたカードが target card であると推測し、それを宣言して、それが正しければ勝ち、間違っていれば負けるであろう。もしプレイヤー　がだましていると判断し、それが間違っていれば、プレイヤー　は次の番で勝てるだろう。もし正しければ、プレイヤー　の尋ねたカードは彼の手札から除かれ、次にプレーするゲームは $\overline{G}_{n,m-1}$ になる。

そのような考え方を使って、プレイヤー　の 3 つの純粋戦略 (honest,bluff,guess) とプレイヤー　の 2 つの純粋戦略 (カードを尋ねる ignor と、尋ねられたカードを推測する事による bluff を call) で 1 つの段階が構成される多段階ゲームとしてのゲームを書くことができる。ゲームの行列は、$m \geq 1, n \geq 1$ に対して

次のようになる。

$$G_{m,n} = \begin{array}{l|cc} & \text{ignore} & \text{call} \\ \hline \text{honest} & \frac{n}{n+1}\overline{G}_{n-1,m} + \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1}\overline{G}_{n-1,m} \\ \text{bluff} & G_{n,m-1} & 1 \\ \text{guess} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} \end{array} \tag{2.3}$$

これは、もしプレイヤー　が正直に尋ねれば、各 $1/(n+1)$ の確率の $n+1$ 枚のわからないカードの中から選び、または　がだましているとすれば、各 $1/m$ の確率の m 枚のカードの中から選ぶとみなす。これは、2.3.6 の不変性の考察からなされるものである。

例として、次のように行列の左上の値が見つけられる。確率 $n/(n+1)$ で、プレイヤー　はプレイヤー　の手札を尋ね、ゲームを $\overline{G}_{n-1,m}$ にする。確率 $1/(n+1)$ で、プレイヤー　は target card を尋ね、プレイヤー　はそれを知らず、プレイヤー　が次の番で勝つ、すなわち 1 を得る。右上の値も、もし尋ねられたカードが target card なら、プレイヤー　がそれを推測し、プレイヤー　が 0 を得るのを除いて同様である。

もし $m \geq 1, n \geq 1$ なら、勝つ確率が小さすぎるので、プレイヤー　は推測すべきではないと思うのは道理的である。実際、もし $m \geq 1, n \geq 1$ なら、推測を支配するプレイヤー　の戦術があるので、行列の最後の行は除かれる。この戦略は、最初の動作で $m+n+1$ 枚のカードのどれかを等しく確率 $1/(m+n+1)$ で尋ね (すなわち確率 $(n+1)/(m+n+1)$ で 1 行目を選び、確率 $m/(m+n+1)$ で 2 行目を選ぶ)、もしプレイヤー　が自身の番で推測しないならば、次の番で推測する、ということである。プレイヤー　は、プレイヤー　が次の番で推測してくるかどうかで、少なくとも確率 $1/(n+1)$ で勝つことを示さなくてはならない。もしプレイヤー　が推測すれば、　の勝つ確率は尋ねられたカードが自分のものかであるかどうかで、まさしく $1/(m+1)$ である。よってプレイヤー　が勝つ確率は、$m/(m+1) \geq 1/2 \geq 1/(n+1)$ である。もしプレイヤー　が推測しなければ、プレイヤー　の次の番に、プレイヤー　は多くとも n 枚のカードを持っている ($n-1$ 枚かもしれない) ので、再びプレイヤー　の勝つ確率は少なくとも $1/(n+1)$ である。

(2.3) の 3 行目を除いて、ゲームを変形すると、$m \geq 1, n \geq 1$ に対して、

$$G_{m,n} = \begin{array}{l|cc} & \text{ignore} & \text{call} \\ \hline \text{honest} & \frac{n}{n+1}\overline{G}_{n-1,m} + \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1}\overline{G}_{n-1,m} \\ \text{bluff} & G_{n,m-1} & 1 \end{array} \tag{2.4}$$

これらの 2×2 ゲームは、境界条件 (2.1) を使って帰納的に簡単に解ける。$G_{n,m-1}$ と $G_{n-1,m}$ の値を求め、(2.2) を使った後に、$G_{m,n}$ の値と最適戦略を求められる。例えば、ゲーム $G_{1,1}$ を行列 $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に変形する。ゲームの値は 1/2 で、プレイヤー　の最適戦略は (2/3,1/3)(すなわち確率 1/3 で bluff をする) で、プレイヤー　の最適戦略は (1/2,1/2) である。

また、$^{\forall}m \geq 1, ^{\forall}n \geq 1$ に対して、これらのゲームが saddle point を持たないという事も示せる。実際、さらに $\mathrm{Val}(G_{m,n})$ が m において減少せず、n において増加しないという事も示せる (より多くのカードを手札として持つとよりよい)。$V_{m,n} = \mathrm{Val}(G_{m,n})$ とする。$\mathrm{Val}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc)/(a + d - b - c)$ を使って、

いくつかの代数の後に、$m \geq 1, n \geq 1$ に対して次を得る。

$$
\begin{aligned}
V_{m,n} &= \mathrm{Val}\begin{pmatrix} \frac{n}{n+1}(1 - V_{n-1,m}) + \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1}(1 - V_{n-1,m}) \\ (1 - V_{n,m-1}) & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1 + n(1 - V_{n-1,m})V_{n,m-1}}{1 + (n+1)V_{n,m-1}}
\end{aligned}
$$

これが、値を帰納的に計算する単純で直接的な方法である。

次の表は、m と n が小さい値の時のプレイヤーの最適戦略を計算した近似値である。

$m\backslash n$	1	2	3	4	5	6
	0.5000	0.5000	0.4000	0.3750	0.3333	0.3125
1	0.3333	0.2500	0.2000	0.1667	0.1429	0.1250
	0.5000	0.5000	0.4000	0.3750	0.3333	0.3125
	0.6667	0.5556	0.5111	0.4500	0.4225	0.3871
2	0.5000	0.3333	0.2667	0.2143	0.1818	0.1563
	0.3333	0.3333	0.2889	0.2500	0.2301	0.2055
	0.6875	0.6250	0.5476	0.5126	0.4667	0.4411
3	0.5000	0.3750	0.2857	0.2361	0.1967	0.1701
	0.3750	0.3250	0.2762	0.2466	0.2167	0.1984
	0.7333	0.6469	0.5966	0.5431	0.5121	0.4749
4	0.5556	0.3947	0.3134	0.2511	0.2122	0.1806
	0.3333	0.3092	0.2634	0.2342	0.2118	0.1899
	0.7500	0.6809	0.6189	0.5810	0.5389	0.5112
5	0.5714	0.4255	0.3278	0.2691	0.2229	0.1917
	0.3333	0.2908	0.2566	0.2284	0.2062	0.1885
	0.7714	0.6972	0.6482	0.6024	0.5704	0.5353
6	0.6000	0.4410	0.3488	0.2808	0.2362	0.2003
	0.3143	0.2834	0.2461	0.2236	0.2028	0.1854

$1 \leq n, m \leq 6$ に対しての値と最適戦略である。各マスの上の数字は値を、中央の数字はプレイヤー　が bluff をすべき確率、下の数字はプレイヤー　が尋ねられたカードを call すべき確率である。

2.6.3 帰納的ゲーム ϵ-最適戦略

要素としてのゲームのいくつかのゲームにおいて、再び元のゲームが出て来るという事が起こるかもしれない。そのようなゲームを**帰納的**であるという。単純な例は、次のようなものである。

$$
G = \begin{pmatrix} G & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

これは無限ゲームである。もしプレイヤーが 1 行目と 1 列目でプレーすれば、ゲームは永久にプレーされる。そのような可能性がどんなになさそうであっても、数学的定義はもし G が永久にプレーされた時の利得が何なのかが言えるまで完全ではない。もしプレイヤーらが 1 行目と 1 列目の純粋戦略を永久に続けたら、　は　に Q の単位を支払うとし、次のように書く。

$$G = \begin{pmatrix} G & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q$$

無限ゲームにおける値の存在と最適戦略の存在は自然に確かとはいえない。しかしながら、G の値は、数字 Q がどんな値であっても、存在し、1 に等しい事を確かめるのは簡単である。解析は次のようになされる。

　は 2 列目を選ぶことによって、負け分を多くとも 1 に制限する事ができる。もし $Q \geq 1$ なら、　は 1 行目で永久にプレーする事によって、少なくとも 1 勝つ事が保証される。しかしもし $Q < 1$ なら、そうはならない。少なくとも 1 を保証する　の最適戦略は、この場合では存在しない。しかしながら、$\epsilon > 0$ に対して、少なくとも $1 - \epsilon$ の平均利得を保証する戦略が存在する。プレイヤーに平均利得 ϵ の値を保証するこのような戦略を、**ϵ-最適**という。この場合では、絶えず混合戦略 $(1 - \epsilon, \epsilon)$(確率 $1-\epsilon$ で 1 行目、確率 ϵ で 2 行目) を使う戦略が　の ϵ-最適である。　によるこのような戦略の使用は、　が結局は 2 行目を選ぶので、利得が Q にはならず 0 か 1 になるに違いないという事を保証している。一番良いのはプレイヤー　がこの戦略に対してすぐに 2 列目を選ぶ事であり、願わくば　が 2 行目を選ぶ事である。期待利得は、$1 \cdot (1 - \epsilon) + 0 \cdot \epsilon = 1 - \epsilon$ になるであろう。要約では、上のゲーム G に対して、値は 1 であり、　は最適戦略 2 列目を持ち、もし $Q \geq 1$ なら永久に 1 行目を選ぶ事が　の最適であり、もし $Q < 1$ なら最適戦略はないが、戦略 $(1 - \epsilon, \epsilon)$ が　の ϵ -最適である。

次のようなゲームを考えよ。

$$G_0 = \begin{pmatrix} G_0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q$$

このゲームに対して、値は Q に依存している。もし $Q \geq 1$ なら、1 行目を選び続ける事が　の最適であり、もし $1 \leq Q \leq 5$ なら値は Q であり、もし $Q \geq 5$ なら値は 5 である。$Q < 1$ に対しては、値は 1 である。しかしながら、上のゲーム G と比べて、　は G_0 に対する最適戦略を持ち (例えば (1/2,1/2) を永久に続ける事)、　の最適戦略は $Q < 5$ なら 1 列目を永久に選ぶ事で、$Q > 5$ なら 2 列目、$Q = 5$ なら全てである。

要素としてのゲームがあるゲームに対してすべき事に対する推論において、G_0 を行列における v に置き換え、v に対して次の等式を解く事によって、そのようなゲームの値 v を求めようとしてみる。

$$v = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} v & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この等式に対しては多くの解答がある。この等式に対する全ての解答の集合は、$1 \leq v \leq 5$ の区間における v の集合である (確かめてみよ)。

これは、行列のゲームを v で置き換えることによって得られるゲームの値を v について等式化する事によって与えられた式は、常にゲームの値と同値な解答があるという、一般的な結果を説明している。より

多くの解答があるかもしれないが、ゲームの値は Q に最も近い解答である。これらの点のより多くの情報に対して、Everett(1957) や、Milnor と Shapley(1957) の論文を調べてみよ。

Example 3

$$G = \begin{pmatrix} G & 1 & 0 \\ 1 & 0 & G \\ 0 & G & 1 \end{pmatrix}, Q$$

とし、もし G の値が v なら、

$$v = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} v & 1 & 0 \\ 1 & 0 & v \\ 0 & v & 1 \end{pmatrix} = \frac{1+v}{3}$$

この等式はただ一つの解答 $v = 1/2$ を持つ。これは ${}^{\forall}Q$ に対して値がなくてはならない。戦略 $(1/3, 1/3, 1/3)$ を永久に選ぶ事は、両方のプレイヤーにとっての最適である。

Example 4

Dare の基本的なゲームは次の通りである。プレイヤー　(リーダー) とプレイヤー　(チャレンジャー) が同時に、pass と dare をする。もし両方が pass をしたら、利得は 0 である (ゲームは終了する)。もし　が pass をし、　が dare をしたら、　が 1 勝つ。もし　が dare、　が pass をしたら、　が 3 勝つ。もし両方とも dare をしたら、プレイヤーの役割を入れ替えて (リーダーはチャレンジャーになり、チャレンジャーはリーダーになる)、基本的なゲームをプレーする。もしプレイヤーらが dare を永久にし続ければ、利得は 0 とする。すると、次のように書ける。

$$G = \begin{array}{c} \\ \text{pass} \\ \text{dare} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{pass} & \text{dare} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -G^T \end{pmatrix} \end{array}$$

$-G^T$ はプレイヤーの役割を入れ替えたゲームを表す (その行列は行列 G の負の転置である)。$-G^T$ の値は、G の値の負である。

もし v が G の値を表すなら、1 行目により $v \geq 0$ である。従って、$-G^T$ を $-v$ で置き換えた G の行列は、saddle point を持たず、次を得る。

$$v = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -v \end{pmatrix} = \frac{3}{4+v}$$

これは、2 次式 $v^2 + 4v - 3$ となる。ただ一つの非負の解答は、$v = \sqrt{7} - 2 = .64575\cdots$ である。　の最適戦略は $((5 - \sqrt{7})/3, (\sqrt{7} - 2)/3)$ で、　の最適戦略は $(3 - \sqrt{7}, \sqrt{7} - 2)$ である。

Example 5

次の 3 つの関係したゲームを考えよ。

$$G_1 = \begin{pmatrix} G_2 & 0 \\ 0 & G_3 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} G_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \begin{pmatrix} G_1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ゲームが永久にプレーされた場合の利得を Q とする。これらのゲームを解いてみよう。$v_1 = \mathrm{Val}(G_1), v_2 = \mathrm{Val}(G_2), v_3 = \mathrm{Val}(G_3)$ とする。プレイヤー　は (1/2,1/2) で永久にプレーする事によって、$v_1 > 0, v_2 > 0, v_3 > 0$ が保証される。加えて、$v_2 \leq 1, v_3 \leq 2$ で $v_1 < 1$ である。従って saddle point を持つゲームはなく、次のように書ける。

$$v_1 = \frac{v_2 v_3}{v_2 + v_3}, \qquad v_2 = \frac{1}{2 - v_1}, \qquad v_3 = \frac{4}{4 - v_1}$$

後の 2 つの式を最初の式に代入すると、次を得る。

$$\frac{v_1}{2 - v_1} + \frac{4v_1}{4 - v_1} = \frac{4}{(2 - v_1)(4 - v_1)}$$

$$5{v_1}^2 - 12v_1 + 4 = 0$$

$$(5v_1 - 2)(v_1 - 2) = 0$$

$0 < v_1 < 1$ なので、これにより $v_1 = 2/5$ となり、従って ${}^{\forall}Q$ に対して、

Game	value	の最適=　の最適
G_1	2/5	(16/25,9/25)
G_2	5/8	(5/8,3/8)
G_3	10/9	(5/9,4/9)

2.6.4　ゲームにおける確率的動作

プレイヤーの純粋戦略の選択によってだけではなく、偶然にもよってプレーされる次のゲームの選択を許す事によって、帰納的ゲームの考え方を一般化できる。$G_1, ..., G_n$ をゲームとし、$p_1, ..., p_n$ を合計が 1 になる確率とする。ゲーム G_i が確率 $p_i (i = 1, ..., n)$ で無作為に選ばれる次にプレーされるためのゲームという状況を表すために、$p_1 G_1 + ... + p_n G_n$ という表記を使う。よって、与えられた数 z に対し、1×1 行列 (z) は、　が　に z を支払うという簡潔なゲームを表す。例えば、公平なコインを投げて表が出れば G_1 がプレーされ、そうでなければ　が　に 3 支払うという状況を表すために、$\frac{1}{2} G_1 + \frac{1}{2}(3)$ を使う事ができる。

Example 6

関係した G_1 と G_2 を次のようであるとする。

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} G_2 + \frac{1}{2}(0) & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} G_1 + \frac{1}{3}(-2) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ゲームは結局は終わらなくてはならない (確率 1 で)。実際、プレイヤーはたとえ望んでいたとしても永久にプレーする事はできない。プレイヤーらが 1 行目と 1 列目を永久に選び続けたとしても、結局はゲームは利得 0 もしくは -2 で終わるであろう。従ってプレーが永久に続いた場合の利得を明確に述べる必要はない。解くために、$v_i = \mathrm{Val}(G_i)(i = 1, 2)$ とする。次に $0 \le v_1 \le 1, -1 \le v_2 \le 0$ なので、どちらのゲームにも saddle point はない。従って、

$$v_1 = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{6 - v_2}$$
$$v_2 = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}v_1 - \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{2(1 - v_1)}{5 - 2v_1}$$

従って、

$$v_1 = \frac{4}{6 + \frac{2(1-v_1)}{5-2v_1}} = \frac{2(5 - 2v_1)}{16 - 7v_1}$$

よって 2 次式 $7V_1{}^2 - 20v_1 + 10 = 0$ が導き出され、答えは $v_1 = (10 - \sqrt{30})/7 = .656\cdots$ である。v_2 を求めるために等式に代入して、$v_2 = -(2\sqrt{30} - 10)/5 = -.191\cdots$ である。これらの値から、2 つのゲームに対する最適戦略を簡単に求める事ができる。

Example 7

確率 2/3 で表が出るコインをトスする。両方のプレイヤーがコインが表か裏かを推測する。もし　が正しく　が間違っていれば、　はコインが表なら 1 勝ち、裏なら 4 勝ってゲームは終わる。もし　が間違っていて　が正しければ、利得はなく、ゲームは終わる。もし両方のプレイヤーが正しければ、ゲームは終わる。しかし両方のプレイヤーが間違っていれば、プレイヤーの役割を入れ替えてプレーを続ける。ゲームが終わらなければ、利得は Q である。

G によってこのゲームを表すと、

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}G + \frac{1}{3}(-G^T) & \frac{2}{3}(1) + \frac{1}{3}(0) \\ \frac{2}{3}(0) + \frac{1}{3}(4) & \frac{2}{3}(-G^T) + \frac{1}{3}G \end{pmatrix}$$

v をゲームの値とすると、

$$v = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}v & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}v \end{pmatrix}$$

$v \ge 2$ なら、右上の角に saddle があり、$v = 2/3$ である。この矛盾は、$v < 2$ で saddle がないことを示している。従って、

$$v = \frac{8 + v^2}{18} \quad \text{or} \quad v^2 - 18v + 8 = 0$$

2 未満のただ一つの解答があり、

$$v = 9 - \sqrt{73} = .456\cdots$$

これから　の最適戦略を計算すると、

$$\left(\frac{13 - \sqrt{73}}{6}, \frac{\sqrt{73} - 7}{6}\right) = (.743\cdots, .256\cdots)$$

の最適戦略は、

$$(\frac{11-\sqrt{73}}{6}, \frac{\sqrt{73}-5}{6}) = (.409\cdots, .591\cdots)$$

値と最適戦略は Q に依存しない。

2.6.5　確率的ゲーム

ゲームが終わるまで各段階で利得の可能性を加えられている前セクションのゲームの特徴があれば、そのゲームは**確率的ゲーム**という。これは多段階ゲームの理論上の扱いに対する一般性の適切なレベルであるように思われる。熱心な同年代の調査の領域である。例として、Filar と Vrieze(1997)、Maitra と Sudderth(1996) の本を見よ。確率的ゲームは、Shapley(1953) の素晴らしい論文で紹介され、Raghavan et al(1991) で再録され、より最近では Kuhn(1997) にも再録されている。このセクションでは、Shapley の主な結果を扱う。

確率的ゲーム G は、状態の有限集合 $\{1, 2, ..., N\}$ で、そのうちの一つが starting position として区別されて構成されている。$G^{(k)}$ で starting position が k である事を表す。各状態 k を結びつけたものは、行列ゲーム $A^{(k)} = (a^{ij}{}_{(k)})$ である。もし確率的ゲームが k の状態にあるのなら、プレイヤーは同時に $A^{(k)}$ の行と列、i, j を選ぶ。結果として、2 つの事柄が発生する。1 つ目は、プレイヤー　がプレイヤー　から $a_{ij}{}^{(k)}$ だけ勝つ事。2 つ目は、i, j, k に依存する確率によって、ゲームが止まるか他の状態に移る (同じ状態もありうる) という事。ゲームが止まる確率を $s_{ij}{}^{(k)}$ で表し、次の状態 l に移る確率を $P_{ij}{}^{(k)}(l)$ で表し、$^{\forall}i, j, k$ に対し、次を満たす。

$$s_{ij}{}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}{}^{(k)}(l) = 1 \tag{2.5}$$

利得は、ゲームが止まるまでゲームを通して累積していく。ゲームが最後には止まる事を確かめるために、全ての止まる確率は正であるという前提をする。s をこれらの確率の中の最小値とする。

$$s = \min_{i,j,k} s_{ij}{}^{(k)} > 0 \tag{2.6}$$

この前提の下で、確率は有限動作の中でゲームが終わるというものである。またこの前提により、M が利得の絶対値の最大値を表す ($M = \max_{i,j,k} |a_{ij}{}^{(k)}|$) とすると、どちらかのプレイヤーの合計期待利得が次によって制限されるので、どんなにゲームがプレーされても期待累積利得は有限になる。

$$M + (1-s)M + (1-s)^2 M + ... = M/s \tag{2.7}$$

プレイヤー　は合計累積利得を最大化したいと望み、プレイヤー　は最小化したいと望んでいる。このゲームを説明するために、前セクションの表記の変形を使う。

$$G_{(k)} = \left(a_{ij}{}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}{}^{(k)}(l) G^{(l)} \right) \tag{2.8}$$

この行列の各要素の確率が合計しても 1 より小さい事に注意せよ。ゲームを終わる確率 ${s_{ij}}^{(k)}$ が残っているためと理解できる。前セクションと比べて、利得はゲームを終わらせないことに気づくべきである。利得が出た後に、無作為にゲームが終わるかを決め、もしそうでないなら次にどこの状態でプレーするかを決める。

ゲームの長さを置き換える上限がないので、これは無限ゲームである。プレイヤーの戦略は全ての n に対し、ゲームが段階 n に入った時の行動の選び方を具体的に述べなくてはならない。一般的に、理論は値を保証しない。さらに、段階 n において何をするかの選択は、全ての前の段階で何が起こったかによるので、可能な戦略の空間は極度に複雑である。

そうにもかかわらず、確率的ゲームでは、値とプレイヤーらの戦略が全ての starting position において存在する。さらに、最適戦略はとても単純な形で存在する。プレイヤーに対しプレーされるゲーム G_k のみに依存し、段階 n や過去の歴史に依存しない選択の確率配分を規定する戦略を**固定戦略 (stationary strategies)** という。次の定理では、固定最適戦略が存在する事を述べている。

■Theorem 1(Shapley(1952))　各ゲーム $G^{(k)}$ は値 $v(k)$ を持つ。これらの値は、等式の集合のただ一つの解答である。

$$v(k) = \mathrm{Val}\left({a_{ij}}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} {P_{ij}}^{(k)}(l)v(l) \right) \qquad k = 1, ..., N \tag{2.9}$$

各プレイヤーは行列ゲームに対する状態 k において最適混合戦略を使う固定最適戦略をもつ。

$$A^{(k)}(\mathbf{v}) = \left({a_{ij}}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} {P_{ij}}^{(k)}(l)v(l) \right) \tag{2.10}$$

$\mathbf{v}$ は値のベクトル $\mathbf{v} = (v(1), ..., v(N))$ を表す。

等式 (2.9) では、以前のセクションと同じ原理である事がわかる。つまり、ゲームの値はゲームがそれらの値によって置き換えられた行列ゲーム (2.8) 値であるという事である。この定理の証明は Appendix 2 で見つけられる。

Example 8

とても単純な例として、次の 1 つの状態の確率的ゲーム G を考えよ。

$$G = \begin{pmatrix} 1 + (3/5)G & 3 + (1/5)G \\ 1 + (4/5)G & 2 + (2/5)G \end{pmatrix}$$

プレイヤー　の視点から、1 列目は 2 列目より即座の利得は良いが、2 列目は 1 列目よりも早くゲームが終わりそうであるので、将来の利得をより小さく限定すべきである。どの列を選ぶべきか。

全ての戦略が active である、つまりゲームが saddle point をもたないと仮定する。解き終わった時に仮

定が正しかったかどうかをチェックしなくてはならない。それから、

$$v = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 1+(3/5)v & 3+(1/5)v \\ 1+(4/5)v & 2+(2/5)v \end{pmatrix}$$
$$= \frac{(1+4/5v)(3+(1/5)v)-(1+(3/5)v)(2+(2/5)v)}{1+(4/5)v+3+(1/5)v-1-(3/5)v-2-(2/5)v} = 1+v-(2/25)v^2$$

これにより、

$$(2/25)v^2 = 1$$

この 2 次式を解く事で、2 つの解答 $v = \pm\sqrt{25/2} = \pm(5/2)\sqrt{2}$ を得る。値は明らかに正なので、+ の符号を使わなくてはならない。これは $v = (5/2)\sqrt{2} = 3.535$ である。この値を上の行列に置いてみると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1+(3/2)\sqrt{2} & 3+(1/2)\sqrt{2} \\ 1+2\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

この行列のプレイヤー　の最適戦略は $p = (\sqrt{2}-1, 2-\sqrt{2}) = (.414, .586)$ で、プレイヤー　の最適戦略は $q = (1-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = (.293, .707)$ である。これらは確率のベクトルであるので、最初の仮定は正しく、これらは最適戦略で、$v = (5/2)\sqrt{2}$ は確率的ゲームの値である。

2.6.6　解答を近似する

多くの状態がある一般的な確率的ゲームに対し、等式 (9) は連立の 1 次でない等式のかなり複雑な体系になっている。一般的にそのような体系を解く事は望めない。しかしながら、解答を近似する単純な反復の方法がある。これは定理 1 の Shapley の証明が基になっているので、**Shapley iteration** という。

最初に解答 $\mathbf{v}_0 = (v_0(1), ..., v_0(N))$ を推測する。いくつかの推測ができるだろう。最初の推測として、全てが 0 の $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} = (0, ..., 0)$ を使う。それから与えられた $\mathbf{v}_n$ に対し、次の等式によって帰納的に $\mathbf{v}_{n+1}$ を定義する。

$$v_{n+1}(k) = \mathrm{Val}\left(a_{ij}{}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}{}^{(k)}(l)v_n(l)\right) \qquad k = 1, ..., N \tag{2.11}$$

$\mathbf{v}_0$ で、$V_n(k)$ は簡単に理解できる説明がある。$v_n(k)$ は、もしゲームが段階 n に入ったら強制的な停止がある状態 k で始まる確率的ゲームの値である。特に、全ての k に対して $v_1(k) = \mathbf{Val}(A_k)$ である。

定理 1 の証明は、$v_n(k)$ が k で始まる確率的ゲームの本当の値 $v(k)$ に収束する事を示している。2 つの有益な事実に注意すべきである。1 つ目は、収束は指数の割合である、つまり少なくとも $(1-s)^n$ と同じくらい速く最大誤差が小さくなるという事である (Appendix 2 の系 1 を見よ)。2 つ目は、段階 $n+1$ における最大誤差は、多くとも段階 n から $n+1$ までの最大順列に $(1-s)/s$ を掛けたものである (Appendix 2 の系 2 を見よ)。

2 つの状態がある確率的ゲームの例を挙げよう。対応するゲーム $G^{(1)}, G^{(2)}$ は、次のように関連している。

$$G^{(1)} = \begin{pmatrix} 4+.3G^{(1)} & 0+.4G^{(2)} \\ 1+.4G^{(2)} & 3+.5G^{(1)} \end{pmatrix} \qquad G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0+.5G^{(1)} & -5 \\ -4 & 1+.5G^{(2)} \end{pmatrix}$$

最初の推測として $\mathbf{v}_0 = (0,0)$ を使い、次のようになるので $\mathbf{v}_1 = (2, -2)$ がわかる。

$$v_1(1) = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \qquad v_1(2) = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

次の反復により、

$$v_2(1) = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 4.6 & -.8 \\ .2 & 4 \end{pmatrix} = 2.0174 \qquad v_1(2) = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -2$$

続けると、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} v_3(1) = 2.0210 & v_3(2) = -1.9983 \\ v_4(1) = 2.0220 & v_4(2) = -1.9977 \\ v_5(1) = 2.0224 & v_5(2) = -1.9974 \\ v_6(1) = 2.0225 & v_6(2) = -1.9974 \end{array}$$

最小の止まる確率は .5 なので、収束の割合は少なくとも $(.5)^n$ であり、$\mathbf{v}_6$ の最大誤差は多くとも.0002 である。

最適戦略は $\mathbf{v}_6$ を使って簡単に求められる。ゲーム $G^{(1)}$ に対して、　の最適戦略 $p^{(1)} = (.4134, .5866)$ で、プレイヤー　の $q^{(2)} = (.4995, .5005)$ である。

2.6.7　Exercises

1. 次のゲームの体系を解け。

$$G = \begin{pmatrix} 0 & G_1 \\ G_2 & G_3 \end{pmatrix} \quad G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

まず、G_1, G_2, G_3 のゲームの値 v_1, v_2, v_3 をそれぞれ求めると、G_1 は saddle point を持ち、3 なので $v_1 = 3$。G_2, G_3 は saddle point を持たないので、

$$v_2 = \frac{0-30}{0-6+1-5} = 3 \qquad v_3 = \frac{0-4}{0+2+0+2} = -1$$

よって次のゲーム G を解けばよい。

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

G は saddle point を持たないので、値 v とプレイヤー　の最適戦略 p とプレイヤー　の最適戦略 q はそれぞれ、

$$v = 10/7 \qquad p = (4/7, 3/7) \qquad q = (4/7, 3/7)$$

2. **The Inspection Game**

$G_{m,n}$ を　が n 回のピリオドの中で m 回の調査ができる inspection game であるとする (従って、$1 \le n \le m$ に対して $\mathrm{Val}(G_{m,n}) = 1$ で、$n \ge 1$ に対しては $\mathrm{Val}(G_{0,n}) = 1$)。ゲームの反復の構成を求

め、解け。

$1 \le m \le n$ の時、次の式を得る。

$$G_{m,n} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{act} & \text{wait} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{inspect} \\ \text{wait} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & G_{m-1,n-1} \\ 0 & G_{m,n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

明らかに $1 \le G_{m,n-1} < G_{m-1,n-1}$ なので、この行列は saddle point を持たない。従って、$V_{m,n} = \mathrm{Val}(G_{m,n})$ とすると、

$$V_{m,n} = \frac{V_{m,n-1}}{1 - V_{m-1,n-1} + V_{m,n-1}}$$

3. **A Game of Endurance**

　は各段階で 1 か 2 を減らす事によって n から 0 までカウントダウンしていく。　は各段階で　が 1 か 2 のどちらだけ減らそうとするかを推測しなくてはならない。もし　がどの段階でも正しく推測できなければ、ゲームは終わり、利得はない。そうではなく、　が各段階で正しく推測できれば、　は　から 1 を得る。G_n がこのゲームを表すとし、最初の条件として $G_0 = (1), G_1 = (1)$ を使う。ゲームの帰納的構造を求め、解け (解答では、フィボナッチ数列を表す F_n の表記を使っても良い)。

このゲームの利得行列は、次のように書ける。

$$G_n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 + G_{n-1} & G_{n-2} \\ G_{n-1} & 1 + G_{n-2} \end{pmatrix} \end{array}$$

帰納的に解いていくと、

$$\begin{aligned} \mathrm{Val}(G_0) &= 1 \\ \mathrm{Val}(G_1) &= 1 \\ \mathrm{Val}(G_2) &= \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3/2 \\ \mathrm{Val}(G_3) &= \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 5/2 & 1 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix} = 7/4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

4. 次のゲームの数列 $G_0, G_1, ...,$ を解け。

$$G_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & G_1 \end{pmatrix}, ..., G_n = \begin{pmatrix} n+3 & n+2 \\ n+1 & G_{n+1} \end{pmatrix}, ...$$

プレーが永久に続いた場合の利得を 0 と考えよ。

5. (a) ゲーム guess it!の $G_{1,n}(m = 1, {}^{\forall} n)$ において、プレイヤー　の最適戦略が確率 $1/(n+2)$ で bluff をする事かどうかを示せ。

式 (2.4) を $G_{1,n}$ の式に書き換えると、

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{ignore} & \text{call} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{honest} \\ \text{bluff} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1}\overline{G}_{n-1,1} + \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1}\overline{G}_{n-1,1} \\ \overline{G}_{n,0} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b)$G_{1,n}$ におけるプレイヤー　の最適戦略が確率 $V_{1,n}(G_{1,n}$ の値) で尋ねられたカードを call する事である事を示せ。

6. **帰納的ゲーム**

(a) ゲーム $G = \begin{pmatrix} G & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q$ を解け。

プレイヤー　が 2 行目を選ぶ事で少なくとも利得 0 を得られるので、$Q \geq 0$ である。$Q > 2$ なら、値は 2 で、プレイヤー　の最適は 1 行目、プレイヤー　の最適は 2 列目である。$0 \leq Q \leq 2$ なら、値は Q なので、次のように書く事ができる。

$$v = \begin{pmatrix} v & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{v}{v-1}$$

これを解くと、$v = 0, 2$ なので、プレイヤー　の最適はどちらも 1 行目、プレイヤー　の最適はどちらも 1 列目である。

(b) ゲーム $G = \begin{pmatrix} G & 1 & 1 \\ 1 & 0 & G \\ 1 & G & 0 \end{pmatrix}, Q$ を解け。

もし G の値が v なら、

$$v = \text{Val}\begin{pmatrix} v & 1 & 1 \\ 1 & 0 & v \\ 1 & v & 0 \end{pmatrix}$$

7. 次の 3 つの関連したゲームを考えよ。

$$G_1 = \begin{pmatrix} G_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} G_3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} G_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ゲームが永久に続いた場合の利得を Q とし、解け。

$v_1 = \text{Val}(G_1), v_2 = \text{Val}(G_2), v_3 = \text{Val}(G_3)$ とする。プレイヤー　は (1/2,1/2) で永久にプレーする事によって、$v_1 > 0, v_2 > 0, v_3 > 0$ が保証される。よって、次のように書ける。

$$v_1 = \frac{-1}{v_2 - 2}, \qquad v_2 = \frac{2v_3}{v_3 + 2}, \qquad v_3 = \frac{-1}{v_1 - 2}$$

これを解くと、

$$v_1 = \frac{-5+3\sqrt{5}}{4}, \qquad v_2 = \frac{465+93\sqrt{5}}{1395}? \qquad v_3 = \frac{13+3\sqrt{5}}{31}$$

8. 次の 3 つの関連したゲームを考えよ。

$$G_1 = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 \\ G_2 & G_3 & G_1 \\ G_3 & G_1 & G_2 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} G_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ゲームが永久に続いた場合の利得を Q とし、解け。

9. 試合の中での 1 点である。試合でサーブの間に最後のポイントを得たプレイヤーが、この試合を勝つ。サーバーには 2 つの戦略 high、low がある。レシーバーには 2 つの戦略 near,far がある。サーバーがポイントを得る確率は、次の表によって与えられている。

	near	far
high	.8	.5
low	.6	.7

もしサーバーがポイントを逃せば、プレイヤーの役割を交代し、与えられる純粋戦略に対する勝つ確率は、新しいサーバーに対しても同じである。サーバーとレシーバーの最適戦略を求め、サーバーが試合に勝つ確率を求めよ。
このゲームは確率的ゲームとして次のように表せる。

$$G = \begin{array}{c} \\ \text{high} \\ \text{low} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{near} & \qquad\qquad \text{far} \end{array} \\ \begin{pmatrix} .8+.2(-G^\top) & .5+.5(-G^\top) \\ .6+.4(-G^\top) & .7+.3(-G^\top) \end{pmatrix} \end{array}$$

ゲームの値を v とすると、

$$v = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} .8-.2v & .5-.5v \\ .6-.4v & .7-.3v \end{pmatrix}$$

ゲームが saddle point を持たないと仮定し、これを解くと、$v = 14/27$。この時、プレイヤー　の最適戦略は $p = (1/4, 3/4)$ で、プレイヤー　の最適戦略は $q = (1/2, 1/2)$ である。これらは確率のベクトルであるので、最初の仮定は正しく、v は確率的ゲームの値である。

10. プレイヤー　は確率 p で表が出るコインをトスする。各 $k = 1, 2, ...,$ に対して連続で k 枚の表をトスしたら　はやめても良く、　に同じ数の表を出すようにトスさせる。それから　はコインをトスし、連続で k の表をトスすれば勝ちである。もし　が　が挑戦する前に裏をトスしたら、ゲームはプレイヤーの役割を入れ替えて繰り返される。もし両方のプレイヤーが挑戦さえできなかったら、ゲームは引き分けである。
(a)$p = 1/2$ の時のゲームを解け。

(b)$^\forall p$ に対し、プレイヤーの最適戦略は何か？　が勝つ確率の $p \to 1$ の極限を求めよ。

11. 次の確率的ゲームを解け。

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 1+(1/3)G \\ 0 & 1+(2/3)G \end{pmatrix}$$

ゲームの値を v とし、ゲームが saddle point を持たないと仮定して解くと、解の方程式が $v^2-4v+12=0$ となり、実数解を持たないので、矛盾。

12. 次の 2 つの状態の確率的ゲームを解け。

$$G^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2+(1/2)G^{(2)} \\ 0 & 4+(1/2)G^{(2)} \end{pmatrix} \qquad G^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2+(1/2)G^{(1)} & -4+(1/2)G^{(1)} \end{pmatrix}$$

(a) 値 $v(1), v(2)$ に対して等式 (9) を解け。

(b)$\mathbf{v}_2$ を求めるために、最初の推測 $\mathbf{v}_0=(0,0)$ で始める Shapley iteration を行い、(a) で求めた正しい値と比較してみよ。

2.7　Continuous Poker Models

可算数より多くの純粋戦略があるゲームの例として、プレイヤーの可能な持ち札の集合が区間 [0,1] である幾つかのポーカーのモデルを見る。これはゲームを解く中で無差別の原理の使用の明らかな例であることを表している。

独立な一様の持ち札の 2 人ゼロ和ポーカーのモデルの学習は、Borel と von Neumann までさかのぼる。Borel は彼の 1938 年の本”Le jeude poker”の 5 章でポーカーの形を議論した。Von Neumann はゲーム理論において影響力が強い本、Theory of Games and Economic Behavior by von Neumann and Morgenstern(1944) でポーカーの類似した形の解析を発表した。本の 19 章は、不連続または連続の持ち札両方で、同時のベットと交代のベットの両方のポーカーの確かな数学的モデルに充てられている。

プレイヤー　は、x が区間 [0,1] において一様分布を持つことを意味する事によって、完全に無作為に $x \in [0,1]$ の手札を配られる。つまり、x がどんな [0,1] の部分区間の中でも、部分区間の長さである。同様に、プレイヤー　は [0,1] において完全無作為に手札 y を受け取る。プレーを通して、両方のプレイヤーはそれぞれの手札の価値を知るが、相手のものはわからない。

x と y は独立確率変数であるとする。つまり、自分の手札の価値を学んでも、それは相手の手札についての情報を得る事はできない (この前提はプレイヤーが有限のデッキから独特の手札を配られたら満たさないため、この前提はやや不十分になるだろう。Sakaguchi と Sakai(1981) は手札の負の非独立の場合について幾つかの研究をしていたが (つまり、片方のプレイヤーが高い札を持っていると、相手は低い札になりやすい)、正の非独立の場合は (共に高い札がでやすい時) 完全に open である)。

プレイヤーが行動をする中で、ベットを何回かする。手札が配られた後、プレイヤーがする全ての行動は宣言されなくてはならない。従って、ゲームの最初に手札が配られる事以外は、完全情報のゲームになるという事だ。プレイヤーに情報が隠されで与えられる最初の無作為の動作の後、ゲームが隠された情報が少しもないこの種のゲームを、ほぼ完全情報ゲームという。このようなゲームを解くテクニックは、Ponssard(1975) によって研究され、Sorin と Ponssard(1980) によってポーカーのモデルに応用された。

ベッティング木というものを使って、ほぼ完全情報ゲームの行動部分を学ぶ事は有益である。これは、最初の手札の分配で起こる情報集合を無視する Kuhn 木とは異なる。下の例はこの考えを説明している。

2.7.1　La Relance

Borel の本では、彼は”la relance”というポーカーのモデルを議論している。区間 [0,1] において独立一様な手札を受け取り、ポットに 1 単位をアンティーする。プレイヤー　は最初にフォールドしてプレイヤー　にポットを与えるか、定められた量 $\beta > 0$ をベットしてポットに加えるかのどちらかをする。もしプレイヤー　がベットすれば、プレイヤー　はフォールドしてプレイヤー　にポットを与えるか、コールしてポットに β を加えるかのどちらかをする。もしプレイヤー　がプレイヤー　のベットをコールすれば、手札を比べあい、高い手札を持つプレイヤーが全てのポットを得る。すなわち、もし $x > y$ であれば

プレイヤー　が勝ち、$x < y$ であればプレイヤー　が勝つ。$x = y$ が起こる確率は 0 なので、この場合については考える必要はない。

ベッティング木は、

この図では、正負の符号は手札を比べ、高い手札が $\beta + 1$ だけ勝つことを表している。

解析では、Borel はプレイヤー　のただ一つの最適戦略がある事を見つけた。プレイヤー　の最適戦略は、区間 [0,1] のある数 b に対する形のもので、$y < b$ ならフォールドし、$y > b$ ならコールするというものである。b の最適値は、無差別の原理を使って求められる。プレイヤー　は　がある手札 $x < b$ を持っている時にベットする事とフォールドする事の違いについて無関心にするために、b を選ぶ。もし　がそのような x でベットすれば、　が $y < b$ であれば　は (ポットの)2 を得るし、　が $y > b$ であれば β 負ける。この場合の　の期待利得は、$2b - \beta(1 - b)$ である。一方、　がフォールドすれば彼は何も得られない。(これは定和ゲームとして見る。サンクコストとしてポットに既に置いたお金を見るので、プレイヤーの勝ち分の合計は、結果が何であろうとも 2 である。この事は大して重要ではないが、大抵のポーカーのプレイヤーがポットを見る方法である。) もし次のようであれば、　はベットとフォールドの違いに関心を持たないであろう。

$$2b - \beta(1 - b) = 0$$

これから次を得る。

$$b = \beta/(2 + \beta) \tag{2.1}$$

プレイヤー　の最適戦略は、ただ一つではない。しかし Borel はそれらの一つを求めた。これらの戦略は、もし $x > b$ ならベット、もし $x < b$ ならフォールドする合計確率が b^2 であるものなら何をしても良い、という形である。例えば、　は最悪な手札、つまり $x < b^2$ でフォールドし、または b より小さい中で一番良い手札 $b - b^2 < x < b$ でフォールドし、$0 <^{\forall} x < b$ で単純に表が b の確率で出るコインをトスし、コインが表であればフォールドする。

ゲームの値は簡単に計算できる。プレイヤー　はどんな $x < b^2$ でもフォールドし、そうでなければベットするとし、プレイヤー　は $y < b$ でフォールドするとする。単位の平方における利得は、次の図で与えられる値である。右上の角の値は約分し、残りは簡単に計算する。値は $v(\beta) = -(\beta + 1)(1 - b)(b - b^2) + (1 - b^2)b - b^2$ である。

$$v(\beta) = -b^2 = -\frac{\beta^2}{(2 + \beta)^2} \tag{2.2}$$

従って、ゲームはプレイヤー　に有利である。

　これを要約すると、

■Theorem 7.1　la relance の値は (2.2) で与えられる。プレイヤー　の最適戦略は (2.1) で与えられた b に対して $x > b - b^2$ ならベットし、そうでなければフォールドする事である。プレイヤー　の最適戦略は $y > b$ ならコールし、そうでなければフォールドすることである。

　例として、$\beta = 2$ を考える (ベットのサイズがポットのサイズに制限されている時、pot-limit poker という)。$b = 1/2$ の時、プレイヤー　の最適戦略は、$x > 1/4$ ならベットし、そうでなければフォールドする事である。プレイヤー　の最適戦略は、$y > 1/2$ ならコールする事である。ゲームはプレーされる各回で期待利得が 1/4 あるプレイヤー　に有利である。

　もし　が $x < b$ の時にベットすれば、もし　が最適戦略を使い、コールすれば負ける事が　にはわかっている。そのようなベットを bluff という。la relance では、　が確率 b^2 で bluff する必要がある。b 以下の手札で bluff を選択する事は、ゲームの値に関心をおく限りはあまり重要でない。しかしながら、b 以下の手札、すなわち b^2 から b までの手札で bluff(ベット) する事は 2 番目のアドバンテージである。そのような戦略は、他のプレイヤーがミスをする最大のアドバンテージとなる。

　プレイヤーの特定の戦略 σ は、もし σ に対して使う時の相手のゲームの値以上の期待利得を得られる最適戦略が存在するならば、mistake という。la relance では、ある $y < b$ でコールする事、またはある $y > b$ でフォールドする事が mistake である。もし　がある $y < b$ でコールすれば、　はもし彼の最大の手札が b 以下であるという bluff をするだけで、mistake からより多くの利益を得られる。

　もし相手の他の戦略に対してより状況が悪くなる以外の相手のある戦略に対して状況をより良くするプレイヤーの他の戦略がないプレイヤーの戦略を許容的という。$x > b^2$ に限りベットするというルールは、プレイヤー　のただ一つの許容的最適戦略である。

2.7.2　von Neumann のモデル

von Neumann のモデルは、Borel のモデルとは少しであるがとても重要な面において異なっている。もしプレイヤー　がベットしなければ、　はポットを失う必要がない。かわりにすぐに手札を比べ、高い手札の方がポットを得る。これをフォールドではなく、プレイヤー　がチェックするという。これは実際のポーカーにより近く、ポーカーにおける bluffing の考え方の明確な例である。von Neumann のベッティング木は、右の枝の -1 の利得が ± 1 に変わっている以外は全て同じである。

今回プレイヤー　はただ一つの最適戦略を持っている。それは、ある数 $a, b(a < b)$ に対して、もし $x < a$ または $x > b$ ならベットし、そうでなければチェックするという形である。プレイヤー　には多くの最適戦略があるが (von Neumann はそれらの全てを求めた)、ただ一つの許容的戦略があり、ある数 c に対して $y > c$ ならコールするという単純な形である事を示す事ができる。$0 < a < c < b < 1$ である事がわかる。

領域 $x < a$ はプレイヤー　が bluff をする領域である。プレイヤー　が最悪の手札で bluff をしなくてはならず、そこそこの手札ではすべきではないという事は注目すべき事である。違う事をするのはプレイヤー　の mistake である。ここで多少反直感的な特徴の大雑把な説明をする。c 以下の手札は bluff かチェックするとして使われる。bluffing にとって、手札が使われるのは大した問題ではなく、コールされるならそれらを失う覚悟である。しかしチェックする場合はかなり問題があり、より良い手札でチェックした方が良い。

最適値 a, b, c を求めるために、無差別の原理を応用する。これによって、3 つの未知数の 3 つの方等式ができ、これを無差別方程式という (定差方程式と混同してはいけない)。最初に、プレイヤー　は手札 $y = c$ でのフォールドとコールの違いに関して無関心であるべきである。再び、既にポットにある勝ち分をボーナスとして考える定和ゲームとしてのゲームのギャンブラーの視点を使う。もし　がフォールドすれば、0 を得る。もし　が $y = c$ でコールすれば、$x < a$ なら $(\beta + 2)$ 勝ち、$x > b$ なら β 負ける。　の期

待利得を等式化する事により、1 つ目の無差別方程式は次のようになる。

$$(\beta + 2)a - \beta(1 - b) = 0 \tag{2.3}$$

次に、プレイヤー　は手札 $x = a$ でのチェックとベットの違いに関して無関心であるべきである。もし　が $x = a$ でチェックしたら、$y < a$ なら 2 勝ち、そうでなければ何も得られないので、期待利得は $2a$ である。もし　がベットすれば、$y < c$ なら 2 勝ち、$y > c$ なら β 負けるので、期待利得は $2c - \beta(1 - c)$ である。これらを等式化することにより、2 つ目の無差別方程式は次のようになる。

$$2c - \beta(1 - c) = 2a \tag{2.4}$$

最後に、プレイヤー　は手札 $x = b$ でのチェックとベットの違いに関して無関心であるべきである。もし　がチェックしたら、$y < b$ なら 2 勝つ。もし　がベットすれば、$y < c$ なら 2 勝ち、$c < y < b$ なら $\beta + 2$ 勝ち、$y > b$ なら β 負けるので、期待利得は $2c + (\beta + 2)(b - c) - \beta(1 - b)$ である。これにより、3 つ目の無差別方程式は次のようになる。

$$2c + (\beta + 2)(b - c) - \beta(1 - b) = 2b$$

これを変形して、

$$2b - c = 1 \tag{2.5}$$

最適値 a, b, c は、β について (2.3)(2.4)(2.5) を解く事によって求められる。解答は、

$$a = \frac{\beta}{(\beta + 1)(\beta + 4)} \quad b = \frac{\beta^2 + 4\beta + 2}{(\beta + 1)(\beta + 4)} \quad c = \frac{\beta(\beta + 3)}{(\beta + 1)(\beta + 4)} \tag{2.6}$$

値は、

$$v(\beta) = a = \beta/((\beta + 1)(\beta + 4)) \tag{2.7}$$

このゲームはプレイヤー　に有利である。これを要約すると、

■Theorem 7.2　von Neumann のポーカーの値は、(2.7) によって与えられる。プレイヤー　の最適戦略は、(2.6) で与えられた a, b に対し、$a < x < b$ ならチェックし、そうでなければベットする事である。プレイヤー　の最適戦略は、(2.6) で与えられた c に対し、$y > c$ ならコールし、そうでなければフォールドする事である。

$\beta = 2$ である hot-limit poker に対し、$a = 1/9, b = 7/9, c = 5/9$ で、値は $v(2) = 1/9$ である。

プレイヤー　の最適なベットのサイズがあることに気づくと興味深い。$v(\beta)$ の導関数が 0 の時の方程式を β について解く事によって求められる。$\beta = 2$ である。言い換えれば、最適なベットのサイズは、ポットのサイズであり、まさしく pot-limit poker なのである。

2.7.3　他のモデル

数学的説明で扱われる次の一様なポーカーのモデルのほとんどは、la relance の拡張である。そのような拡張は、von Neumann モデルの拡張と同じようには興味深くないかもしれないが、多少はより単純である。Bellman と Blackwell(1949) は、la relance をプレイヤー　が 2 つのそれぞれ異なるサイズのベットを選べるように拡張した。Bellman と Blackwell(1950) では、la relance をプレイヤー　がプレイヤー　によるベットをレイズできるようにし、レイズのサイズはベットのサイズと同じであるように拡張した (Bellman(1952) を見よ)。これら 2 つの論文は、Karlin と Restrepo(1957) によって拡張され、(1949) モデルはプレイヤー　が差し支えのない有限数の中からベットのサイズを選べるようになり、(1950) モデルは有限数のレイズができるようになった。Goldman と Stone(1960a) では、Blackwell と Bellman の (1950) モデルをレイズのサイズがベットのサイズと異なってもよい様に拡張した。これらのモデルの全てとその他少々は、Karlin(1959) の Volume2 の Chapter9 に要約されている。非独立な手札の la relance の拡張は、Sakaguchi と Sakai(1981) によってなされ、さらに複雑な情報構造への拡張は Sakaguchi(1993) によってなされた。Karlin(1959)(Exercise 9.3) と Sakaguchi(1984) では、手札 x, y が一様に限らない任意の異なる連続分布を持つ事が許されている。

von Neumann モデルの 2 つの重要な拡張がある。1 つ目は、Newman(1959) によって、プレイヤー　が受け取った手札 x に依存して任意の非負数としてベットのサイズ $\beta(x)$ を選べるようになった。0 をベットすることは、チェックする事と同値である。プレイヤー　に情報を与えるため、プレイヤー　は慎重に手札に依存したベットのサイズを選ばなくてはならない。しかしながら、賢明な bluff の使用によって、プレイヤー　の最適戦略は任意の大きな量をベットする事である。Newmann の結論は次のように要約される。プレイヤー　の最適戦略は、$1/7 < x < 4/7$ ならチェックし、$x > 4/7$ に対して $x = 1 - (7/12)(\beta + 2)^{-2}$ なら β をベットし、$x < 1/7$ に対して $x = (7/36)(2 + 3\beta)(\beta + 2)^{-3}$ なら β をベットする事である。プレイヤー　の最適戦略は、$y > 1 - (12/7)(\beta + 2)^{-1}$ なら β のベットをコールする事である。値は 1/7 である。Cutler(1976) は、ベットが正の実数直線上における区間 [a,b] に制限される時の問題を解いた。Sakaguchi(1994) は、プレイヤー　がプレイヤー　のカードを知っている場合を扱った。

Cutler(1975) による 2 つ目の重要な拡張は、pot-limit のルールの下で無限数のレイズができるというものである。Cutler は 2 つの場合を扱った。1 つ目は、プレイヤー　が最初のラウンドで強制的にベットさせられた時である。それからプレイヤーらは、誰かがフォールドかコールをするまで、漠然とフォールド、コール、レイズをしていく。これは再帰によって解く。もう 1 つの場合では、プレイヤー　は最初のラウンドでチェックできるが、チェックしたらレイズできず、プレイヤー　はベットする。このゲームもまた完全に解かれている。彼は、「しかしながら、レイズをチェックして問題を解く事は非常に難しいように思える・・・」と言った。

他の考えられた一様なポーカーのモデルは、Gillies と Mayberry と von Neumann(1953)、Goldman と Stone(1960b) の同時の動作のモデルや、Sakaguchi と Sakai(1982) の負の非独立の手札の high-low モデルや、Nash と Shapley(1950)、Sakai(1984)、Sakaguchi と Sakai(1992b) の 3 人ポーカーのモデルや、

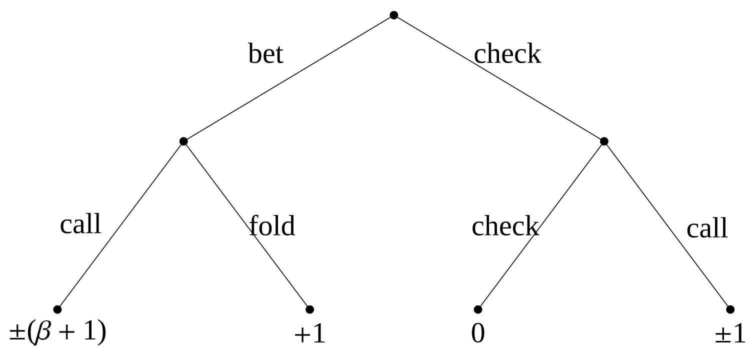
Pruitt(1961) のスタッドポーカーのモデルや、Sakaguchi と Sakai(1992a) の多段階モデルである。

2.7.4 Exercises

1. プレイヤー　がチェックした時、プレイヤー　は利得がなくなるチェックか、手札を比べあい、高い手札を持っているほうがアンティーを得るコールかを選ぶ事ができるとする。そうでなければ、ゲームは la relance または von Neumann のポーカーと同じである。

   (a) ベッティング木を描け。

   ベッティング木は、次のようになる。



   (b) 無差別方程式を求めよ (　は $a < x < b$ の時に限りチェックすると仮定せよ。また、　がベットしたら、　は $y > c(a \le c \le b)$ ならコールし、プレイヤー　がチェックしたら、　は $y > d(a \le d \le b)$ ならコールすると仮定せよ)。

   最初に、プレイヤー　は手札 $y = c$ でのフォールドとコールの違いに関して無関心であるべきである。もし　がフォールドすれば、何も得られない。もし　が $y = c$ でコールすれば、$x < a$ なら $(\beta + 2)$ 勝ち、$x > b$ なら β 負ける。　の期待利得を等式化する事により、1 つ目の無差別方程式は次のようになる。

$$(\beta + 2)a - \beta(1 - b) = 0$$

   次に、プレイヤー　は手札 $x = a$ でのチェックとベットの違いに関して無関心であるべきである。もし　が $x = a$ でチェックしたら、$y < d$ なら 1 勝ち、$y > d$ なら何も得られないので、期待利得は d である。もし　がベットすれば、$y < c$ なら 2 勝ち、$y > c$ なら β 負けるので、期待利得は $2c - \beta(1 - c)$ である。これらを等式化することにより、2 つ目の無差別方程式は次のようになる。

$$d = 2c - \beta(1 - c)$$

   また、プレイヤー　は手札 $y = d$ でのチェックとコールの違いに関して無関心であるべきである。もし　がチェックすれば、1 を得る。もし　が $y = d$ でコールすれば、$a < x < d$ なら 2 勝ち、$d < x < b$ なら何も得られない。　の期待利得を等式化する事により、3 つ目の無差別方程式は次のようになる。

$$2(d - a) = 1$$

最後に、プレイヤー　は手札 $x = b$ でのチェックとベットの違いに関して無関心であるべきである。もし　がチェックしたら、$y < d$ なら 1 勝ち、$d < y < b$ なら 2 勝ち、$y > b$ なら何も得られないので、期待利得は $d + 2(b - d)$ である。もし　がベットすれば、$y < c$ なら 2 勝ち、$c < y < b$ なら $\beta + 2$ 勝ち、$y > b$ なら β 負けるので、期待利得は $2c + (\beta + 2)(b - c) - \beta(1 - b)$ である。これにより、4 つ目の無差別方程式は次のようになる。

$$d + 2(b - d) = 2c + (\beta + 2)(b - c) - \beta(1 - b)$$

以上の 4 つの式を解くと、

$$a = \frac{2\beta + 1}{2(\beta + 1)(\beta + 3)}, \quad b = \frac{2\beta^3 + 6\beta^2 + \beta - 2}{2\beta(\beta + 1)(\beta + 3)}, \quad c = \frac{(2\beta + 1)(\beta + 2)}{2(\beta + 1)(\beta + 3)}, \quad d = \frac{\beta^2 + 6\beta + 4}{2(\beta + 1)(\beta + 3)}$$

(c)$\beta = 2$ の時の方程式を解け。

上の式に $\beta = 2$ を代入すると、$a = 1/6, b = 2/3, c = 2/3, d = 2/3$ となる。

(d) ゲームはプレイヤー　と　のどちらに有利か、または β のサイズに依存するか。

第３章

２人非ゼロ和（一般和）ゲーム　～それぞれの意思をこめて～

3.1 双行列ゲーム - Safety Levels

2 人ゼロ和ゲーム以外に考える最も単純な事例は、2 人非ゼロ和ゲームである。経済学の例では、労働者と雇用者の争い、それぞれの良い物の 2 人の生産者の競争、買い手と売り手の交渉等がある。既に引用した Owen と Straffin の本では、良く参考になる素材が見つけられる。残りの講座で扱われる素材は、より経済学理論に近いものである。経済学の応用が強調される 2 つのよい参考書は、Robert Gibbons(1992) による Game Theory for Applied Economists, Princeton University Press と、H. Scott Bierman/Luis Fernandez(1993) による Game Theory with Economic Applications, Addison-Wesley Publishing Co. Inc. が挙げられるだろう。

3.1.1 一般和の戦略形ゲーム

2 人一般和ゲームは、展開形または戦略形において定義することができる。標準 (normal) または戦略形の 2 人ゲームは、2 つのプレイヤーの純粋戦略の集合 X, Y、$X \times Y$ 上で定義され、2 人のプレイヤーの利得を表す 2 つの実数値関数 $u_1(x, y), u_2(x, y)$ によって与えられる。もし　が $x \in X$ を選び、　が $y \in Y$ を選べば、　は $u_1(x, y)$、　は $u_2(x, y)$ を受け取る。

戦略形の有限 2 人ゲームは、順序対の行列として表され、双行列という。組の最初の要素はプレイヤー　の利得を表し、2 つ目の要素は、プレイヤー　の利得を表す。行列には、プレイヤー　の純粋戦略と同じ数の行、プレイヤー　の純粋戦略と同じ数の列がある。例えば、次の双行列

$$\begin{pmatrix} (1,4) & (2,0) & (-1,1) & (0,0) \\ (3,1) & (5,3) & (3,-2) & (4,4) \\ (0,5) & (-2,3) & (4,1) & (2,2) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

は、行がプレイヤー　の 3 つの純粋戦略で、列がプレイヤー　の 4 つの純粋戦略のゲームを表している。もしプレイヤー　が 3 行目、プレイヤー　が 2 列目を選べば、　は -2 を受け取り (すなわち 2 負ける)、プレイヤー　は 3 を受け取る。

もう 1 つの有限 2 人ゲームの表現の方法は、行列の組である。もし m, n が 2 人のプレイヤーの純粋戦略の数を表すならば、ゲームは 2 つの $m \times n$ 行列 A, B で表される。ここでの説明は、もしプレイヤー　が i 行目、プレイヤー　が j 列目を選べば、　は a_{ij}、　は b_{ij} を得る (a_{ij}, b_{ij} は、A, B それぞれの i 行 j 列目の要素である)。B は、ゼロ和ゲームの場合のようなプレイヤー　の負け分ではなく、　の勝ち分を表している事に注意せよ。双行列のゲーム (3.1) は、次のような (A, B) として表される。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

ゲームは、行列 B が行列 A の負、すなわち $B = -A$ に限り、ゼロ和ゲームであることに注意せよ。

3.1.2　一般和の展開形ゲーム

ゲームの展開形は、第　部で定義されたものと同じ方法で定義される。唯一の違いは、ゲームが非ゼロ和ゲームなので、利得が 1 つの数字で表せないことである。よって、Kuhn 木の各 terminal の頂点にプレイヤー　がどれくらい勝ったか、プレイヤー　がどれくらい勝ったかを表示しなくてはならない。これを最初の要素がプレイヤー　に支払われた量を指し、2 つ目の要素がプレイヤー　に支払われた量を示す実数の順序対としてこの利得を表すことによってなす。つぎの Kuhn 木は、その例である。

図 3.1.1

もし最初の偶然による動作で、右に下がったとすれば、もしプレイヤー　が a を選び、プレイヤー　が c を選べば、利得は $(2, -1)$ であり、プレイヤー　が 2 勝ち、プレイヤー　が 1 負けることを意味する。2 つ目の要素が、プレイヤー　の負け分ではなく、勝ち分を表していることに注意せよ。特に、ゲームは各要素のベクトル和が 0 になるときに限りゼロ和ゲームである。

3.1.3　展開形から戦略形への変形

展開形の一般和ゲームを戦略形に変形する問題は、ゼロ和ゲームの場合とほとんど似た方法で解かれる。唯一の違いは、利得が順序対であることである。無作為の動作があるのなら、結果は順序対の平均に置き換えられたこれらの順序対の無作為の配分となる。これは、別々に対の各要素における対応する平均を取ることによってなされる。

実例として、図 3.1.1 のゲームを考えよう。プレイヤー　は 2 つの純粋戦略 $X = \{c, d\}$ を持ち、プレイヤー　は 2 つの純粋戦略 $Y = \{a, b\}$ を持つ。対応するこのゲームの戦略形は、次の 2×2 の双行列で与え

られる。

$$\begin{array}{ccc} & a & b \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (5/4,0) & (2/4,3/4) \\ (0,2/4) & (3/4,2/4) \end{pmatrix}} \end{array} \tag{3.3}$$

例えば、1 行 1 列目の要素は次のように計算される。全体の回数の 1/4 は左に行き、　は c を使い、$(-1,3)$ の利得の結果となる。全体の回数の 3/4 は右に行き、プレイヤー　は a を使い、プレイヤー　は c を使って、$(2,-1)$ の利得を得る。従って、平均利得は $(1/4)(-1,3)+(3/4)(2,-1) = (-1/4+6/4, 3/4-3/4) = (5/4,0)$ となる。双行列の他の要素も同様に計算される。

3.1.4 概観

2 人ゲームの解析は、必然的にゼロ和ゲームよりも一般和ゲームはより複雑になる。利得の合計が 0(または定数) でない時、自らの利得を最大化する事が相手の利得を最小化する事と同値ではない。ミニマックス定理は双行列には応用できない。単純に自らの利得をみて、最悪の場合を防ぐことによってでは、正確に最適にプレーする事はできない。明らかに、相手の行列と道理的な戦略の選択にも注意を払わなくてはならない。そうする中で、相手が同じ事をしてくる事を覚えていなくてはならない。一般和の場合は、解答の他の複雑な概念が必要とされる。

理論は、非協力ゲーム理論と協力ゲーム理論に別れている。非協力ゲーム理論では、一般的にプレイヤーが決定をする前にコミュニケーションできない、またはそのようなコミュニケーションはできても、合同で戦略を決定する事ができない。主な非協力の解答の考え方は、戦略均衡である。この理論は次の 2 つの章で扱われる。協力ゲーム理論では、プレイヤーは決定をする前にコミュニケーションできると仮定する。プレイヤーらは、脅し (threat) と脅しへの反撃 (counterthreat)、提案 (proposal) と提案への反撃 (counterproposal) をし、何らかの妥協ができるようにする。彼らは合同である戦略を使い、そのような合意が結ばれたものと仮定する。

協力ゲーム理論はそれ自身が 2 つに別れており、プレイヤーが効用の比較単位を持ち、ある戦略を選択させるための動機としての効用の単位における side payment ができるかどうかによる。対応する解答の概念は、side payment ができるなら TU 協力値といい、side payment ができないのなら NTU 協力値という。TU と NTU は、それぞれ transferable utility と non-transferable utility の略である。

3.1.5 Safety Levels

ゼロ和ゲームからの概念は、一般和ゲームにおける重要な使用を引き継ぎ、見つける。これは safety level、または各プレイヤーが保証される平均の勝ち分である。$m \times n$ の双行列ゲーム A, B において、プレイヤー　が保証される平均の勝ち分は、少なくとも次のようになる。

$$v_I = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = \mathrm{Val}(A) \tag{3.4}$$

これはプレイヤー　の safety level という (これは A の下限値の定義によるものであり、ミニマックス定理はまた A の上限値または値の定義によるものである。よって $v_I = \mathrm{Val}(A)$ である)。プレイヤー　はプレイヤー　の利得行列を考えずにこの利得を達成できる。(3.4) の最大化を達成する戦略 p を**プレイヤー　のマックスミニ戦略**という。

同様に、**プレイヤー　の safety level** は次のようになる。

$$v_{II} = \max_q \min_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_j = \mathrm{Val}(B^\top) \tag{3.5}$$

これによって、プレイヤー　の平均の勝ち分を保証できる。(3.5) における最大化を達成する全ての戦略 q は、**プレイヤー　のマックスミニ戦略**である (v_{II} は B の置換行列である $B^\top$ の値である。B の値ではない。これは $\mathrm{Val}(B)$ は行を選んだ者の勝ち分と列を選んだ者の負け分を表す要素のゲームの値として定義されているからである)。例はこれを明らかにすべきである。

次のゲームの例を考えよ。

$$\begin{pmatrix} (2,0) & (1,3) \\ (0,1) & (3,2) \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

行列 A から、プレイヤー　のマックスミニ戦略は $(3/4, 1/4)$ であり、safety level は $v_I = 3/2$ である。行列 B から、2 列目は 1 列目を支配しているのがわかる (さらに　が最大化しようとしている勝ち分がある)。プレイヤー　はマックスミニ戦略の 2 列目を使う事によって、少なくとも $v_{II} = 2$ の勝ち分を保証できる。これは $B^\top$ の値である事に注意せよ (だが $\mathrm{Val}(B) = 1$)。

もし両方のプレイヤーがマックスミニ戦略を使えば、プレイヤー　は v_I しか得られないが、プレイヤー　は $(3/4)3 + (1/4)2 = 11/4$ 得られる事に注意せよ。これはプレイヤー　にとって好ましい。しかし、もしプレイヤー　が B を見れば、1 列目は完全に支配されているので、　が 2 列目をおそらく選ぶであろう事ががわかる。そうすれば、プレイヤー　は v_I より大きな 3 を得られ、プレイヤー　は $v_{II} = 2$ を得る。

2 行 2 列目からの利得 $(3, 2)$ は、かなり静的である。もし各々が、相手が 2 つ目の戦略を選ぶであろうと思っているのなら、各々は 2 つ目の戦略を選ぶであろう。これは非協力ゲーム理論の主な論点の 1 つであり、そのような戦略対を戦略均衡という。

　の利得を量るのに使われる単位がプレイヤー　の利得を量るのに使われる単位と同じである TU 協力ゲーム理論では、プレイヤーは最も大きい合計 5 を得られる $(3, 2)$ を使う事に共に賛成するであろう。しかしながら、賛同においてはプレイヤーらはまた、5 を 2 人のプレイヤーでどのように分けるのかを明確にしなくてはならない。ゲームは対称ではないので、プレイヤー　には 1 列目を使う脅しがあり、プレイヤー　には同様の脅しはない。後に 5 をプレイヤーらの間でどう分けるのかという何らかの提案をする。

NTU ゲーム理論は、プレイヤーらが自分達の利得を量るための比較できる単位がないと仮定するので、より複雑である。side payment は不可能である。均衡 $(3, 2)$ からのどんな偏差でも、他の 3 つの利得の混合に賛成しなくてはならない ($(3, 2)$ と混合するためにそれを満たすただ 1 つの利得は、$(1, 3)$ である)。

3.1.6　Exercises

1. 次の展開形ゲームを戦略形に変形せよ。

   プレイヤー　は 2 つの純粋戦略を持ち、$X = \{a, b\}$ である。また、プレイヤー　も 2 つの純粋戦略を持ち、$Y = \{c, d\}$ である。3.1.3 と同様に計算すると、次のような 2×2 の双行列になる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} (13/4, 3) & (4, 5/2) \\ (11/2, 3/4) & (21/4, 2) \end{pmatrix} \end{array}$$

2. 次の双行列ゲームにおけるプレイヤーらの safety level とマックスミニ戦略を求めよ。

   (a)$\begin{pmatrix} (1,1) & (5,0) \\ (0,5) & (4,4) \end{pmatrix}$

   次の A, B をそれぞれプレイヤー　、　の利得行列とする。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

   A では、1 行目は 2 行目を支配しているので、プレイヤー　の safety level は $v_I = 1$ で、マックスミニ戦略は $(1, 0)$ である。また B では、1 列目が 2 列目を支配しているので、プレイヤー　の safety level は $v_{II} = 1$ で、マックスミニ戦略は $(1, 0)$ である。

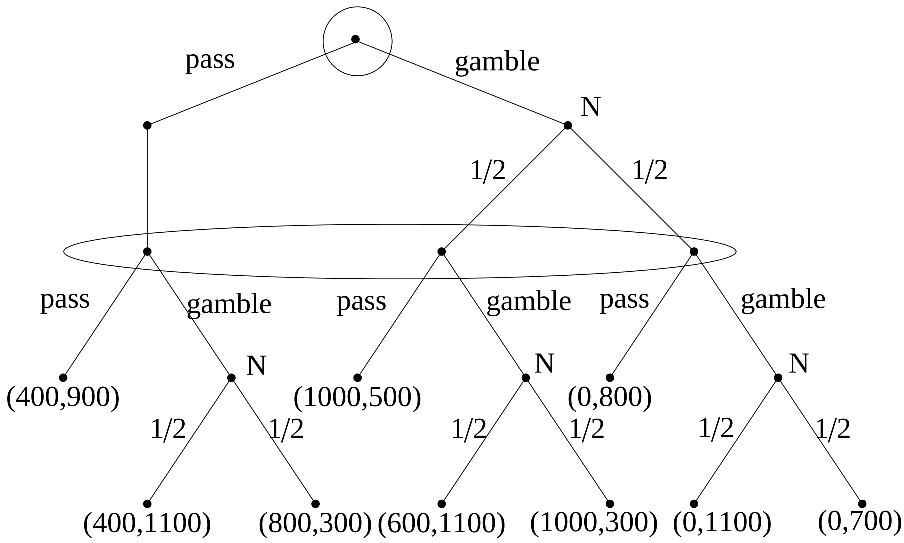
   (b)$\begin{pmatrix} (3,10) & (1,5) \\ (2,0) & (4,20) \end{pmatrix}$

   次の A, B をそれぞれプレイヤー　、　の利得行列とする。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

従って、プレイヤー　の safety level は $v_I = 5/2$ で、マックスミニ戦略は $(1/2, 1/2)$ である。また、プレイヤー　の safety level は $v_{II} = 8$ で、マックスミニ戦略は $(3/5, 2/5)$ である。

3. ゲームショーでの競技者　と　が、それぞれ 400 ドルと 500 ドルを持って、最終ラウンドを始める。各々は、互いの選択を知らないままパスかギャンブルかを決めなくてはならない。パスしたプレイヤーは、始めに持っていたお金を保持する。もしプレイヤー　がギャンブルをするなら、確率 1/2 で 200 ドル勝ち、確率 1/2 で 400 ドル全てを失う。もしプレイヤー　がギャンブルをするなら、確率 1/2 で 200 ドル勝つか、もしくは失う。これらの結果は独立である。それから、最後により多くのお金を持っている方は、ボーナスとして 400 ドルを得る。
(a)Kuhn 木を描け。



(b) 戦略形に変形せよ。
　と　の純粋戦略は、お互いに pass と gamble なので、3.1.3 と同様にすると、次の双行列になる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{pass} & \text{gamble} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{pass} \\ \text{gamble} \end{array} & \begin{pmatrix} (400, 900) & (600, 700) \\ (500, 650) & (400, 800) \end{pmatrix} \end{array}$$

(c)safety level を求めよ。
プレイヤー　の safety level は $v_I = 1400/3$ で、プレイヤー　の safety level は $v_{II} = 5300/7$ である。

4. 協調ゲーム
次のゲームは協調ゲームである。プレイヤーらの safety level とマックスミニ戦略は、両方のプレイヤーに 4 を与える 1 行 1 列目が選ばれることを示している。しかし、もし彼らが協調し、2 行 2

列目を選べば、それぞれを 5 を得られる。

$$\begin{pmatrix} (4,4) & (4,0) \\ (0,4) & (5,5) \end{pmatrix}$$

行を選ぶ者は、このクラスから無作為に選ばれる人間に対してゲームをプレーしているとする。どちらの行を選べばよいか。もしくは、どの混合戦略を使えばよいか。この質問における得点は、クラスの他の生徒が何をするかに依存する。彼らが何をするかを予想しなくてはならない。自分の答えをクラスの他の生徒に明らかにしてはならない。

3.2 非協力ゲーム

2 人一般和ゲームと n 人ゲーム ($n > 2$) は、第　部の 2 人ゼロ和ゲームよりも解析し、説明するのは難しい。「最適」の動作の考え方は、これらのより複雑な状況に拡張しない。非協力ゲーム理論では、プレイヤーらがより高い利得を得るための明白な協調はできないと仮定する。もしコミュニケーションができるのなら、協定を結ぶ事はできない。代用となり得る「解」の考え方は、戦略均衡の概念で見つけられる。

3.2.1 戦略均衡

戦略形の有限 n 人ゲームは、n 個の空でない有限集合 $X_1, X_2, ..., X_n$ と、$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 上で定義された n 個の実数関数 $u_1, u_2, ..., u_n$ によって与えられる。集合 X_i は、プレイヤー i の純粋戦略集合を表し、$u_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ は、プレイヤーらの純粋戦略の選択が $x_1, x_2..., x_n(x_j \in X_j(j = 1, 2, ..., n))$ である時のプレイヤー i の利得を表している。

■Definition　純粋戦略の選択のベクトル $(x_1, x_2, ..., x_n)(x_i \in X_i(i = 1, ..., n))$ を、純粋戦略均衡、または略して PSE(Pure Strategy Equilibrium) といい、任意の $i = 1, 2, ..., n$、$x \in X_i$ に対して、次が成り立つ。

$$u_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \geq u_i(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n) \tag{3.1}$$

式 (3.1) は、もしプレイヤー i 以外のプレイヤーらが示された戦略を使うなら、プレイヤー i ができる最良の戦略は x_i であるという事を述べている。そのようなプレイヤー i の純粋戦略の選択を他のプレイヤーの戦略の選択に対する**最適反応**という。戦略均衡の概念では、各プレイヤーが他のプレイヤーの戦略選択に対する最適反応を使うなら、プレイヤーらの戦略の特定の選択が PSE である事が述べられている。

次の 2 人のプレイヤーの例を考えよ。

$$\text{(a)}\begin{pmatrix} (3,3) & (0,0) \\ (0,0) & (5,5) \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\begin{pmatrix} (3,3) & (4,3) \\ (3,4) & (5,5) \end{pmatrix}$$

(a) では、第 1 行第 1 列 ($< 1, 1 >$ で表す) は、均衡利得 $(3, 3)$ の戦略均衡である。もし各々が相手が 1 つ目の戦略を使うだろうと予想すれば、どちらのプレイヤーも 2 つ目の戦略に変えようとは思わないだろう。第 2 行第 2 列 ($< 2, 2 >$) もまた戦略均衡である。均衡利得 $(5, 5)$ であるので、両方のプレイヤーはこの均衡を好む。(b) では、1 行 1 列目 $< 1, 1 >$ もまた、定義により戦略均衡である。どちらのプレイヤーも戦略を変える事によって得る事ができない。他方では、どちらのプレイヤーも変える事によって損をし、彼らが両方変えた時にのみ、両方より良くなる。よって均衡 $< 1, 1 >$ は、多少動的である。

もしプレイヤーらが非協力ゲームで非公式な同意に達すれば、戦略均衡が期待できる。縛られない同意がなされるので、起こる期待のできるただ 1 つの同意は、単独で同意に反する事によって利得を得られる

プレイヤーがいないという**自己拘束的**である。各プレイヤーは、他のプレイヤーが使うと宣言した戦略に対する自らの利得を最大化している。

この定義をプレイヤーが混合戦略を使えるように拡張する事は有益である。k 点の確率の集合を $\mathcal{P}_k$ と表す。

$$\mathcal{P}_k = \{p = (p_1, ..., p_k) : p_i \geq 0 \text{ for } i = 1, ..., k, \text{ and } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1\} \tag{3.2}$$

m_i をプレイヤー i の純粋戦略の選択の数字とすると、集合 X_i には m_i の元がある。すると、プレイヤー i の混合戦略の集合は、まさに $\mathcal{P}_{m_i}$ である。それを $X_i^* = \mathcal{P}_{m_i}$ である X_i^* で表す。

X_i の元の集合を最初から m_i 個の整数 $X_i = \{1, 2, ..., m_i\}$ で表す。$i = 1, 2, ..., n$ に対して、プレイヤー i が $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{im_i}) \in X_i^*$ を使うとする。すると、プレイヤー j に対する平均利得は、次のようになる。

$$g_j(p_1, ..., p_n) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} p_{1i_1} \cdots p_{ni_n} u_j(i_1, ..., i_n) \tag{3.3}$$

次に、混合戦略を使った均衡の類似的な定義は、次のようになる。

■Definition　混合戦略選択のベクトル $(p_1, p_2, ..., p_n)(p_i \in X_i^*(i = 1, ..., n))$ を戦略均衡、略して SE といい、任意の $i = 1, 2, ..., n$、$p \in X_i^*$ に対して、次が成り立つ。

$$g_i(p_1, ..., p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, ..., p_n) \geq g_i(p_1, ..., p_{i-1}, p, p_{p+1}, ..., p_n) \tag{3.4}$$

$^\forall p \in X_i^*$ に対して、(3.4) を満たす全ての混合戦略 p_i は、他のプレイヤーの混合戦略に対するプレイヤー i の**最適反応**である。従って、プレイヤーらの混合戦略の特定の選択は、各プレイヤーが他のプレイヤーの戦略選択に対する最適反応を使う時に限り、SE になる。PSE は、SE の特別な場合である事に注意せよ。

最適反応の概念は、ゲームをプレーする現実的な方法を表している。すなわち、相手がどの純粋戦略でプレーするかの確率を推測し、それに対する最適反応を選べということである。これは、決定をする手助けとなる、有名な**ベイズ理論**の例である。もちろんゲームでは、これは危険な方法になり得る。相手が自分の推測した種類よりももっと良い方法を取るかもしれない。

浮かび上がる最初の疑問が、「常に戦略均衡は存在するのか」である。この疑問は、John Nush によって、von Neumann のミニマックス定理を一般化した次の定理で、1951 年に解かれている。この業績に敬意を表し、戦略均衡はまた**ナッシュ均衡**とも呼ばれる。

■Theorem　全ての戦略形有限 n 人ゲームには、戦略均衡が少なくとも 1 つある。

Brouwer の不動点定理を使ったこの定理の証明は、Appendix 3 で与えられる。この証明は、非存在証明で、均衡を見つけることについての方法の指示は与えられない。しかしながら、$n = 2$ の双行列の場合

は、simplex-like pivoting algorithm(Parthasarathy and Raghavan(1971) の例を見よ) を使って、有限回数で戦略均衡を計算するのに、Lemke-Howson のアルゴリズムが使われる。

非協力ゲーム理論の困難の 1 つは、大抵、次の例で見られるように異なる利得のベクトルを与える多くの均衡があることである。もう 1 つは、たとえただ 1 つしか戦略均衡がなくても、道理的な解、または結果の予想を考える事はできないということである。このセクションの残りでは、$n = 2$、2 人の場合に制限する。

3.2.2　例

Example 1. **協調ゲーム**
次の双行列のゲームを考えよ。

$$\begin{pmatrix} (3,3) & (0,2) \\ (2,1) & (5,5) \end{pmatrix}$$

対応する利得行列は、次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

対応するマックスミニ (MN) 戦略は、プレイヤー　が $(1/2, 1/2)$ で、プレイヤー　が $(3/5, 2/5)$ である。safety level は、$(v_I, v_{II}) = (5/2, 13/5)$ である。

ここでは、利得 $(3,3), (5,5)$ に対応する 2 つの明らかな純粋戦略均衡 (PSE's) がある。両方のプレイヤーは、両方とも 3 ではなく 5 を得られるために 2 つ目の SE を好む。もし彼らが自分達の行動を協調できたら、この結果は期待されるだろう。しかし、もし彼らがコミュニケーションできず、もし両方のプレイヤーが相手が 1 つ目の戦略を選ぶであろうと思っていれば、彼らは両方とも 1 つ目の戦略を選び、利得 3 を得る。誰も結果 $(3,3)$ が不条理とは言えない。もしそんなことが常にあれば、選ぶものを変えた者が損をする。この事象は、多くのプレイヤーがいる時にしばしば起こる。変えようとするための言語の構造や、タイプライターのキーボードや、測定の体系は、何らかのアドバンテージが実現する前に、同時に多くの人々が変える事を必要とする。

これらのゲームでは、時に生ずる 3 つ以下の明らかな均衡がある。もし各プレイヤーが、他のプレイヤーの行列に対しての均等戦略を持っていれば、戦略対は均衡をなす。これは、もし自分が何をしようとも関係ない戦略を相手が使えば、自分がする全ての戦略は最適反応、特に相手の行列の均等戦略になるためである (均等戦略は、相手が何をしようとも、相手に対して同じ平均利得を与える戦略であることを思い出せ)。

上のゲームでの、この**均等戦略均衡**を求めよう。各プレイヤーが他のプレイヤーの行列に対する均等戦略を持っていることに注意せよ。プレイヤー　は B に対して $p = (4/5, 1/5)$ を持ち、プレイヤー　は A に対して $q = (5/6, 1/6)$ を持つ。プレイヤーがこれらの戦略を使った時、平均利得は $(5/2, 13/5)$ であり、safety level も同じである。

戦略均衡からの平均利得がプレイヤーの中の 1 人の safety level 以下になる可能性はあるのだろうか。

答えは、NO である (Exercise 1 を見よ)。従って、戦略均衡 (p, q) は得られるものと同じように粗末な戦略均衡である。さらに、極度に動的である。それぞれの均衡戦略から逸れる事で、状況が良くなるプレイヤーがいないのは事実だが、一方では他の戦略に変えるプレイヤーにも害はないのだ。

上の例では、3 つの SE's に対する利得は全て異なる。プレイヤーらは好む 3 つの結果について、同じ好みを持つ。次の例では、プレイヤーらは 2 つの純粋均衡戦略の間で、それぞれ違う好みを持つ。

Example 2. **男女の争い**
行列は次のようであるとする。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix} \end{array} \qquad A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

このゲームの名前は、映画 a, b のどちらを見に行くかを選ぶ夫と妻の間でゲームがプレーされる記述から来ている。彼らはそれぞれ異なる映画を好むが、1 人で行くよりは共に行く方を好む。おそらくこれは協力ゲームとして解析すべきだが、ここでは非協力ゲームとして解析する。

純粋戦略ベクトル $(a, a), (b, b)$ は共に PSE's だが、プレイヤー　は 1 つ目を、プレイヤー　は 2 つ目を好む。

最初に、safety level は $v_I = v_{II} = 2/3$ で、両方のプレイヤーにとって同じである事に注意せよ。プレイヤー　の MM 戦略は $(1/3, 2/3)$ で、プレイヤー　の MM 戦略は $(2/3, 1/3)$ である。均等戦略 $p = (2/3, 1/3)$ と $q = (1/3, 2/3)$ によって与えられる 3 つ目の戦略均衡がある。この均衡点の均衡利得 $(v_I, v_{II}) = (2/3, 2/3)$ は、他の 2 つの均衡点のどちらかよりも両方のプレイヤーにとってより悪い。

Example 3. **囚人のジレンマ**
ただ 1 つの SE があるが、両方のプレイヤーにとってより良い他の結果があるということが起こりうる。次の双行列ゲームを考えよ。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{協調} & \text{裏切り} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{協調} \\ \text{裏切り} \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) \\ (4,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

このゲームでは、プレイヤー　はプレイヤー　がどの列を選んでも、2 行目を選んだほうが良い事がわかる。プレイヤー　が 1 行目ではなく 2 行目を選べば、プレイヤー　が 1 列目を選べば 3 ではなく 4、2 列目を選んでも 0 ではなく 1 を得られる。言い換えれば、プレイヤー　が 2 行目を選ぶ 2 つ目の戦略は、1 行目を選ぶ 1 つ目の戦略を完全に支配している。一方、ゲームは対称である。プレイヤー　の 2 列目は、1 列目を完全に支配している。しかしながら、もし両方のプレイヤーがそれぞれの支配戦略を使えば、各プレイヤーは 1 を受け取るが、両方のプレイヤーが被支配戦略を使えば、各プレイヤーは 3 得る事ができる。

この特徴を持ち、両方のプレイヤーが共に完全な被支配戦略を使った時がより良いゲームを、囚人のジレンマという。この双行列を導き、このゲームにこの名前がついた物語は、次の通りである。2 人組の有

名な泥棒が捕まり、それぞれ異なる部屋に分けられる。地方検事は、選択の大規模な起訴において、有罪にするための十分な証拠がなく、各囚人に取引を持ちかける。もし囚人の中の 1 人が証言をすれば (共謀者を裏切れば)、自白した方を釈放し、もう一方は最大級の刑に処される。もし両方が口を割らなくても、地方検事はまだ両方を非常に小さい罪で有罪にすることができる。上の行列では、効用を測る単位を、最も好ましくない結果 (最大級の刑) を値 0、次に好ましくない結果 (最小の刑) を値 1、小さい罪で有罪になるのが値 3、釈放されるのが値 4 であるとしている。

このゲームには、経済学の応用が多く含まれている。例は、それぞれ良い 2 つの会社による製造である。両方の会社は、高いレベルか、低いレベルで製造できる。両方が低いレベルで製造すれば、価格は高いままで両方が 3 を得る。両方が高いレベルで製造すれば、価格は下がり両方が 1 を得る。どちらかが高いレベルで製造し、もう一方が低いレベルで製造すれば、高いレベルで製造した方が 4 を得られ、低い方は何も得られない。他の製造者が何をしても、それぞれが高いレベルで製造する事によって、状況がより良くなる。

3.2.3　全ての PSE's を求める

より大きい行列に対して、全ての純粋戦略均衡を求める事は難しい事ではない。これは、ゼロ和ゲームの全ての saddle point を求める方法の拡張を使ってなされる。双行列の形で書かれたゲームで、その列で最大のプレイヤー　の利得のそれぞれにアスタリスクを付ける。次にその行で最大のプレイヤー　の利得のそれぞれにアスタリスクを付ける。　と　の両方にアスタリスクが付いている行列の要素全てが PSE で、逆もそうである。

例によって、これを明確にする。

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \quad a \quad & \quad b \quad & \quad c \quad & \quad d \quad & \quad e \quad & \quad f \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,1) & (4,3) & (7^*,2) & (7^*,4) & (0,5^*) & (3,2) \\ (4^*,0) & (5^*,4) & (1,6^*) & (0,4) & (0,3) & (5^*,1) \\ (1,3^*) & (5^*,3^*) & (3,2) & (4,1) & (1^*,0) & (4,3^*) \\ (4^*,3) & (2,5^*) & (4,0) & (1,0) & (1^*,5^*) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

1 列目では、プレイヤー　の最大利得は 4 なので、両方の 4 にアスタリスクが付く。1 行目では、プレイヤー　の最大利得は 5 なので、5 にアスタリスクが付く。これを続ける。

終わった時、2 つのアスタリスクが付いている 2 つの利得のベクトルが分かる。それぞれ利得が $(5,3),(1,5)$ である純粋戦略均衡 $(C,b),(D,e)$ がある。他の純粋戦略対においては、少なくともプレイヤーの 1 人が他の戦略に変えることによって状況を良くできるという事である。

2 人ゼロ和ゲームでは、PSE はまさに saddle point である。多くのゲームは PSE を持たず、例としては、saddle point を持たないゼロ和ゲームである。しかしながら、展開形ゼロ和ゲームは常に saddle point を持つように、展開形非ゼロ和ゲームは常に少なくとも 1 つ、後向き帰納法で求められる PSE がある。

3.2.4　強被支配戦略の逐次消去

一般和ゲームでは、異なる均衡は異なる利得のベクトルを持つ事があり得るので、ゼロ和ゲームよりも全ての戦略均衡を求める事は重要になってくる。全ての均衡点を失わずに、全ての強被支配行、列を除ける (Exercise 7)。

理性的になると、相手が何をしようとも厳密により良い平均利得を保証する (混合) 戦略があるので、強被支配純粋戦略ではプレーしないだろう。同様に、相手も同じように理性的であると考え、同じように被支配戦略は使ってこないと考える。従って、消去できる被支配純粋戦略があるかどうかをチェックする前に、相手の全ての被支配純粋戦略を消去できる。

この議論は反復されるかもしれない。相手が理性的であるだけでなく、自分の事も理性的であると考えている場合は、自分の被支配純粋戦略を消去し、相手の被支配純粋戦略を消去し、もう一度、自分の被支配となった純粋戦略を消去する。このくだりの道理的な根本は、2 人のプレイヤーが理性的であるという普通の知識がある場合、好きなだけ被支配戦略を逐次的に取り除けるという事である (この記述は、2 人のプレイヤーの間で、各々がこの記述を知っており、そしてその相手もそれを知っており、各々が他者がそれを知っている事を他者が知っている事を知っており、と無限に続く)。

道理的なこの種を伴う例としては、100 回連続で続く囚人のジレンマを考えよ。これがプレーされる最後の回は、道理的なプレイヤーらが裏切りを選ぶであろう事は明らかである。他の戦略は、強支配されている。しかし、プレイヤーらが、彼らがそのゲームで裏切ると結論付けるための最後のゲームの前の強支配を利用できる最後のゲームを続けるであろうことも知っている。同様に、全ての道を最初のゲームまで戻る。プレイヤーらは各々のゲームで 1 を受け取る。もし彼らが何らかの原因で互いの理性を信じられなくなれば、各々のゲームで 3 を受け取る。

ここで、この不合理をよりはっきりと表す、**ムカデゲーム**というゲームを紹介する。これは、偶然の動作がない完全情報ゲームなので、強被支配戦略の逐次消去を使うのは簡単である。ここでは、展開形ゲームである。

図 3.2.1 ムカデゲーム

これは完全情報ゲームなので、後向き帰納法で解く事ができる。最後の動作において、プレイヤー　は 100 ではなく 101 を得るために、横に行かず下に下りるに違いない。従って最後の動作の前において、プレイヤー　は 98 ではなく 99 を得るために、横に行かず下に下りるだろう。そして、最初の状態に戻り、そこではプレイヤー　は 0 ではなく 1 を得るために、横に行かず下に下りるだろう。これは、全ての取り

除かれた戦略が強被支配なので、ただ 1 つの PSE である。

同様なゲームをプレーする事によって求められる経験的な証拠は、実際に人々がこのゲームをどのようにプレーするのかというまともな予想を立てられないことを示している。議論のために、David M. Kerps(1990) の本、Game Theory and Economic Modeling, Oxford University Press を見てみよ。

3.2.5 Exercises

1. **戦略均衡は個別合理的**

   利得ベクトルは、各プレイヤーが少なくともそれぞれの safety level を受け取れるのなら、個別合理的という。(p, q) が行列 A, B のゲームに対する戦略均衡である時、$p^\top Aq \geq v_I, p^\top Bq \geq v_{II}$ である事を示せ。従って、戦略均衡に対する利得ベクトルは、個別合理的である。

   A, B を $m \times n$ の行列とし、$p = (p_1, ..., p_m), q = (q_1, ..., q_n)$ とする。(p, q) は行列 A, B のゲームに対する戦略均衡なので、X^*, Y^* をプレイヤー 1,2 の混合戦略集合とすると、(3.4) より、任意の $p^* \in X^*$ に対して、

$$g_1(p^*, q) \leq g_1(p, q) = \max_p \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j$$

   が成り立つので、明らかに、

$$p^\top Aq \geq \max_p \min_j \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} = v_I$$

   また、任意の $q^* \in Y^*$ に対して、

$$g_2(p, q^*) \leq g_2(p, q) = \max_q \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j$$

   が成り立つので、明らかに、

$$p^\top Bq \geq \max_q \min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j = v_{II}$$

2. safety level と MM 戦略、全ての SE's を求め、次の戦略形ゲームの利得ベクトルを結びつけよ。

$$(a)\begin{pmatrix} (0,0) & (2,4) \\ (2,4) & (3,3) \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} (1,4) & (4,1) \\ (2,2) & (3,3) \end{pmatrix} \quad (c)\begin{pmatrix} (0,0) & (0,-1) \\ (1,0) & (-1,3) \end{pmatrix}$$

   (a) プレイヤー　の safety level は $v_I = 2$ で、MM 戦略は (0,1) である。プレイヤー　の safety level は $v_{II} = 16/5$ で、MM 戦略は (1/5,4/5) である。このゲームの PSE は第 2 行第 1 列の (2,4) であり、$p = (1/5, 4/5), q = (0, 1)$(平均利得 (14/5,16/5)) の均等戦略均衡がある。

   (b) プレイヤー　の safety level は $v_I = 2$ で、MM 戦略は (0,1) である。プレイヤー　の safety level は $v_{II} = 5/2$ で、MM 戦略は (1/2,1/2) である。このゲームに PSE は存在せず、$p = (1/4, 3/4), q =$

$(0,1)$(平均利得 (13/9,5/2)) の均等戦略均衡がある。

(c) プレイヤー　の safety level は $v_I = 0$ で、MM 戦略は (1,0) である。プレイヤー　の safety level は $v_{II} = 0$ で、MM 戦略は (1,0) である。このゲームに PSE は存在せず、$p = (0,1), q = (1,0)$(平均利得 (1,0)) の均等戦略均衡がある。

3. **チキンゲーム**

2 人のプレイヤーが互いに向き合って加速し、土壇場でどちらかが怖気づいて衝突を避けるであろう。両方が怖気づけば、丸く収まる (両者が 1 を得る)。どちらかが怖気づき、もう一方がそうでなければ、鉄の意志を持ったプレイヤーが偉大な成功を収め (利得 2)、腰抜けは不名誉を得る (利得 −1)。もし両方が鉄の意志を持っていれば、事故が起こる (両者が 2 を失う)。

(a) このゲームの双行列を作れ。

このゲームの純粋戦略は、衝突を避けるか (chicken)、避けないか (iron nerves) なので、双行列は次のようになる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{chicken} & \text{iron nerves} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{chicken} \\ \text{iron nerves} \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (-1,2) \\ (2,-1) & (-2,-2) \end{pmatrix} \end{array}$$

(b)safety level は何か。MM 戦略は何か。そしてプレイヤーが MM 戦略を使った時の平均利得は何か。

プレイヤー　の safety level は $v_I = -1$ で、MM 戦略は (1,0) である。プレイヤー　の safety level は $v_{II} = -1$ で、MM 戦略は (1,0) である。この MM 戦略を使った時の平均利得は (1,1) である。

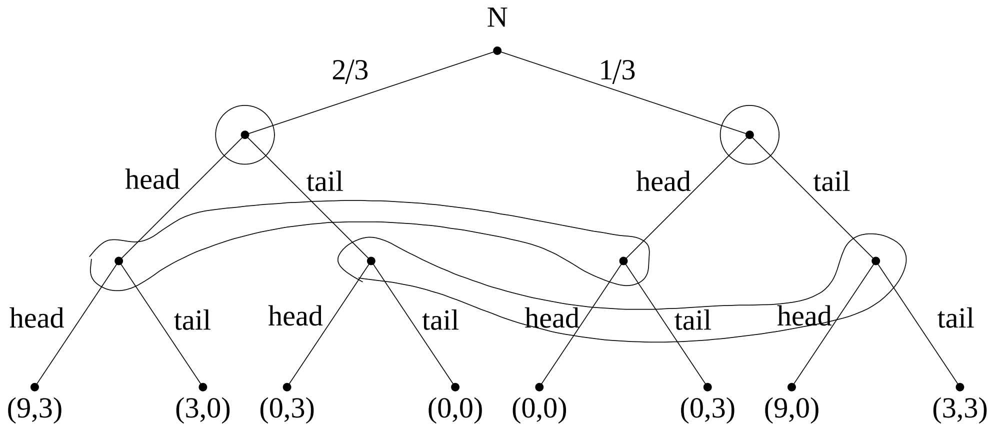
(c)3 つの SE’s を全て求めよ。

PSE として、第 1 行第 2 列の $(-1,2)$ と第 2 行第 1 列の $(2,-1)$ の 2 つ。また、均等戦略均衡として $p = (1,0), q = (1,0)$(平均利得 (1,1)) がある。

4. **展開形非ゼロ和ゲーム**

確率 2/3 で表、1/3 で裏が出るコインでトスし、結果はプレイヤー　には知らされ、プレイヤー　には知らされない。プレイヤー　は次に、コインの表が出たか裏が出たかを正直に宣言するか、嘘をつく。次に、プレイヤー　はその宣言を聞いて、コインが表か裏であるかを推測しなくてはならない。推測が正しければプレイヤー　は 3 ドル得られ、そうでなければ何も得られない。プレイヤー　は真実を述べれば 3 ドル得られる。加えて、プレイヤー　が表を推測すれば 6 ドル得られる。

(a)Kuhn 木を描け。



(b) 戦略 (双行列) 形に変形せよ。

プレイヤー　とプレイヤー　の純粋戦略は、表 (head) と裏 (tail) なので、次のように変形できる。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{head} & \text{tail} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{head} \\ \text{tail} \end{array} & \begin{pmatrix} (6,2) & (2,1) \\ (3,2) & (1,1) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

(c) 全ての PSE’s を求めよ。

3.2.3 の方法を使って、双行列にアスタリスクを付けてみると、

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{head} & \text{tail} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{head} \\ \text{tail} \end{array} & \begin{pmatrix} (6^*,2^*) & (2^*,1) \\ (3,2^*) & (1,1) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

よって、純粋戦略均衡は < head,head > である。

5. 次の戦略形ゲームの全ての PSE’s を求めよ。

$$
(a)\begin{pmatrix} (-3,-4) & (2,-1) & (0,6) & (1,1) \\ (2,0) & (2,2) & (-3,0) & (1,-2) \\ (2,-3) & (-5,1) & (-1,-1) & (1,-3) \\ (-4,3) & (2,-5) & (1,2) & (-3,1) \end{pmatrix}
$$

3.2.3 の方法を使って、双行列にアスタリスクを付けてみると、

$$
\begin{pmatrix} (-3,-4) & (2^*,-1) & (0,6^*) & (1^*,1) \\ (2^*,0) & (2^*,2^*) & (-3,0) & (1^*,-2) \\ (2^*,-3) & (-5,1^*) & (-1,-1) & (1^*,-3) \\ (-4,3^*) & (2^*,-5) & (1^*,2) & (-3,1) \end{pmatrix}
$$

よって、第 2 行第 2 列の (2, 2) は純粋戦略均衡である。

$$(b)\begin{pmatrix} (0,0) & (1,-1) & (1,1) & (-1,0) \\ (-1,1) & (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (-1,-1) & (0,1) & (-1,1) \\ (1,-1) & (-1,0) & (1,-1) & (0,0) \\ (1,1) & (0,0) & (-1,-1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

これも (a) と同様にすると、

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (1^*,-1) & (1^*,1^*) & (-1,0) \\ (-1,1^*) & (0,1^*) & (1^*,0) & (0^*,0) \\ (1^*,0) & (-1,-1) & (0,1^*) & (-1,1^*) \\ (1^*,-1) & (-1,0^*) & (1^*,-1) & (0^*,0^*) \\ (1^*,1^*) & (0,0) & (-1,-1) & (0^*,0) \end{pmatrix}$$

よって、第 1 行第 3 列と第 5 行第 1 列の $(1,1)$ と、第 4 行第 4 列の $(0,0)$ は純粋戦略均衡である。

6. 次の双行列ゲームを考えよ。

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (1,2) & (2,0) \\ (0,1) & (2,0) & (0,1) \end{pmatrix}$$

(a)2 人のプレイヤーの safety level を求めよ。

プレイヤー　の safety level は $v_I = 0$ で、プレイヤー　の safety level は $v_{II} = 2/3$。

(b) 全ての PSE's を求めよ。

双行列にアスタリスクを付けると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} (0^*,0) & (1,2^*) & (2^*,0) \\ (0^*,1^*) & (2^*,0) & (0,1^*) \end{pmatrix}$$

よって、第 2 行第 1 列の $(0,1)$ は純粋戦略均衡である。

(c) 混合均等戦略によって与えられる全ての SE を求めよ。

均等戦略均衡として、$p = (1/3, 2/3), q = (0, 2/3, 1/3)$(平均利得 (16/9,10/9)) がある。

7. **強被支配戦略の消去で残る戦略均衡**

1 行目が強支配されており (2 から m の行の確率混合によって。すなわち $a_{1j} < \sum_{i=2}^m x_i a_{ij} \ {}^\forall j \ (x_i \geq 0, \sum_2^m x_i = 1)$)、$(p^*, q^*)$ を戦略均衡とする。$p_1{}^* = 0$ を示せ。

もし $p_1{}^* \neq 0$ であるとすると、(p^*, q^*) は戦略均衡なので、(3.4) より、任意の $p \in X_i{}^*(X^{i^*}$ は混合戦略集合) に対して、次が成り立つ。

$$g_1(p^*, q^*) \geq g_1(p, q^*)$$

しかし、1 行目は強支配されているので、明らかに次のような $p^{**} = (0, p_2{}^{**}, ..., p_m{}^{**}) \in x_i{}^*$ が存在する。

$$g_1(p^{**}, q^*) \geq g_1(p^*, q^*)$$

これは (p^*, q^*) が戦略均衡であるという仮定に矛盾する。■

8. 次の非協力双行列ゲームを考えよ。

$$\begin{pmatrix} (3,4) & (2,3) & (3,2) \\ (6,1) & (0,2) & (3,3) \\ (4,6) & (3,4) & (4,5) \end{pmatrix}$$

(a)safety level と両方のプレイヤーのマックスミニ戦略を求めよ。

プレイヤー　の safety level は $v_I = 3$ で、MM 戦略は (0,0,1) である。プレイヤー　の safety level は $v_{II} = 2$ で、MM 戦略は (0,0,1) である。

(b) できるだけ多くの戦略均衡を見つけよ。

9. ゲーム木の全ての頂点において、戦略ベクトルが PSE である頂点で始まる部分ゲームに制限されるのなら、展開形ゲームでの戦略の PSE ベクトルを**部分ゲーム完全均衡**という。ゲームが完全情報なら、部分ゲーム完全均衡は後向き帰納法によって求められる。図 3.2.2 は、部分ゲーム完全 PSE を持ち、部分ゲーム完全でないその他の PSE を持つ完全情報ゲームの例である。

(a) 後向き帰納法を使って、均衡に対するゲームを解け。

プレイヤー　は、−1 ではなく 0 を得るために、b ではなく a を選ぶだろうと予想でき、その前のプレイヤー　は、0 ではなく 1 を得るために、A ではなく B を選ぶだろうと予想できる。よって (1,0) は PSE となる。

(b) ゲームを戦略形に変形せよ。

このゲームを戦略形に変形すると、次のようになる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{a} & \text{b} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,1) & (0,1) \\ (1,0) & (-10,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

(c) 戦略形ゲームのもう 1 つの PSE を求め、展開形ゲームと関連付け、部分ゲーム完全でない事を示せ。

双行列にアスタリスクを付けると、次のようになる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{a} & \text{b} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,1^*) & (0^*,1^*) \\ (1^*,0^*) & (-10,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

従って、第 2 行第 1 列の (1,0) の他に、第 1 行第 2 列の (0,1) という PSE も存在する。しかし、(a) の後向き帰納法で示したように、　は明らかに a を選ぶだろうと予想できるので、　の選択だけの

部分ゲームだけで見た場合、　が a を選ぶことを期待して A ではなく B を選ぶので、これは部分ゲーム完全均衡ではない。

図 3.2.2 展開形ゲーム

10. プレイヤー　はムカデゲームをクラスの無作為で選ばれる人に対してプレーするとする。相手がまだゲームを終えていないと仮定した時、どこの点で下へ行ってゲームを終わらす選択をしようと考えるか。プレイヤー　の時の同じ質問にも答えよ。
    この質問における自分の得点は、クラスの他の生徒が何をするかに依存する。この質問に対する自分の答えをクラスの他の生徒に明らかにしてはいけない。

3.3 複占のモデル

均衡の非協力ゲーム理論で与えられた例は、一般的に予想する力が乏しい理論として示されている。これは主に、多くの均衡の中からそれらを選び出す方法がないためである。囚人のジレンマやムカデゲームのように、被支配戦略の逐次消去によって見つけられたただ 1 つの均衡でさえ、結果の乏しいものであるかもしれない。しかし、完全に道理的な動作の予想を示すものがある戦略均衡でプレーされる囚人のジレンマのような状況がある。まず、A.Cournot(1938) によって成された複占のモデルを始める。

3.3.1 Cournot の複占のモデル

1 つの同質の製品を製造して争う 2 つの会社がある。これらの会社は製造するためにどのくらいの利益を得るかを選択しなくてはならない。製品を 1 つ製造するのに、常に c のコストがかかり、これは両方の会社で同じである。会社 i が q_i 個の製品を作れば、会社 i に対するコストは $cq_i(i = 1, 2)$(設置費用はかからない) である。その製品の 1 つの値段は、製造された合計の量に対して負の関係がある。会社 1 が q_1 を製造し、会社 2 が q_2 を製造して、合計が $Q = q_1 + q_2$ であるとすると、価格はある定数 a に対して、次のようになる。

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & (0 \leq Q \leq a) \\ 0 & (Q > a) \end{cases} = (a - Q)^+ \tag{3.1}$$

(これは現実的な仮定ではないが、価格はおおよそ均衡点に近づくだろう。) 会社は同時に製品の量を選ばなければいけないとする。共謀は許されない。

このゲームの純粋戦略集合は、集合 $X = Y = [0, \infty)$ である。無限集合である事に注意し、よってゲームは有限ではない。戦略集合を $[0, a]$ に制限する事はたいした問題ではない。なぜなら、利得が 0 になるので a 個以上を製造しようとするプレイヤーはいないからである。2 人のプレイヤーの利得は、次の利益になる。

$$u_1(q_1, q_2) = q_1 P(q_1 + q_2) - cq_1 = q_1(a - q_1 - q_2)^+ - cq_1 \tag{3.2}$$
$$u_2(q_1, q_2) = q_2 P(q_1 + q_2) - cq_2 = q_2(a - q_1 - q_2)^+ - cq_2 \tag{3.3}$$

これは、戦略形ゲームを定義する。$c < a$ と仮定する (そうでなければ製造コストが少なくとも期待されるリターンと同じ大きさになるため)。

最初に、製造する会社が 1 つしかない独占の場合に何が起こるかを理解しよう。すなわち、$q_2 = 0$ とする。次に、会社 1 が q_1 個製造した時のリターンは、$u(q_1) = q_1(a - q_1)^+ - cq_1$ である。会社はこの量を最大化する q_1 を選ぶであろう。確かに、$0 < q_1 < a$ に対して、この場合では $u(q_1) = q_1(a - c) - q_1{}^2$ で最大となり、q_1 についての導関数を用いて、それを 0 とし、q_1 について解く事によって最大化が起こる点を求められる。結果、方程式は $u'(q_1) = a - c - 2q_1 = 0$ で、その解は $q_1 = (a - c)/2$ である。独占価格は $P((a - c)/2) = (a + c)/2$ で、独占利益は $u((a - c)/2) = (a - c)^2/4$ である。

複占 PSE を求めるために、各プレイヤーに対して、他者の戦略の最適反応である純粋戦略を探す。偏微分作用素を 0 になるように置く事によって、(3.2) を最大化する値 q_1 と、(3.3) を最大化する値 q_2 を同時に求める。

$$\frac{\partial}{\partial q_1} u_1(q_1, q_2) = a - 2q_1 - q_2 - c = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2} u_2(q_1, q_2) = a - q_1 - 2q_2 - c = 0 \tag{3.5}$$

(u_1 は負の係数の q_1 の 2 次関数であるので、この根は最大化の点を表す。) これらの方程式を同時に解き、$q_1{}^*$ と $q_2{}^*$ の結果を示す事によって、次が求められる。

$$q_1{}^* = (a - c)/3 \qquad q_2{}^* = (a - c)/3 \tag{3.6}$$

従って、$(q_1{}^*, q_2{}^*)$ はこの問題の PSE である。

この SE では、各会社は独占製品以下を製造するが、製品の合計は独占製品より大きい。この SE から各プレイヤーが受け取る利得は、次のようになる。

$$u_1(q_1{}^*, q_2{}^*) = \frac{a-c}{3}(a - \frac{a-c}{3} - \frac{a-c}{3}) - c\frac{a-c}{3} = \frac{(a-c)^2}{9} \tag{3.7}$$

この均衡で会社によって受け取られる合計量は、$(2/9)(a - c)^2$ である事に注意。これは、独占製品の $(a - c)/2$ を使って独占が受け取る量である $(1/4)(a - c)^2$ 以下である。これは、もし会社が協力する事ができるなら、製品と利益を分け合うことに同意する事で、利益を伸ばせる事を意味する。従って各々が $(a - c)/3$ ではなく $(a - c)/4$ 製造し、$(a - c)^2/9$ より大きい利益 $(a - c)^2/8$ を受け取ることができるだろう。

一方、複占価格は独占価格 $(a + c)/2$ 以下の $P(q_1{}^* + q_2{}^*) = (a + 2c)/3$ である ($c < a$ から)。従って、消費者は独占下より複占下の方がより良い。

この PSE は実際、ただ 1 つの SE である。これは、強被支配戦略の逐次除去によって成されているからである。これを確かめるために、固定点 q_2 に対して、q_1 の関数として正の傾きである関数 u_1 の点を考えよ。導関数 (3.4) は、$2q_1 + q_2 < a - c$ ならば正である。図 3.3.1 を見よ。

値 $^\forall q_2$ に対して、傾きは $^\forall q_1 < (a - c)/2$ に対して負である。従って、全ての $q_1 > (a - c)/2$ は、$q_1 = (a - c)/2$ によって強支配されている。

しかしゲームはプレイヤーらの間において対称なので、自然に全ての $q_2 > (a - c)/2$ は強支配され、取り除かれる。図における考察から、全てのそのような点が除かれた時、全ての残っている q_2 に対して、傾きは $^\forall q_1 < (a - c)/4$ に対して正である事がわかる。従って、全ての $q_1 < (a - c)/4$ は、$q_1 = (a - c)/4$ によって強支配されている。

再び、対称的に全ての $q_2 < (a - c)/4$ を取り除くと、全ての残っている q_2 に対して、傾きは $^\forall q_1 > 3(a - c)/8$ に対して負である事がわかる。従って、全ての $q_1 > 3(a - c)/8$ は、$q_1 = 3(a - c)/8$ によって強支配されている。そして、まだ取り除かれていない残っている q_1 の区間の下端から欠片を取り除き、上端から取り除く。これが無限回数続くなら、$q_1{}^*$ の点を除く強被支配戦略の逐次消去によって、そしてプレイヤーに対する $q_2{}^*$ の対称性によって、全ての q_1 が取り除かれる。

図 3.3.1

囚人のジレンマは、ここに少しだけ出ている事に注意せよ。強被支配戦略の消去によって得られた SE を使う代わりに、両方のプレイヤーが協力し、それぞれが $(a-c)/4$ 製造すれば、彼らはより良い状態になる。

3.3.2　Bertrand の複占のモデル

1883 年に、J.Bertrand は会社が製造数を固定する事ではなく、価格を設定する事に重点を置いた、2 人の複占者の間の競争の異なるモデルを提案した。このモデルでは、需要は得られる量の関数に値段をつけるのではなく、価格の関数である。

最初に、同一で消費者に対する価格情報が完全なので、会社がより低い値段を付ける 2 つの製品は、市場を占めるだろう。価格 P による量 Q に対して解かれる、次の同じ価格 (または需要) 関数 (3.1) を使う。

$$P(Q) = \begin{cases} a - P & (0 \le P \le a) \\ 0 & (P > a) \end{cases} = (a-P)^+ \tag{3.8}$$

実需は、P が最も低い価格の $Q(P)$ である。このモデルにおける独占の振る舞いは、前セクションの

Cournot のモデルと同じである。独占者は価格を $(a+c)/2$ に設定し、$(a-c)/2$ の量を製造し、$(a-c)^2/4$ の利益を受け取る。

会社 1 と 2 が、それぞれ価格を p_1 と p_2 と選んだとする。もし $p_1 = p_2$ ならば、2 つの会社は等しく市場を分け合う。製品 1 つあたりの製造コストを再び $c > 0$ とするので、利益は $p_i - c$ に売れた量をかけたものとなる。利得関数は、次のようになる。

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(a - p_1)^+ & (p_1 < p_2) \\ (p_1 - c)(a - p_1)^+/2 & (p_1 = p_2) \\ 0 & (p_1 > p_2) \end{cases} \tag{3.9}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_2 - c)(a - p_2)^+ & (p_2 < p_1) \\ (p_2 - c)(a - p_2)^+/2 & (p_2 = p_1) \\ 0 & (p_2 > p_1) \end{cases} \tag{3.10}$$

ここではただ 1 つの PSE があるが、それはむしろつまらないものである。両方の会社が製造コストを $p_1{}^* = p_2{}^* = c$ にし、利得 0 を受け取るというものである。これは各プレイヤーの safety level である。これが均衡であることをチェックするのは簡単である。どちらかの会社が他社の価格を少しずつ安くする事によって、市場全体を獲得できるため、他の価格の対に均衡はありえないのである。

他社の価格を安くする事による市場全体の獲得のこの特徴は、いくつかの理由で全く道理的でない。大抵 2 つの会社の製品は全く互いに交換できないので、いくらかの消費者はたとえ多少コストがかかっても 1 つの製品を好むかもしれない。加えて、消費者が価格の情報を得る問題があり、消費者によるブランドロイヤリティ (同一のブランド品を繰り返し購入する) の特徴がある。これを注意するための試みにおけるモデルの変更をする。

異なる製品の Bertrand モデル

再び、会社は価格 p_1 と p_2 を選び、製造コストを $c > 0$ とする。製品 1 つあたりの利益は $p_1 - c, p_2 - c$ で、価格は $p_1 \geq c, p_2 \geq c$ を満たす。今回は、与えられた価格の選択に対する会社の製品の需要関数は、次によって与えられるとする。

$$\begin{aligned} q_1(p_1, p_2) &= (a - p_1 + bp_2)^+ \\ q_2(p_1, p_2) &= (a - p_2 + bp_1)^+ \end{aligned} \tag{3.11}$$

$b > 0$ は、1 つの会社の製品を他社の製品の代わりにどれだけ用いるのかを表す定数である。簡単のために $b \leq 1$ とする。これらの需要関数は、1 つの会社がひょっとすると任意の高い値段をつけたり、他社もまた十分に高い値段をつけた時に正の需要がある時において、現実的ではない。しかしながら、この関数は本当の需要関数の近似を表すために選ばれており、均衡になった時の普通の価格設定を近似する。

これらの仮定の下で、会社の戦略集合は $X = [0, \infty), Y = [0, \infty)$ であり、利得関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} u_1(p_1, p_2) &= q_1(p_1, p_2)(p_1 - c) = (a - p_1 + bp_2)^+(p_1 - c) \\ u_2(p_1, p_2) &= q_2(p_1, p_2)(p_2 - c) = (a - p_2 + bp_1)^+(p_2 - c) \end{aligned} \tag{3.12}$$

均衡価格を求めるために、p_1 の中で u_1 を最大化し、同時に p_2 の中で u_2 を最大化する点 $(p_1{}^*, p_2{}^*)$ を見つけなくてはならない。$a - p_1 + bp_2 > 0, a - p_2 + bp_1 > 0$ と仮定すると、次が求められる。

$$\frac{\partial}{\partial p_1} u_1(p_1, p_2) = a - 2p_1 + bp_2 + c = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial p_2} u_2(p_1, p_2) = a - 2p_2 + bp_1 + c = 0$$

再び、関数は負の係数の微分変数において 2 次式なので、結果の根は最大値を示す。同時に解き、$p_1{}^*, p_2{}^*$ による結果を示すことで、次が得られる。

$$p_1{}^* = p_2{}^* = \frac{a + c}{2 - b}$$

3.3.3　Stackelberg の複占のモデル

Cournot と Bertrand の複占のモデルでは、プレイヤーは同時に行動している。H. von Stackelberg(1934) は、1 人のプレイヤー (支配プレイヤー、またはリーダーと呼ばれる) が最初に動かし、そのプレイヤーの結果は他のプレイヤーの選択がされる前に他のプレイヤーに知らされる複占のモデルを提案した。例としては、自動車産業の中で支配の役割を演じてきた、アメリカの歴史の中で十分に大きく、強い General Moters が良いかもしれない。この観点から Cournot のモデルを解析しよう。

会社 1 は製造量 q_1 を選択し、コストは 1 つあたり c かかる。この量は会社 2 に知られ、製造する量 q_2 を選択し、コストは c かかる。次に 1 つあたりの価格 P を式 (3.1) によって、$P = (a - q_1 - q_2)^+$ と定義し、プレイヤーらは式 (3.2) と (3.3) の $u_1(q_1, q_2), u_2(q_1, q_2)$ を受け取ると定義する。

プレイヤー　の純粋戦略集合は $X = [0, \infty)$ である。数学的な視点から、このモデルと Cournot のモデルとの唯一の違いは、会社 2 の純粋戦略集合 Y が、q_1 から q_2 への写像である関数の集合であるという事である。しかしながら、これは後向き帰納法によって解ける完全情報ゲームである。会社 2 は最後に動かすので、最初に q_1 の関数として最適な q_2 を求める。すなわち、q_2 について式 (3.5) を解く。これによって、会社 2 の戦略は次のように与えられる。

$$q_2(q_1) = (a - q_1 - c)/2 \tag{3.13}$$

会社 1 は、会社 2 がこの最適反応を選ぶ事がわかっているので、会社 1 は次を最大化するような q_1 を選びたい。

$$\begin{aligned} u_1(q_1, q_2(q_1)) &= q_1(a - q_1 - (a - q_1 - c)/2) - cq_1 \\ &= -\tfrac{1}{2}q_1{}^2 + \tfrac{a-c}{2}q_1 \end{aligned} \tag{3.14}$$

この 2 次式は $q_1 = q_1{}^* = (a - c)/2$ によって最大化する。そして、会社 2 の最適反応は $q_2{}^* = q_2(q_1{}^*) = (a - c)/4$ である。

この SE を解析し、Cournot の複占での SE の利得と比較しよう。会社 1 は独占量を製造し、会社 2 は Cournot の SE 以下を製造する。会社 1 への利得は $u_1(q_1{}^*, q_2{}^*) = (a - c)^2/8$ で、会社 2 への利得は

$u_2(q_1{}^*, q_2{}^*) = (a-c)^2/16$ である。従って会社 1 の利益は Cournot の均衡よりも大きく、会社 2 は小さい。製造量の合計は $(3/4)(a-c)$ で、Cournot の均衡の下での製造量の合計 $(2/3)(a-c)$ より大きい事に注意せよ。これは Stackelberg の価格が Cournot の価格より低い事を意味し、消費者は Stackelberg のモデルの下である方がより良い状態である。

会社 1 の製造について会社 2 が受け取る情報は、有害である。製造を宣言する事により、会社 1 は利益を増やす。これは、より情報を持つ事によってプレイヤーがより悪い状態になることを示している。さらに正確には、より情報を与えられ、普通の知識であるという事実を持つことによって、悪い状態に陥るかもしれない。

3.3.4 参入阻止

確かな市場において、たとえ会社が独占者として行動する事さえ、なぜ独占価格以下の価格をつけ、独占製造よりも多く製造するのに、会社の最大の関心があるのかという理由がある。これらの理由の 1 つは、高い価格の製品は、市場に新たな会社の参入を招くという事である。

次の例をこれを見る事ができる。価格と需要の関係を次のように表す。

$$P(Q) = \begin{cases} 17 - Q & (0 \le Q \le 17) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{3.15}$$

Q は製造量の合計を表し、P は単価を表す。さらに、会社が q_1 の製品を製造するのにかかるコストは $q_1 + 9$ とする。すなわち、固定コスト 9 と、さらに製品を 1 つ製造するのにつき、一定に 1 のコストがかかるという事である。製品を q_1 個製造した会社の利益は、次のようになる。

$$u(q_1) = (17 - q_1)q_1 - (q_1 + 9) = 16q_1 - q_1{}^2 - 9 \tag{3.16}$$

利益を最大にする q_1 の値は、u_1 の導関数を 0 にして q_1 について解く事で求められる。

$$u'(q_1) = 16 - 2q_1 = 0$$

よって独占製造は次のようになる。

$$q_1 = 8$$

独占価格は 9 で、独占利益は次のようになる。

$$u(8) = 9 \cdot 8 - 17 = 55$$

競争相手の会社が、この市場に目をつけ、少量 q_2 を製造し、できれば少々の利益を得ようと思っているとしよう。また、この会社は独占会社と同じように $q_2 + 9$ のコストがかかるとする。q_2 の量を製造する事で、価格は $P(8 + q_2) = 9 - q_2$ まで落ち、競争相手の会社は次の利益を得るだろう。

$$u_2 = (9 - q_2)q_2 - (q_2 + 9) = 8q_2 - q_2{}^2 - 9 \tag{3.17}$$

これは $q_2 = 4$ で最大化し、そこでの利益は $u_2 = 7$ である。これは正であるので、会社の参入の動機になる。

もちろん、今独占している会社はこの可能性を前もって予見し、これが会社の利益に悪い影響を及ぼす事も計算できる。もし参入者が 4 個製造すれば、価格は $P(8+4) = 5$ に下落し、独占会社の利益は 55 から $5 \cdot 8 - 17 = 18$ まで落ちる。何らかの予防策をとる事が無駄ではないというのは、道理的であるように思える。

独占会社が独占量よりもやや多くの量を製造すれば、参入しようと思う会社を思いとどまらせる事ができるかもしれない。どの程度製造すべきなのだろうか？独占会社が q_1 の量を製造すれば、参入会社の利益は次によって (3.17) で計算される。

$$u_2 = (q_1, q_2) = (17 - q_1 - q_2)q_2 - (q_2 + 9)$$

これは $q_2 = (16 - q_1)/2$ で最大化し、利益は次のようになる。

$$u_2(q_1, (16 - q_1)/2) = (16 - q_1)^2/4 - 9$$

$(16 - q_1)^2 = 36$ すなわち $q_1 = 10$ ならば、利益は 0 になる。これによって、独占会社が 8 より多くの 10 の量を製造すれば、参入者の利益が無くなるという事がわかる。

しかしながら、独占会社の利益は、8 ではなく 10 の量を製造する事によって減る。(3.16) から $q_1 = 10$ の時の会社への利益は、$q_1 = 8$ の時の 55 から、次のようになる。

$$u_1(10) = 7 \cdot 10 - 19 = 51$$

これは、参入者が現れた時の利益の大きな落ち 55 から 18 のための保険と考えれば、比較的小さなものである。

上の解析は、たとえ参入者が現れても、独占会社はそれまでと変わらず独占製造を続けるという仮定がある。これは、現在の独占会社を Stackelberg のモデルでの支配プレイヤーとして考えた場合である。$q_1 = 10$ は $q_2 = 0$ に対する最適反応ではないので、戦略対 $q_1 = 10, q_2 = 0$ は、この Stackelberg モデルでは戦略均衡ではない。この状況の特徴を解析するために、ゲームを連続的に数回プレーできるように拡張する。

Stackelberg の複占として解析する時、均衡では、支配プレイヤーが 8 の量を製造し、弱プレイヤーが 4 の量を製造する事で、価格は 5 になる。支配プレイヤーの利益は 23 で、弱プレイヤーの利益は 7 である。

この問題を Cournot の複占として解析すると、均衡では、各会社は $5\frac{1}{3}$ の量を製造し、価格は $6\frac{1}{3}$ になり、利益 $19\frac{4}{9}$ を実現する。この低い利益は、現在の会社が参入者を思いとどまらせるための大きな努力をしているという理由のためである。

3.3.5 Exercises

1. (a)Cournot モデルで、会社の製造コストがそれぞれ異なるとする。$c_1, c_2 (c_1, c_2 \leq a/2)$ をそれぞれ、会社 1,2 が製品を 1 つ製造するためのコストとする。Cournot の均衡を求めよ。

2 人のプレイヤーの利得関数は、次のようになる。

$$u_1(q_1, q_2) = q_1 P(q_1 + q_2) - c_1 q_1 = q_1(a - q_1 - q_2)^+ - c_1 q_1$$
$$u_2(q_1, q_2) = q_2 P(q_1 + q_2) - c_2 q_2 = q_2(a - q_1 - q_2)^+ - c_2 q_2$$

偏微分作用素が 0 になるようにする。

$$\frac{\partial}{\partial q_1} u_1(q_1, q_2) = a - 2q_1 - q_2 - c_1 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial q_2} u_2(q_1, q_2) = a - q_1 - 2q_2 - c_2 = 0$$

すると、次が求められる。

$$q_1{}^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3} \qquad q_2{}^* = \frac{a + c_1 - 2c_2}{3}$$

これが、この問題の PSE である。

(b) 加えて、各会社に設置コストが発生するとする。プレイヤー　が x 個製造するのに $x + 2$ かかり、　が y 個製造するのに $3y + 1$ かかるとする。また、価格関数を $p(x, y) = 17 - x - y(x, y$ は　と　による製造量) とする。均衡製造量と均衡利得は何か？

2 人のプレイヤーの利得関数は、次のようになる。

$$u_1(q_1, q_2) = q_1 p(q_1, q_2) - c_1 q_1 - (q_1 + 2) = q_1(17 - q_1 - q_2)^+ - c_1 q_1 - (q_1 + 2)$$
$$u_2(q_1, q_2) = q_2 p(q_1, q_2) - c_2 q_2 - (3q_2 + 1) = q_2(17 - q_1 - q_2)^+ - c_2 q_2 - (3q_2 + 1)$$

これを (a) と同様に偏微分作用素が 0 になるような q_1^*, q_2^* を求めると、

$$q_1{}^* = \frac{18 - 2c_1 + c_2}{3} \qquad q_2{}^* = \frac{12 + c_1 - 2c_2}{3}$$

この時の利得は、

$$u_1(q_1, q_2) = \frac{(c_2 - 2c_1 + 36)^2}{9} - 110$$
$$u_2(q_1, q_2) = \frac{(c_1 - 2c_2 + 24)^2}{9} - 49$$

2. 3.3.1 の Cournot モデルを 3 つの会社に拡張する。会社 i は、$cq_i(c > 0)$ コストがかかる q_i の量を製造する事を選択する。価格は $P(Q) = (a - Q)^+(Q = q_1 + q_2 + q_3)$ である。戦略均衡は何か？
3 人のプレイヤーの利得関数は、次のようになる。

$$u_1(q_1, q_2, q_3) = q_1 P(q_1 + q_2 + q_3) - cq_1 = q_1(a - q_1 - q_2 - q_3)^+ - cq_1$$
$$u_2(q_1, q_2, q_3) = q_2 P(q_1 + q_2 + q_3) - cq_2 = q_2(a - q_1 - q_2 - q_3)^+ - cq_2$$
$$u_3(q_1, q_2, q_3) = q_3 P(q_1 + q_2 + q_3) - cq_3 = q_3(a - q_1 - q_2 - q_3)^+ - cq_3$$

偏微分作用素が 0 になるようにする。

$$\frac{\partial}{\partial q_1} u_1(q_1, q_2, q_3) = a - 2q_1 - q_2 - q_3 - c = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial q_2} u_2(q_1, q_2, q_3) = a - q_1 - 2q_2 - q_3 - c = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial q_3} u_3(q_1, q_2, q_3) = a - q_1 - q_2 - 2q_3 - c = 0$$

すると、次が求められる。

$$q_1{}^* = q_2{}^* = q_3{}^* = \frac{(a - c)}{4}$$

3. Bertrand モデルを、Cournot モデルの Stackelberg モデルとして価格の連続的な選択ができる異なる製品に変更する。支配プレイヤーは価格を最初に宣言し、下位プレイヤーは価格を選ぶ。後向き帰納法によって解き、同時に選択するモデルの SE と比較せよ。
プレイヤー　を支配プレイヤー、プレイヤー　を下位プレイヤーとする。プレイヤー　は最後に価格 p_2 を選択するので、プレイヤー　の価格 p_1 の関数として最適な p_2 を求めると、プレイヤー　の戦略は次のように与えられる (b は (3.11) と同じ)。

$$p_2(p_1) = \frac{(a - bp_1 + c)}{2}$$

プレイヤー　は　がこの最適反応を選ぶ事がわかっているので、プレイヤー　は次を最大化するような p_1 を選ぶ。

$$\begin{aligned} u_1(p_1, p_2(p_1)) &= (a - p_1 + b \cdot \frac{a - bp_1 + c}{2})(p_1 - c) \\ &= -(1 + \frac{b^2}{2})p_1{}^2 + (a + c + \frac{ab + bc + b^2c}{2})p_1 - ac - \frac{abc + bc^2}{2} \end{aligned}$$

これを解くと、

$$p_1 = p_1{}^* = \frac{(a + c)(b + 2) + b^2c}{2(b^2 + 2)} \qquad p_2 = \frac{(a + c)(3b^2 - 2b + 8) - b^3c}{4(b^2 + 2)}$$

4. やや現実的な次の価格関数の Cournot の複占のモデルを考えよ。

$$P(Q) = \begin{cases} \frac{1}{4}Q^2 - 5Q + 26 & (0 \le Q \le 10) \\ 1 & (Q \ge 10) \end{cases}$$

この価格関数は $Q = 0$ の時の 26 で始まり、$Q = 10$ の時には 1 まで減り、それからはそのままである。両方の会社が製品 1 つを製造するためのコストは $c = 1$ である。利益がかろうじて製品 1 つ

を製造するためのコストを払えるものになるので、10 個以上を製造する会社はない。従って、量 q_1, q_2 は区間 $[0, 10]$ に制限できる。
(a) 独占製造量と最適な独占リターンを求めよ。
プレイヤー　が q_1 個の製品を製造した時の利得関数は、次のようになる。

$$u(q_1) = q_1(\frac{1}{4}{q_1}^2 - 5q_1 + 26) - q_1$$

この関数の増減を調べると、$q_1 = 10/3$ の時に最大となる。その場合の利得は、1000/27 である。

(b)$q_2 = 5/2$ の時、$(u_1, 5/2)$ が $q_1 = 5/2$ で最大化する事を示せ。これが、$q_1 = q_2 = 5/2$ が複占における均衡製造量である事を意味する事を示せ。
プレイヤー　が $q_2 = 5/2$ 個を製造した時のプレイヤー　の利得関数は、次のようになる。

$$\begin{aligned} u_1(q_1, \frac{5}{2}) = q_1 P(q_1 + \frac{5}{2}) - q_1 \\ = q_1\{\frac{1}{4}(q_1 + \frac{5}{2})^2 - 5(q_1 + \frac{5}{2}) + 26\} - q_1 \\ = \frac{1}{4}{q_1}^3 - \frac{15}{4}{q_1}^2 + \frac{225}{16}q_1 \end{aligned}$$

この関数の増減を調べると、$q_1 = 5/2$ の時に最大値 125/8 をとる。ゲームの対称性より、$u(5/2, q_2)$ についても $q_2 = 5/2$ の時に最大値をとるので、これは確かにこのゲームの PSE である。

5. **広告活動**

2 つの会社が、確実な販売代理店などへの広告に関する計画へのある量の努力に投資する事による与えられる市場の合計の値 V を計算する事ができる。各会社は、この目的のためにある量を割り当てるかもしれない。会社 1 が $x > 0$、会社 2 が $y > 0$ を割り当てた場合、市場のシェアを会社 1 が $x/(x + y)$ 占めることになる。これらの資金を割り当てるに当たっては、それぞれの会社には異なる困難がある。会社 i が 1 つ割り当てるのにかかるコストは、$c_i(i = 1, 2)$ である。従って 2 つの会社の利益は、次のようになる。

$$M_1(x, y) = V \cdot \frac{x}{x + y} - c_1 x$$

$$M_2(x, y) = V \cdot \frac{x}{x + y} - c_2 y$$

x, y が両方 0 の場合、両方の利得は 0 である。
(a) 均衡分配と、V, c_1, c_2 についての関数としての 2 つの会社の均衡利益を求めよ。
偏微分作用素が 0 になるようにする。

$$\frac{\partial}{\partial x} M_1(x, y) = V \cdot \frac{y}{(x + y)^2} - c_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M_2(x, y) = V \cdot \frac{x}{(x + y)^2} - c_2 = 0$$

よって、次が求められる。

$$x^* = \frac{c_2 V}{(c_1 + c_2)^2} \qquad y^* = \frac{c_1 V}{(c_1 + c_2)^2}$$

この時の会社 1,2 の利益は、次のようになる。

$$M_1(x^*, y^*) = \frac{{c_2}^2 V}{(c_1 + c_2)^2} \qquad M_2(x^*, y^*) = \frac{{c_1}^2 V}{(c_1 + c_2)^2}$$

(b)$V = 1, c_1 = 1, c_2 = 2$ の場合に限定せよ。

(a) で求めた式に代入すると、$x = 2/9, y = 1/9$ の時に、会社の利益はそれぞれ $M_1(2/9, 1/9) = 4/9, M_2(2/9, 1/9) = 1/9$ となる。

3.4 協力ゲーム

非協力ゲーム理論の 1 つの形では、プレイヤーらの間のコミュニケーションが許されるが、合意を結ぶ事は禁じられている。協力ゲーム理論では、プレイヤーらのコミュニケーションが許され、合意を結ぶ事もまた許されている。これは、合意をさせるための外部からのある体系が必要となる。非協力ゲーム理論では、ナッシュ均衡という結果が、合意を破って得るものがあるプレイヤーはいない、という自己拘束的であるため、幾つかのナッシュ均衡がただ 1 つの信じられる結果となっている。協力ゲーム理論において合意を強制的に結ばせる特別な自由により、プレイヤーらの状況は一般的により良くなる。例えば囚人のジレンマでは、ただ 1 つのナッシュ均衡は両方のプレイヤーが共に裏切るものであった。協力ゲーム理論では、両方とも協力戦略を使うという合意を結び、両方のプレイヤーの状況が良くなるだろう。

協力ゲーム理論は、1 人のプレイヤーから他への効用の譲渡の体系があるかないかで、2 つの種類の問題に分けられる。そのような体系があれば、譲渡できる物を金銭と考え、両方のプレイヤーが金銭の 1 次の効用を持つとする。それぞれの効用を、金銭がない効用を 0、金銭の 1 単位の効用を 1 と測る。3.4.2 では、**譲渡可能な効用** (TU) の場合を扱う。3.4.3 では、**譲渡不可能な効用** (NTU) の場合を扱う。

3.4.1 利得ベクトルの実行可能集合

協力ゲーム理論の主な特徴の 1 つは、プレイヤーが共同戦略を選ぶ自由を持つ事である。これは、達成される利得ベクトルの混合の全ての確率を許す。例えば男女の争いでは、どちらの映画を見るかを決めるために、コインをトスする事に同意する事ができる (彼らは非協力ゲームでもこれをする事ができるが、コインをトスした後で、協力ゲーム理論ではコイントスは合意の一部であるのに対し、彼らはその意思を変える事ができる)。プレイヤーらが協力した場合に達成できる利得ベクトルの集合を、実行可能集合という。TU の場合の目立つ特徴は、プレイヤーらが合意の一部として効用の **side payment** をする事ができるという事である。この特徴は、NTU 実行可能集合と TU 実行可能集合の違いに起因する。

行列の双行列 (A, B) でプレイヤーが協力する時、全ての mn 点の利得ベクトル $(a_{ij}, b_{ij}(i = 1, ..., m\ \ j = 1, ..., n))$ を達成する事に合意できる。彼らはまた、これらの点の全ての確率混合も合意できる。全てのそのような利得ベクトルの集合は、これらの mn 点を凸包する。譲渡可能な効用なしで、これは達成できる全てである。

■Definition　NTU 実行可能集合は、mn 点の $(a_{ij}, b_{ij})(i = 1, ..., m\ \ j = 1, ..., n)$ を凸包する。

side payment をする事により、利得ベクトル (a_{ij}, b_{ij}) は、$(a_{ij} + s, b_{ij} - s)$ に変えられる。s が正なら、これはプレイヤー　からプレイヤー　への side payment を表す。s が負なら、プレイヤー　からプレイヤー　への side payment を表す。従って点 (a_{ij}, b_{ij}) を通る全体の線の傾き -1 は、TU 実行可能集合の一部である。そしてこれらの確率混合も同様にできる。

■Definition　TU 実行可能集合は、任意の実数 s に対して、$(a_{ij}+s, b_{ij}-s)(i=1,...,m\ \ j=1,...,n)$ の形のベクトル集合の凸包である。

例として、次の左上と右下に 2 つの純粋戦略均衡を持っている双行列を挙げる。

$$\begin{pmatrix} (4,3) & (0,0) \\ (2,2) & (1,4) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

このゲームは、図 3.4.1 で与えられる NTU 実行可能集合と TU 実行可能集合を持っている。

図 3.4.1

協力ゲームで合意に達した場合、TU または NTU ゲームとなり、少なくとも他の 1 人のプレイヤーがより悪くなる事がなければどのプレイヤーの状況も良くならない事が期待される。そのような結果をパレート最適という。

■Definition　実行可能な利得ベクトル (v_1, v_2) は、ただ 1 つの実行可能な利得ベクトル $(v_1', v_2')(v_1' \geq v_1, v_2' \geq v_2)$ がベクトル $(v_1', v_2') = (v_1, v_2)$ の時、**パレート最適**という。

上の例では、NTU ゲームのパレートの実行可能な結果は、単純に点 (4,3),(1,4) をつないだ線分のベクトルである。TU ゲームのパレート最適の結果は、点 (4,3) を通る線の傾き –1 のベクトルである。

平面でのより一般的な凸面の実行可能集合に対して、パレート最適の点の集合は右上の境界点の集合である。

3.4.2　譲渡可能な効用の協力ゲーム

このセクションでは、譲渡可能な効用の場合に制限し、2 人のプレイヤーが、個々の異なる効用の 2 つの可能な結果の選択を与えられた両方のプレイヤーは、より高い効用を選択するという意味の「理性的」であると仮定する。

TU 問題

ゲームのモデルでは、両方のプレイヤーが協力へと導くための side payment の可能性を持って、一緒に共同戦略を選ぶ可能性を議論するために会う、プレーする前の交渉の段階がある。彼らはまた、合意をできなかった時に起こる事も議論する。つまり、それぞれが相手を悪い状況に陥れる単独の戦略を使う、と脅す事である。

もし合意が結べれば、利得ベクトルはパレート最適と仮定できる。これは、もしプレイヤーらが何らかの実行可能なベクトル v に合意しようとし、他のプレイヤーの状況が悪くならずにプレイヤーの 1 人の状況を良くするもう 1 つの実行可能なベクトル v' があるならば、そのプレイヤーは他のプレイヤーへの効用における自分の利益のいくらかを譲渡する上で、ベクトル v' に変える提案をする事ができるからである。他のプレイヤーが理性的であるのならば、この提案に合意するだろう。

議論では、合意に達しなかった場合に両方のプレイヤーがどの戦略を使うかという何らかの脅しをする事ができる。しかしながら、信用できる脅しは、相手よりも大きな度合いで自分に損害を与えてはならない。そのような脅しは説得力がないだろう。例えば、次の双行列ゲームを考えよ。

$$\begin{pmatrix} (5,3) & (0,-4) \\ (0,0) & (3,6) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

もし合意が結べれば、最も大きな利得 9 が得られるため、右下の角を使うだろう。プレイヤー　は少なくともその合計の半分 $4\frac{1}{2}$ を受け取るべきであると主張するかもしれない。プレイヤー　は自分の勝ち分である 6 のいくらかを、side payment として気前良く譲渡しようとするかもしれない。しかしながら、プレイヤー　は少なくとも 5 を得られない限り、1 行目を使う、と脅すかもしれない。プレイヤー　が 1 行目を使うと、プレイヤー　はプレイヤー　よりも損害を受けるため、2 列目を使ってその脅しに反撃する事ができないため、その脅しはとても説得力がある。脅しへの反撃は説得力がないのだ。

プレー前の交渉のこのモデルでは、脅しとその反撃は決定する時まで何度もする事ができる。最終的にプレイヤーらは、合意に達しなかった場合に行う脅しが何かを宣言する。合意に達しなかった場合、プレイヤーは交渉のテーブルを去り、脅しを実行すると仮定する。しかしながら、理性的なプレイヤーなら、合意を結ぶ事によってさらに高い効用が得られるので、確かに合意を結ぶだろう。脅しは、もし 1 人のプレイヤーからの他のプレイヤーへの side payment があれば、それに対する道理的な量を導く形式的な方法でしかない。

TU 問題は、賢明に脅しを選ぶ事と side payment を提案する事である。プレイヤーらは、最終的な利得ベクトルの選択に影響を及ぼすための脅しを使う。問題は、その脅しがどう最終的なベクトルに影響を及

ぼすのか、そしてプレイヤーはどのような脅しの戦略を選ぶべきなのか？

TU 解

プレイヤーらが合意に達するならば、最も大きい合計利得 σ を達成するプレーに合意し、その利得を分け合う事が理性的である。

$$\sigma = \max_i \max_j (a_{ij} + b_{ij}) \tag{3.3}$$

すなわち、彼らは何らかの行 i_0 と列 j_0 を使って $a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} = \sigma$ となるように共に合意するだろうという事である。そのような共同選択 $< i_0, j_0 >$ を、**協力戦略**という。しかし、彼らはまた、$x^* + y^* = \sigma$ のような何らかの最終的な利得 (x^*, y^*) についても、適切になるように合意を結ばなくてはならない。分割には、あるプレイヤーから他への **side payment** が必要となるかもしれない。もし $x^* < a_{i_0 j_0}$ なら、プレイヤーはプレイヤー　から $a_{i_0 j_0} - x^*$ の side payment を受け取るだろう。

プレイヤー　が p、プレイヤー　が q を使う**脅し戦略**を選択するとする。合意に達しなかった場合、プレイヤー　は $p^\top Aq$、プレイヤー　は $p^\top Bq$ を得る。結果的な次の利得ベクトルは、NTU 実行可能集合の元であり、**不一致点**または**脅し点**という。

$$D = D(p, q) = (p^\top Aq, p^\top Bq) = (D_1, D_2) \tag{3.4}$$

一度不一致点が決まれば、プレイヤーらは協力解として使われる $x + y = \sigma$ の線上の点 (x, y) に合意しなくてはならない。合意に達しなかった時にこれらが達成できるので、プレイヤー　は D_1 も受け入れ、プレイヤー　は D_2 も受け入れる。しかし、一度不一致点が決まったら、ゲームは対称になる。プレイヤーらは、$(D_1, \sigma - D_1)$ から $(\sigma - D_2, D_2)$ の区間の線上における協力解を選ぶために議論する。さらなるルールで行列 A, B をプレーする事についての他の考察はない。従って、次の区間の中点は自然な妥協となる。

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = \left(\frac{\sigma - D_2 + D_1}{2}, \frac{\sigma - D_1 + D_2}{2} \right) \tag{3.5}$$

合意が破られた場合に、両方のプレイヤーが等しく損害を受ける。点 φ は、図 3.4.2 における D からの傾き 45°の線を線 $x + y = \sigma$ と交わるまで描く事によって決まる。

(3.5) から、プレイヤーらが脅し点を選ぶ時に使うべき基準がわかる。プレイヤー　は $D_1 - D_2$ を最大化することを望み、プレイヤー　はそれを最小化することを望む。これは実際、行列 $A - B$ のゼロ和ゲームである。

$$D_1 - D_2 = p^\top Aq - p^\top Bq = p^\top (A - B) q \tag{3.6}$$

p^*, q^* が、プレイヤー　、　それぞれに対するゲーム $A - B$ の最適戦略を表すとする。δ はその値を表す。

$$\delta = \mathrm{Val}(A - B) = p^{*\top} (A - B) q^* \tag{3.7}$$

もしプレイヤー　が脅しとして p^* を使うなら、プレイヤー　ができる最善の手は q^* を使う事であり、逆もそうである。$\delta = p^{*\top} Aq^* - p^{*\top} Bq^* = D_1{}^* - D_2{}^*$ なので、次の TU 解を得る。

$$\varphi^* = (\varphi_1{}^*, \varphi_2{}^*) = \left(\frac{\sigma + \delta}{2}, \frac{\sigma - \delta}{2} \right) \tag{3.8}$$

図 3.4.2

使われる協力戦略 $a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} = \sigma$ として、プレイヤーらが $< i_0, j_0 >$ を決めたとする。利得 (3.8) を達成するために、プレイヤー　からプレイヤー　への $(\sigma + \delta)/2 - a_{i_0 j_0}$ の side payment を必要とする。この量が負なら、$a_{i_0 j_0} - (\sigma + \delta)/2$ の支払いを、プレイヤー　からプレイヤー　にする。

Examples

1. 次の双行列の TU ゲームを考えよ。

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (6,2) & (-1,2) \\ (4,1) & (3,6) & (5,5) \end{pmatrix}$$

これは図 3.4.2 を基にした行列である。しかし、最適な不一致点は図のものとは多少違う位置にあるのがわかるだろう。

$a_{ij} + b_{ij}$ の最大値は、合計利得が $\sigma = 10$ となる協力戦略 $< 2, 3 >$ があるので、第 2 行第 3 列で起こる。プレイヤーらが合意に達すれば、プレイヤー　が 2 行目を選択し、プレイヤー　は 3 列目を選択して、両方のプレイヤーは 5 の利得を得る。もし side payment があるなら、彼らはそれも決めなくてはならない。

彼らは次の行列のゼロ和ゲームを考える。

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

1 列目は 3 列目によって強支配されている。よって、脅し戦略は次のように簡単に決まる。

$$p^* = (.3, .7)^\top$$
$$q^* = (0, .3, .7)^\top$$

このゲームの値は、$\delta = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -9/10$ である。従って (3.8) から、TU 値は次のように

なる。

$$\varphi^* = ((10 - .9)/2, (10 + .9)/2) = (4.55, 5.45)$$

利得ベクトル $(5, 5)$ に合意する事からこの利得を導くために、プレイヤー　からプレイヤー　に 0.45 の side payment をする必要がある。
また、不一致点 $D^* = (D_1{}^*, D_2{}^*)$ は次のように計算する事もできる。

$$D_1{}^* = p^{*\top} A q^* = .3(6 \cdot .3 - .7) + .7(3 \cdot .3 + 5 \cdot .7) = 3.41$$

$$D_2{}^* = p^{*\top} B q^* = .3(2 \cdot .3 + 2 \cdot .7) + .7(6 \cdot .3 + 5 \cdot .7) = 4.31$$

$D_2{}^* - D_1{}^* = \varphi_2{}^* - \varphi_1{}^* = 0.9$ より、D^* から φ^* の線は 45°である事が容易にわかる。

2. 協力戦略が、利得の合計 σ に従った 1 つの可能性だけではない事に気づく事は、価値がある事である。それに使われる side payment はそれに依存する。また、ゲーム $A - B$ の最適戦略は 1 つの対だけではないので、不一致点もさらに存在する。しかしながら、全てのそのような不一致点は、点 φ が値 δ を通る唯一の不一致点に依存し、全ての不一致点が同じ値を持つので、同じ 45°上になければならない。
ここで、その両方の可能性を含んだ例を紹介する。

$$\begin{pmatrix} (1, 5) & (2, 2) & (0, 1) \\ (4, 2) & (1, 0) & (2, 1) \\ (5, 0) & (2, 3) & (0, 0) \end{pmatrix}$$

合計利得 $\sigma = 6$ から与えられる 2 つの協力戦略 $< 1, 1 >, < 2, 1 >$ がある。行列 $A - B$ は、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

saddle-point は $< 2, 3 >$ である。従って $D = (2, 1)$ は不一致点であり、値は $\delta = 1$ である。従って TU 協力値は $\varphi = (7/2, 5/2)$ である。
しかしながら、もちろん同じ値 $\delta = 1$ がある $< 2, 2 >$ でのもう 1 つの saddle-point がある。しかし、今回の不一致点は (1,0) である。全てのそのような不一致点は、φ を通る 45°の線上になければならない。
もし $< 2, 1 >$ が協力戦略として使われるなら、結果的な利得ベクトル (4,2) は、プレイヤー　がプレイヤー　に 1/2 払う事を必要とする。もし $< 1, 1 >$ が協力戦略として使われるなら、結果的な利得ベクトル (5,1) は、プレイヤー　がプレイヤー　に 3/2 払う事を必要とする。

3.4.3　譲渡不可能な効用の協力ゲーム

これから、side payment が禁止されているゲームを考える。プレイヤーの効用の大きさが、それぞれ比べられない単位で測られているとする。プレイヤーらは、議論し、脅し、前のように合意を結ぶ。しかし、

プレイヤーらが side payment をする合意ができる金銭の単位がない。プレイヤーらは自分が持っているものを物々交換できるが、ゲームとゲームの双行列を反映したものの中で成されなくてはならない。

NTU ゲームを**ナッシュ交渉モデル**を通して解析する。このモデルは、プレイヤーらに与えられ、知られていると仮定された 2 つの要素に基づいている。1 つ目の要素は、平面におけるコンパクトな凸集合 S である。それは、協力する事に合意したプレイヤーらによって達成可能である利得ベクトルの集合として S を考える事である。多面体にする必要のないという多少より一般的であるが、NTU 実行可能集合の類比である。例えば、円や楕円になることができる。S を **NTU-実行可能集合**とする。

ナッシュ交渉モデルの 2 つ目の要素は、**脅し点**、または**現状点**という点 $(u^*, v^*) \in S$ である。ナッシュは、物を交換するために市場に来る 2 人のプレイヤーのゲームとして、交渉モデルを見ていた。彼は、プレイヤーらは少しも商売の合意に至らない選択肢を持っているとし、$(u^*, v^*) = (0, 0) \in S$ として現状点を取るのが自然であるとした。後の定理は (u^*, v^*) が S の任意の点である事を必要とする。

NTU-実行可能集合 S と脅し点 (u^*, v^*) が与えられ、問題は、何らかの方法でプレイヤーらへのゲームの値を反映するであろうこのゲームの実行可能な結果のベクトルを決める事である。すなわち、任意のコンパクト凸集合 S と点 $(u^*, v^*) \in S$ に対する、ゲームの公平で道理的な結果か、解を考えるために点 $(\overline{u}, \overline{v}) = f(S, u^*, v^*)$ を求めたい。ナッシュの方法では、公平で道理的という事が幾つかの公理で定義されている。そして、これらの公理がただ 1 つの解 $f(S, u^*, v^*)$ を導く事が示される。次がその公理である。

■ $f(S, u^*, v^*) = (\overline{u}, \overline{v})$ **に対するナッシュの公理**

(1) **実行可能性** $(\overline{u}, \overline{v}) \in S$
(2) **パレート最適性** $u \geq \overline{u}, v \geq \overline{v}$ のような点 (u, v) は、$(\overline{u}, \overline{v})$ を除いて存在しない。
(3) **対称性** もし S が線 $u = v$ について対称で、$u^* = v^*$ なら、$\overline{u} = \overline{v}$ である。
(4) **無関係選択肢からの独立性** もし T が S の閉凸部分集合で、$(u^*, v^*) \in T, (\overline{u}, \overline{v}) \in T$ なら、$f(T, u^*, v^*) = (\overline{u}, \overline{v})$ である。
(5) **位置と規模の変更の下での不変性** もし $T = \{(u', v') : u' = \alpha_1 u + \beta_1, v' = \alpha_2 v + \beta_2 \text{ for } (u, v) \in S\}(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0)$ ならば、次が成り立つ。

$$f(T, \alpha_1 u^* + \beta_1, \alpha_2 v^* + \beta_2) = (\alpha_1 \overline{u} + \beta_1, a_2 \overline{v} + \beta_2)$$

公理の解析

他の解を許す事を弱めるか変えるかのどちらにするかを決めるために、公理を復習するのは有益である。

1 つ目の公理は明白である。合意された結果は、実行可能でなければならない。

2 つ目の公理はプレイヤーらの理性的行動を示す。もしプレイヤーらが共に動き、合意に達すれば、彼らが $(\hat{u}, \hat{v})(\hat{u} > u, \hat{v} > v)$ もまた達成できるなら、結果として (u, v) を受け入れないだろう。しかしながら、2 つ目の公理はややこれより強い。もし彼らが $(\hat{u}, \hat{v})(\hat{u} \geq u, \hat{v} > v)$(もしくは $\hat{u} > u, \hat{v} \geq v$) を達成できるなら、彼らは (u, v) を受け入れないという事である。これは定理の主な場合における役割を演じない

$((u,v) \in S$ s.t. $u > u^*, v > v^*)$。しかし S は、(0,0) から (0,1) までの線と、(u^*, v^*) を含んでいる。プレイヤー　は、何の合意にも至らなくても 0 の利得を達成できる。よって点 (0,1) で合意するために、彼の部分における弱い意味での利他的な行動が必要となる。この合意が彼に損害を与える事はないのは事実だが、依然この弱い意味での利他は、仮定されたプレイヤーらの理性的行動から続かない。

3 つ目の公理は、公平性の公理である。もしゲームがプレイヤーらで対称なら、プレイヤーらを区別するものが、ゲーム内に何もないので、結果は対称になるべきである。

4 つ目の公理は、おそらく最も議論の余地があるものである。2 人のプレイヤーが、S が実行可能集合である時、$(\overline{u}, \overline{v})$ が公平で道理的な解である事に同意するならば、$(\overline{u}, \overline{v})$ から遠く離れた S の点と (u^*, v^*) は、関連性がない。もし S が部分集合 $T \subset S$ に縮小されるなら、T が $(\overline{u}, \overline{v})$ と (u^*, v^*) を含んでいる間は、プレイヤーらは $(\overline{u}, \overline{v})$ で合意するだろう。しかし、S を頂点 (0,0),(0,4),(2,0) の三角形とし、脅し点を (0,0) とする。プレイヤーらは結果として (1,2) で合意する。もし実行可能集合が、頂点 (0,0),(0,2),(1,2),(2,0) の四角形の T であれば、(1,2) に合意するだろうか。逆に、T に対して彼らが (1,2) で合意すれば、S に対して (1,2) に合意するだろうか。S の余分な点は、全ての脅しが仮定された脅し点の中に対して説明されると仮定されるので、脅しとして使う事ができない。これらの余分な点は、達成できない望み、または理想を表し、プレイヤー　は結果 (1,2) に合意する事によってそれを認める。

5 つ目の公理は、プレイヤーらの効用が、位置や規模の変更のみで別々に決められているという事の理解を表している。従って、プレイヤーの 1 人が効用の位置や規模を変えると決めたとすれば、これは双行列の数字を変えるが、ゲームは変わらない。合意された解は、同じ変更を経るべきである。

■Theorem　ナッシュの公理を満たすただ 1 つの関数 f が存在する。さらに、もし点 $(u,v) \in S$ s.t. $u > u^*, v > v^*$ が存在するのなら、$f(S, u^*, v^*)$ は $(u-u^*)(v-v^*)$ を $u \geq u^*, v \geq v^*$ のような S の点の中で最大化する S の点である。

下で、点 $(u,v) \in S$ s.t. $u > u^*, v > v^*$ が存在する興味深い場合の証明の概略を述べる。つまらない事例は、例の左である。

最初に、点 $(\overline{u}, \overline{v}) \in S^+ = \{(u,v) \in S : u \geq u^*, v \geq v^*\}$ が確かにナッシュの公理を満たすかどうかをチェックする。最初の 4 つの公理を証明するのはとても簡単である。5 つ目の公理をチェックするために、以下に注意する。

$(u-u^*)(v-v^*)$ が S^+ において $(\overline{u}, \overline{v})$ で最大化するなら、
$(\alpha_1 u - \alpha_1 u^*)(\alpha_2 v - \alpha_2 v^*)$ は、S^+ において $(\overline{u}, \overline{v})$ で最大化する。
よって、$(\alpha_1 u + \beta_1 - \alpha_1 u^* - \beta_1)(\alpha_2 v + \beta_2 - \alpha_2 v^* - \beta_2)$ は、S^+ において $(\overline{u}, \overline{v})$ で最大化し、
従って $(u' - \alpha_1 u^* - \beta_1)(v' - \alpha_2 - \beta_2)$ は、$T^+ = \{(u', v') \in S^+ : u' = \alpha_1 u + \beta_1, v' = \alpha_2 v + \beta_2\}$ において $(\alpha_1 \overline{u} + \beta_1, \alpha_2 \overline{v} + \beta_2)$ で最大化する。

公理が点をただ 1 つに定義しているのかを確かめるため、確かな特別な集合 S に対して存在しなくてはならない $(\overline{u}, \overline{v})$ を求め、全ての閉有界凸集合に少しずつ拡張する。最初に、もし S が線 $u = v$ と $(0,0) \in S$

について対称なら、公理 (1),(2),(3) は、$f(S,0,0)$ が線 $u=v$ から最も遠い点 $(z,z)\in S$ である事を意味している事に注意せよ。公理 (4) は、もし T が半平面 $H_z=\{(u,v):u+v\leq 2z\}(z>0)$ の全ての閉有界凸集合で、$(z,z)\in T$ なら、そのような集合 T が、同じ特性の対称集合の部分集合であるので、$f(T,0,0)=(z,z)$ である事を意味する。

今、任意の閉凸集合 S と $(u^*,v^*)\in S$ に対して、$(\hat{u},\hat{v})$ を $(u-u^*)(v-v^*)$ を最大化する S^+ の点とする。$\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ を $\begin{cases}\alpha_1 u^*+\beta_1=0\\ \alpha_1\hat{u}+\beta_1=1\end{cases},\begin{cases}\alpha_2 v^*+\beta_2=0\\ \alpha_2\hat{v}+\beta_2=1\end{cases}$ となるように定義し、T を公理 (5) と同じであるとする。位置と規模の変更の下での $(\hat{u},\hat{v})$ の不変性によれば、点 $(1,1)=(\alpha_1\hat{u}+\beta_1,\alpha_2\hat{v}+\beta_2)$ が、T^* において $u\cdot v$ を最大化する。点 $(1,1)$ における曲線 $uv=1$ の傾きは -1 なので、凸集合 T は、H_1 の部分集合で、よって前の段落の最後の文により、$f(T,0,0)=(1,1)$ である。公理 (5) によって、$f(T,0,0)=(\alpha_1\overline{u}+\beta_1,\alpha_2\overline{v}+\beta_2)(f(S,u^*,v^*)=(\overline{u},\overline{v}))$ である。$(\alpha_1\overline{u}+\beta_1,\alpha_2\overline{v}+\beta_2)=(1,1)=(\alpha_1\hat{u}+\beta_1,\alpha_2\hat{v}+\beta_2)$ より、$\overline{u}=\hat{u},\overline{v}=\hat{v}$ で、その結果 $(\hat{u},\hat{v})=f(S,u^*,v^*)$ となる。■

幾何学的な説明をする。曲線 (双曲線)$(u-u^*)(v-v^*)=c$(c は定数) を考えよ。十分に大きい c に対して、この曲線は S と交わらないだろう。曲線が S にちょうど接するまで、c を小さくする。NTU 解は、接点である。

図 3.4.3

さらに、接点 $(\overline{u},\overline{v})$ において、曲線の傾きは、(u^*,v^*) から $(\overline{u},\overline{v})$ の線の傾きの負である (これをチェックせよ)。

例

1. S を、頂点 $(0,0),(0,1),(3,0)$ の三角形とし、脅し点を $(0,0)$ とする。パレート最適境界は、傾き $-1/3$ の $(0,1)$ から $(3,0)$ の線である。$u \cdot v = c$ の形の曲線は、接点で必ず傾き $-1/3$ でこの線と接する。よって、$(0,0)$ から $(\overline{u},\overline{v})$ の線の傾きは、$-1/3$ でなければならない。これは、中点 $(3/2,1/2)$ でパレート境界と交わる。これは、従って NTU 解である。

図 3.4.4

2. NTU-実行可能集合を楕円 $S = \{(x,y) : (x-2)^2 + 4(y-1)^2 \leq 8\}$ とする。脅し点を $(u^*,v^*) = (2,1)$ とする。状況は、図 3.4.2 とよく似ている。積 $(x-2)(y-1)$ を最大化する点 $(x,y) \in S$ が、NTU 解である。この点は、$(2,1+\sqrt{2})$ から $(2+2\sqrt{2},1)$ の楕円の弧を含むパレート最適境界でなくてはならない。この弧において、$y-1 = \sqrt{2-(x-2)^2/4}$ で、よって、$(x-2)(y-1) = (x-2)\sqrt{2-(x-2)^2/4}$ を最大化する $x \in [2,2+2\sqrt{2}]$ を探す。この導関数は、$\sqrt{2-(x-2)^2/4} - (x-2)^2/4\sqrt{2-(x-2)^2/4}$ である。これを 0 にして、変形すると $(x-2)^2 = 4$ で、根は 2 ± 2 である。$x \in [2,2+2\sqrt{2}]$ より、$x = 4, y = 2$ でなくてはならない。従って $(\overline{u},\overline{v}) = (4,2)$ が、ゲームの NTU 解である。
3. NTU-実行可能集合が図 3.4.1(a) で与えられている、双行列 (3.1) のゲームを考えよ。脅し点はどう取るべきか。もしナッシュの視点で見て、どちらかのプレイヤーが合意を結ぶのを拒否し、従って現状点 $(0,0)$ にプレイヤーは残るのなら、非協力戦略をプレイヤーらの純粋戦略集合に加えるべきである。結果的にゲームの双行列は、実際に次のようになる。

$$\begin{pmatrix} (4,3) & (0,0) & (0,0) \\ (2,2) & (1,4) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

これは図 3.4.1 と同じ NTU-実行可能集合である。脅し点を $(u^*,v^*) = (0,0)$ と取る事ができる。パレート最適境界は、$(1,4)$ から $(4,3)$ の線分である。この線の傾きは、$-1/3$ である。しかしながら、原点からの傾き 1/3 の線は、線分の拡張と $(4,3)$ の右の点で交わる。これは、この $(1,4)$ から $(4,3)$ の線分に沿って、$x \cdot y$ が増えるように (x,y) を動かす事を意味する。NTU 解は、従って $(4,3)$ である。

The Lambda-Transfer Approach

ナッシュの方法よりも確かに次の有利な点がある、Lloyd Shapley による NTU 問題を解くもう 1 つの方法がある。1 つ目は、解は対応する TU 問題の解に関連する。2 つ目は、4 つ目の公理を証明する難しさを避ける。3 つ目は、脅し点が双行列の関数として自然に現れ、事前に述べる必要がない。4 つ目は、より一般的な問題に拡張できるが、現状点 $(0, 0)$ の問題に限定する時は、ナッシュの解と同じ解を与える。

NTU 問題の主な難しさは、効用の類似性の欠如である。もし効用を同じ単位で測れるように装い、TU 理論で解に辿り着いても、TU 解は NTU-実行可能集合の元ではないという事が起こる。もし NTU-実行可能集合の元であれば、プレイヤーらは全ての譲渡可能な効用がなく達成できるので、NTU 解として使う事ができる。しかし、TU 解が NTU-実行可能集合の元でないならばどうするのか。

効用が同じ単位で測られない事を思い出してほしい。誰かが、プレイヤー　の効用の 1 単位の増加は、プレイヤー　の効用の λ 単位の増加の価値があると提案するかもしれない $(\lambda > 0)$。もしそうなら、次のようにゲームを解析する事ができる。もし元の双行列が (A, B) なら、最初に双行列 $(\lambda A, B)$ を考え、TU 解について解き、プレイヤー　の利得を λ で割ってプレイヤー　の元の単位に戻す。これを **λ-transfer game** という。3.4.2 の方法によって、λ-transfer game の TU 解は、次のような $\varphi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda))$ になる。

$$\varphi_1(\lambda) = \frac{\sigma(\lambda) + \delta(\lambda)}{2\lambda}, \qquad \varphi_2(\lambda) = \frac{\sigma(\lambda) - \delta(\lambda)}{2} \tag{3.10}$$

$\sigma(\lambda) = \max_{ij}\{\lambda a_{ij} + b_{ij}\}$ で、$\delta(\lambda) = \mathrm{Val}(\lambda A - B)$ である。もし点 $\varphi(\lambda)$ が NTU-実行可能集合の元なら、より簡単に与えられた正当性の NTU 解として使える。この $\varphi(\lambda^*)$ は NTU 解 として使われることができる。値 λ^* を**均衡為替レート**という。

値 $\varphi(\lambda^*)$ を近似するのはコンピュータの助けがあれば簡単だが、細かく $\mathrm{Val}(\lambda A - B)$ を求めるのは難しい。この問題は、行列 $A - B$ が行列の同じ場所に saddle point があるときに、双行列ゲーム (A, B) が消えてしまう。そのような双行列ゲームを NTU ゲームとしてプレーする時、そのゲームを**固定脅し点ゲーム**という。これはどんな値 λ でも、脅し点を決めるために使われる行列ゲーム $\lambda A - B$ が、行列の同じ場所に saddle point を持つからである。従って、脅し戦略と λ-transfer game の脅し点は、λ に依存しないだろう。例えば、双行列 (3.10) では、固定脅し点は、A と $-B$ が右下の角に saddle point をもつため、右下の角にある。

ここでもう 1 つの例を紹介する。次の双行列を考えよ。

$$\begin{pmatrix} (-1, 1) & (1, 3) \\ (0, 0) & (3, -1) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

A と $-B$ は、左下の角に saddle point をもつ。従って、$\lambda A - B = \begin{pmatrix} -\lambda - 1 & \lambda - 3 \\ 0 & 3\lambda + 1 \end{pmatrix}$ は、どんな $\lambda \geq 0$ であろうとも、左下の角に saddle point を持つ。よって $(0, 0)$ はゲームの固定脅し点である。NTU 解を求めるために、対角線 $x = y$ が傾き -1 の点で S を出るような λ^* を見つけるまで、x 軸の規模を変える (さら

に正確にすれば、S が出口の点で傾き -1 の線の下に含まれている)。そして規模を元に戻し、$(0, 0)$ からの傾き λ^* の線が、傾き $-\lambda^*$ の点で集合 S を出る事を求める。出口の点は、もちろん NTU 解で、求める方法は、ナッシュ解と同じである。

例として、$\lambda^* = 2$ なら、NTU 解は $(1.25, 2.5)$ である。

固定脅し点の λ-transfer game の NTU 解はナッシュ解であるという議論は、完全に一般的で、固定脅し点が元のものでなくとも機能する。NTU 解は、全ての S が出口の点を通る傾き $-\lambda^*$ の線の下に含まれているような、固定脅し点からの傾き λ^* の線の S からの出口の点として、求められる。

3.4.4　End-Game with an All-In Player

ポーカーのゲームでは**テーブルステーク**のルールでプレーされる。このルールは、各プレイヤーが手札の始めに、自分の前にお金の量だけのリスクを負うというものである。これはプレイヤーがテーブルの上の自分の前に置いた分しか失うことがないということである。また、プレイヤーはプレーの間はこの量を増やせないということでもある。

プレイヤーが自分の前のポットに全てのお金を置いたとき、「オールイン」と宣言する。プレイヤーがオールインに出た時、そのお金と、まだ争う他の各プレイヤーによって組み合わされたそれと等しい量のポットは取って置かれ、メインポットとよばれる。もしあれば、全てのさらなるベットがオールインしなかった残ったプレイヤーだけできる。これらのベットは、サイドポットと置く。オールインプレイヤーは、サイドポットにお金を置いていないので、それを得る権利はない。メインポットの勝者は、最大の手を出したプレイヤーで、サイドポットの勝者は、最大の手を出したオールインしていないプレイヤーとなる。サイドポットにベットする事で、プレイヤーはフォールドするかもしれない。これが起こった場合、そのプレイヤーはサイドポットだけでなくメインポットを得る権利も手放す事になる。これが、オールインプレイヤーに微かなアドバンテージをもたらす。時折、サイドポットのプレイヤーが、オールインプレイヤーがそうでなければないであろう、メインポットを得られる手札でフォールドするだろう。この可能性は、いくつかの興味深い問題を導く。

例として、オールインプレイヤーがいる End-Game を考えよ。オールインプレイヤーをプレイヤー　と呼ぶ事にする。プレイヤー　は何もできない。　ができる事は、観ている事とメインポットを得られるよう祈る事だけである。　は、5 枚スタッドポーカーのゲームで、4 枚のキングを見せているとする。　にとっては不幸な事に、プレイヤー　はそれより良い手札、4 枚のエースを見せている。しかしながら、プレイヤー　にはストレートフラッシュにできる可能性がある。もし　がストレートフラッシュにできれば、　は両方のプレイヤーに勝ち、そうでなければ両方のプレイヤーに負ける。この手がどのようにプレーされるべきか。4 枚のキングを持つオールインプレイヤーは、まだメインポットを得られるだろうか。

数学的に理想的な問題の形にする。A をメインポットのサイズとし、p がプレイヤー　が勝てる手札を持つ確率を示す (p の値は、プレイヤーらの普通の知識である)。End-Game では、プレイヤー　が最初にチェックするか、固定の量 B をベットするかで行動する。もしプレイヤー　がチェックすれば、　が勝てる手札を持っていれば A 勝ち、そうでなければプレイヤー　が A 勝つ。プレイヤー　は何も得られない。

もしプレイヤー　がベットすれば、プレイヤー　はコールかフォールドをする。もしプレイヤー　がコールし、プレイヤー　が勝てる手札を持っていれば、プレイヤー　は $A+B$ 得られ、プレイヤー　は B 失い、プレイヤー　は何も得られない。もしプレイヤー　がコールし、プレイヤー　が勝てる手札を持っていなければ、プレイヤー　は B 失い、プレイヤー　は $A+B$ 得られ、プレイヤー　は何も得られない。もしプレイヤー　がフォールドし、プレイヤー　が勝てる手札を持っていれば、プレイヤー　は A 得られ、他は何も得られない。しかし、もしプレイヤー　がフォールドし、プレイヤー　が勝てる手札を持っていなければ、プレイヤー　は A 得られ、他は何も得られない。

Basic Endgame では、プレイヤー　は勝てる手札でチェックしても何も得られないので、プレイヤー　には 2 つの純粋戦略があり、正直な (honest) 戦略と嘘の (bluff) 戦略がある。プレイヤー　にもまた 2 つの純粋戦略、コール (call)、フォールド (fold) がある。プレイヤー　には戦略がないので、3 人のプレイヤーの利得は、次のような 2×2 の行列で書かれる。

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \quad\quad\quad\quad\text{call} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad & \text{fold} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{honest} \\ \text{bluff} \end{array} & \begin{pmatrix} (p(A+B), -pB+(1-p)A, 0) & (pA, (1-p)A, 0) \\ (p(A+B)-(1-p)B, -pB+(1-p)(A+B), 0) & (pA, 0, (1-p)A) \end{pmatrix} \end{array}$$

大抵、A は B よりも多少大きく、p はかなり小さい。解析では、これらの 3 つの数の実際の値には少しも依存しないので、これらに特定の値を代入すれば、理解するのは簡単だろう。$A = 100, B = 10, p = 1/10$ とする。すると、利得行列は次のようになる。

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \quad\text{call} \quad\quad & \text{fold} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{honest} \\ \text{bluff} \end{array} & \begin{pmatrix} (11, 89, 0) & (10, 90, 0) \\ (2, 98, 0) & (10, 0, 90) \end{pmatrix} \end{array}$$

これは、3 人のプレイヤーによる定数和ゲームであるが、プレイヤー　には戦略選択がなく、プレイヤーの間で連合を組むのはポーカーのルールでは厳しく禁じられているので、これをプレイヤー　と　の非定

数和ゲームと考えるのが最適である。考察からプレイヤー　の利得を除いた行列は、次のようになる。

$$\begin{array}{lcc} & \text{call} & \text{fold} \\ \text{honest} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} (11,89) & (10,90) \\ (2,98) & (10,0) \end{pmatrix}$}} \\ \text{bluff} & & \end{array} \tag{3.12}$$

最初に 1 行目が 2 行目を弱支配している事に注意し、2 行目が除かれれば、2 列目が 1 列目を支配している事に注意せよ。これによって、利得 (10, 90) の (第 1 行, 第 2 列) での均衡が得られる。プレイヤー　は負ける手札でベットしても何も得られない。嘘が成功してプレイヤー　がフォールドしても、プレイヤー　はまだ　に勝てる。さらに悪い事に、プレイヤー　が　の嘘をコールし、　はベットを失うかもしれない。

よって、プレイヤー　は正直でいた方が良いように思える。結果はプレイヤー　は決して嘘をつかず、プレイヤー　は常にプレイヤー　がベットした時にフォールドし、利得は (10, 90, 0) である。これは、世界中のポーカールームでの実際のゲームで昔からの行動の成り行きとして受け入れられている。しかし、さらに細かく見てみよう。

プレイヤー　が 2 列目を使う際、プレイヤー　にとっては嘘をつく事で損害はない。実際、さらに均衡は存在する。プレイヤー　の戦略対 $(1-p, p)$ とプレイヤー　の 2 列目は、$p \leq 1/99$ で均衡である (Exercise 7(a))。$p = 1/99$ での均衡は、利得 $(10, 89\frac{1}{11}, \frac{10}{11})$ である。これは、プレイヤー　から利得を取り、プレイヤー　が避けたい何かのために、プレイヤー　に与えている。　はこれを避けるために、勝ち分の端数を渡す事に同意しているかもしれない。

プレイヤー　は損害なしでこの均衡をプレーする事ができる。実際、$p = 1/99$ より大きい確率でさらに嘘をつこうとする事もできる。もしこれをすれば、プレイヤー　の最大の応酬は、1 列目である。もしプレイヤー　が $p = 1/9$ で、プレイヤー　が 2 列目を使えば、プレイヤー　の平均利得は依然 $11(8/9) + 2(1/9) = 10$ である。値 p が 1/99 から 1/9 の間であると、プレイヤー　は 1 列目を使わざるを得なくなり、プレイヤー　の平均利得は 10 より大きくなる。プレイヤー　は 10 以上欲しいので、プレイヤー　はプレイヤー　に 2 行目を使わせたくない。

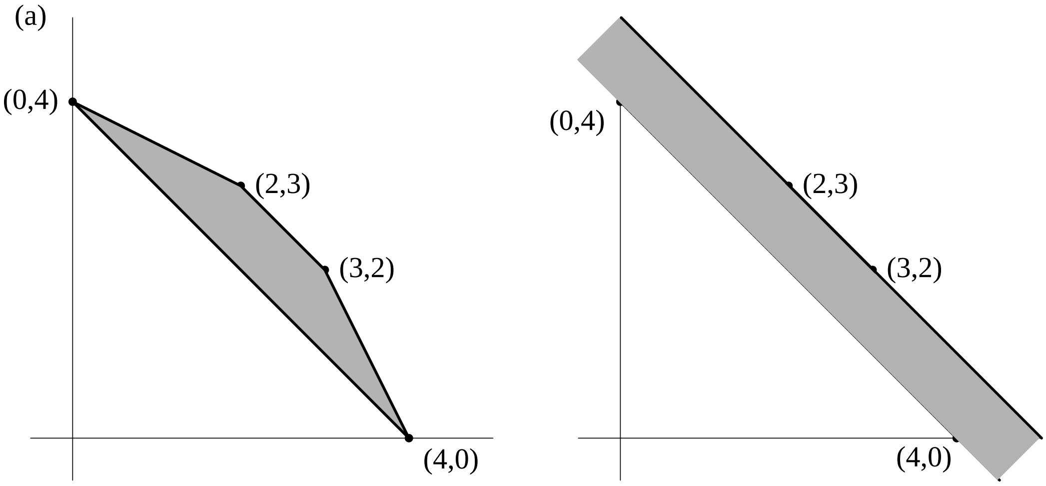
side payment が認められていない時に繰り返される非協力ゲームは、時間外のプレーの結果がプレーの前の交渉の場を取る NTU 協力ゲームとして考えられる。もしこのゲームが、このセクションの方法による NTU ゲームとして解析されるなら、結果的な利得は $(10\frac{5}{6}, 89\frac{1}{6}, 0)$ である (Exercise 7(b))。これはプレイヤー　が常に 1 行目をプレーし、プレイヤー　が確率 5/6 で 1 列目をプレーする事によって達成される。言い換えれば、プレイヤー　が決して嘘をついていないと知っていても、プレイヤー　は 6 回のうち 5 回コールする (この利得を達成する別の方法は、プレイヤー　が全てでコールし、プレイヤー　が確率 1/54 で嘘をつく事である)。

3.4.5 Exercises

1. 次の双行列ゲームについて、NTU と TU 実行可能集合を描け。パレート最適の結果は何か。

$$(a)\begin{pmatrix} (0,4) & (3,2) \\ (4,0) & (2,3) \end{pmatrix} \qquad (b)\begin{pmatrix} (3,1) & (0,2) \\ (1,2) & (3,0) \end{pmatrix}$$

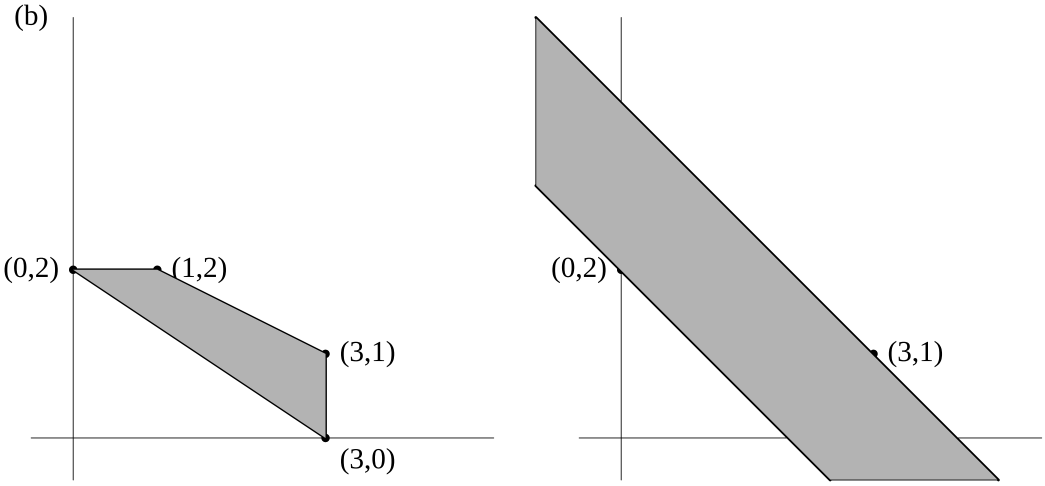
(a)



NTU 実行可能集合　　TU 実行可能集合

よって、NTU ゲームのパレート最適の結果は (2,3) と (3,2) をつないだ線分のベクトル、TU ゲームのパレート最適の結果は (2,3) と (3,2) を通る傾き −1 の線のベクトルである。

(b)



NTU 実行可能集合　　TU 実行可能集合

よって、NTU ゲームのパレート最適の結果は (1,2) と (3,1) をつないだ線分のベクトル、TU ゲームのパレート最適の結果は (3,1) を通る線の傾き −1 のベクトルである。

2. 3.4.1 と 3.4.2 の (3.1) と (3.2) の協力戦略、TU 解、side payment、最適脅し戦略、不一致点を求め

よ。

3.4.1 の (3.1) の行列は、次の通りである。

$$\begin{pmatrix} (4,3) & (0,0) \\ (2,2) & (1,4) \end{pmatrix}$$

合計利得が最大となるのは、$\sigma = 7$ となる協力戦略 $< 1, 1 >$ の場合である。そして、次の行列のゼロ和ゲームを考える。

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

第 1 行第 2 列の 0 は saddle point なので、脅し戦略は次のようになる。

$$p^* = (1,0)^\top \qquad q^* = (0,1)^\top$$

このゲームの値は $\delta = 0$ なので、side payment は 0 で、TU 値は次のようになる。

$$\varphi^* = (7/2, 7/2)$$

また、不一致点 $D^* = (D_1{}^*, D_2{}^*)$ は次のようになる。

$$D_1{}^* = D_2{}^* = 0$$

明らかに D^* から φ^* の線は 45°なので、D^* は不一致点である。

3.4.2 の (3.2) の行列は、次の通りである。

$$\begin{pmatrix} (5,3) & (0,-4) \\ (0,0) & (3,6) \end{pmatrix}$$

合計利得が最大となるのは、$\sigma = 9$ となる協力戦略 $< 2, 2 >$ の場合である。そして、次の行列のゼロ和ゲームを考える。

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

第 1 行第 1 列の 2 は saddle point なので、脅し戦略は次のようになる。

$$p^* = (1,0)^\top \qquad q^* = (1,0)^\top$$

このゲームの値は $\delta = 2$ なので、side payment は 2 で、TU 値は次のようになる。

$$\varphi^* = (11/2, 7/2)$$

また、不一致点 $D^* = (D_1{}^*, D_2{}^*)$ は次のようになる。

$$D_1{}^* = 5 \qquad D_2{}^* = 3$$

$D_2{}^* - D_1{}^* = \varphi_2{}^* - \varphi_1{}^* = -2$ より、D^* から φ^* の線は 45°なので、D^* は不一致点である。

3. 次の Exercise 2.5.5 の行列の協力戦略、TU 解、side payment、最適脅し戦略、不一致点を求めよ。(a) に関しては、http://www.math.ucla.edu/~tom/gamesolve.html にある Matrix Game Solver を使っても良い。

$$
\text{(a)}\begin{pmatrix} (-3,-4) & (2,-1) & (0,6) & (1,1) \\ (2,0) & (2,2) & (-3,0) & (1,-2) \\ (2,-3) & (-5,1) & (-1,-1) & (1,-3) \\ (-4,3) & (2,-5) & (1,2) & (-3,1) \end{pmatrix}
$$

合計利得が最大となるのは、$\sigma = 6$ となる協力戦略 $< 1, 3 >$ の場合である。そして、次の行列のゼロ和ゲームを考える。

$$
A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -6 & 0 & 4 \\ -7 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}
$$

これを Matrix Game Solver を使って解くと、次のようになる。
The value is -0.42857.
An optimal strategy for Player I is:
(0,0,0.57143,0.42857)
An optimal strategy for Player II is:
(0,0.07143,0.92857,0)
従って、脅し戦略は次のようになる。

$$
p^* = (0, 0, 4/7, 3/7)^\top \qquad q^* = (0, 1/14, 13/14, 0)^\top
$$

このゲームの値は $\delta = -3/7$ なので、side payment は 3/7 で、TU 値は次のようになる。

$$
\varphi^* = (39/14, 45/14)
$$

また、不一致点 $D^* = (D_1{}^*, D_2{}^*)$ は次のようになる。

$$
D_1{}^* = -27/98 \qquad D_2{}^* = 15/98
$$

$D_2{}^* - D_1{}^* = \varphi_2{}^* - \varphi_1{}^* = 3/7$ より、D^* から φ^* の線は 45°なので、D^* は不一致点である。

$$
\text{(b)}\begin{pmatrix} (0,0) & (1,-1) & (1,1) & (-1,0) \\ (-1,1) & (0,1) & (1,0) & (0,0) \\ (1,0) & (-1,-1) & (0,-1) & (-1,1) \\ (1,-1) & (-1,0) & (1,-1) & (0,0) \\ (1,1) & (0,0) & (-1,-1) & (0,0) \end{pmatrix}
$$

合計利得が最大となるのは、$\sigma = 2$ となる協力戦略 $<1,3>, <5,1>$ の場合である。そして、次の行列のゼロ和ゲームを考える。

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 列目は 1 列目に、2 行目は 5 行目に、1 列目は 4 列目に、3,4 行目は 5 行目に支配されており、それを取り除くと、脅し戦略は次のようになる。

$$p^* = (0,0,0,0,1)^\top \qquad q^* = (0,0,0,1)^\top$$

このゲームの値は $\delta = 0$ なので、side payment は 0 で、TU 値は次のようになる。

$$\varphi^* = (1,1)$$

また、不一致点 $D^* = (D_1{}^*, D_2{}^*)$ は次のようになる。

$$D_1{}^* = 0 \qquad D_2{}^* = 0$$

$D_2{}^* - D_1{}^* = \varphi_2{}^* - \varphi_1{}^* = 0$ より、D^* から φ^* の線は 45°なので、D^* は不一致点である。

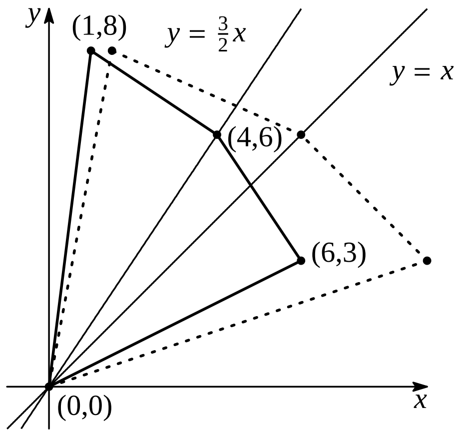
4. $S = \{(x,y) : y \geq 0 \text{ and } y \leq 4 - x^2\}$ を NTU-実行可能集合とする。
(a)$(u^*, v^*) = (0,0)$ の時の NTU 解を求めよ。
積 xy を最大化する点 $(x,y) \in S$ が NTU 解であるので、$xy = x(4 - x^2)$ を最大化する $x \in [0,2]$ を探す。この導関数は、$4 - 3x^2$ なので、これを 0 にして変形すると、$x = \pm 2\sqrt{3}/3$ である。$x \in [0,2]$ より、$(\bar{u}, \bar{v}) = (2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{6}/3)$ が、ゲームの NTU 解である。

(b)$(u^*, v^*) = (0,1)$ の時の NTU 解を求めよ。
積 $x(y-1)$ を最大化する点 $(x,y) \in S$ が NTU 解であるので、$x(y-1) = x(3 - x^2)$ を最大化する $x \in [0,2]$ を探す。この導関数は、$3 - 3x^2$ なので、これを 0 にして変形すると、$x = \pm 1$ である。$x \in [0,2]$ より、$(\bar{u}, \bar{v}) = (1,3)$ が、ゲームの NTU 解である。

5. 次の固定脅し点ゲームの NTU 解と均衡為替レートを求めよ。

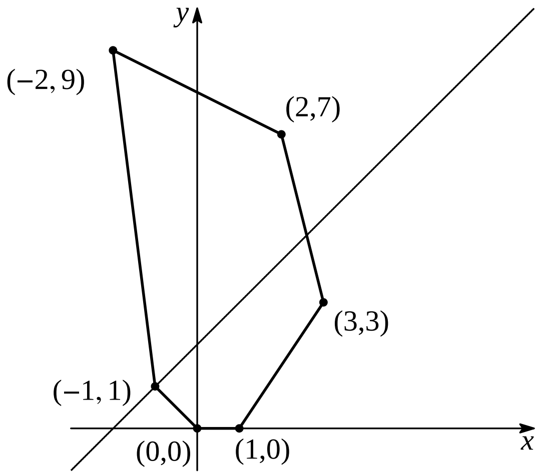
$$\text{(a)} \begin{pmatrix} (6,3) & (0,0) & (0,0) \\ (1,8) & (4,6) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} (1,0) & (-1,1) & (0,0) \\ (3,3) & (-2,9) & (2,7) \end{pmatrix}$$

(a)A と $-B$ は、右下の角に saddle point を持つ。従って、$\lambda A - B$ は、どんな $\lambda \geq 0$ であろうとも、右下の角に saddle point を持つ。よって、右下の角の (0,0) はゲームの固定脅し点である。対角線が傾き -1 の点で S を出るようにするには、$\lambda^* = 3/2$ にすればよい。



よって、NTU 解は (4,6) である。

(b)A と $-B$ は、第 1 行第 2 列に saddle point を持つ。従って、$\lambda A - B$ は、どんな $\lambda \geq 0$ であろうとも、第 1 行第 2 列に saddle point を持つ。よって、第 1 行第 2 列の $(-1, 1)$ はゲームの固定脅し点である。対角線が傾き -1 の点で S を出るようにするには、$\lambda^* =$ にすればよい。



6. 固定の脅し点がない次のゲームの NTU 解と均衡為替レートを求めよ。

$$\text{(a)}\begin{pmatrix} (5,2) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\begin{pmatrix} (3,2) & (0,5) \\ (2,1) & (1,0) \end{pmatrix}$$

7. (a) オールインプレイヤーがいる Endgame で、プレイヤー　の戦略対 $(1-p, p)$ とプレイヤー　の 2 列目が、$0 \leq p \leq 1/99$ の時に、利得 $(10, 90(1-p), 90p)$ の均衡対である事を示せ。これらがただ 1 つの均衡であることを示せ。もし $p = 1/99$ なら、プレイヤー　と　はそれぞれの safety level しか得られない事を示せ。
(b) このゲームの TU 解を求めよ。TU 解が NTU 実行可能集合の元であり、それによってまた NTU 解でもある事を示せ。

第４章

協力ゲーム　～みんなと相談し合えば～

4.1 多人数 TU ゲーム

今回は、多人数**協力ゲーム**を考える。そのようなゲームでは、プレイヤー間で至る合意についての制限はない。加えて、全ての利得は同じ単位で測られ、プレイヤー間で行う **side payment** が許される、**譲渡可能な効用**がある。side payment は、あるプレイヤーらが、ある双方に有益な戦略を使う事への報酬として使われる。従って、ゲームにおける目標が近いプレイヤーは、提携の形を作る傾向があるだろう。提携情報によるゲームに与えられる構造は、好都合な事に、提携が主な役割を果たす形へのゲームの変形によって、学ばれる。多人数 TU ゲームの提携形を定義した後、戦略形から提携形へのゲームの変形の仕方 (その逆も) を学ぶ。

4.1.1 提携形、特性関数

$n \geq 2$ をゲームにおけるプレイヤーの人数とし、1 から n と番号付け、N をプレイヤーの集合 $N = \{1, 2, ..., n\}$ とする。**提携** S を N の部分集合 $s \subset N$ と定義し、全ての提携を 2^N によって表す。提携としての空集合 $\emptyset$ を、**空提携**と呼ぶ事にする。集合 N もまた提携で、**完全提携**と呼ぶ。

もし 2 人のプレイヤーしかいないのなら ($n = 2$)、4 つの提携 $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, N\}$ がある。もし 3 人のプレイヤーがいるのなら、8 つの提携 $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, N\}$ がある。n 人のプレイヤーに対して、提携の集合 2^N には、2^n の元がある。

■Definition　n 人ゲームの**提携形**は、$N = \{1, 2, ..., n\}$ がプレイヤーの集合である N と、実数関数で、全ての提携 (N の部分集合) の集合 2^N 上に定義され、次を満たすゲームの**特性関数** v の対、(N, v) で与えられる。

(i) $v(\emptyset) = 0$

(ii) (優加法的) もし S と T が共通元を持たなければ ($S \cap T = \emptyset$)、$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ である。

n 人ゲームの戦略形や展開形と比較して、非常に単純な定義である。自然に、多くの詳細をなくしている。量 $v(S)$ は、各提携 $S \subset N$ に対して実数で、単位としてメンバーが共に行動する時の提携 S の値または価値、力として考えられる。条件 (i) は空集合は値 0 という事を、(ii) は 2 つの共通元を持たない提携の値は、少なくともそれらが別々に機能する時よりも大きいという事を述べている。優加法的の仮定は提携ゲーム理論の幾つかにとっては必要ないが、自然の条件となるようなものとして、定義の中に含む事にする。

4.1.2 戦略形との関連

n 人ゲームの**戦略形**は、次のような $2n$ 組 $(X_1, X_2, ..., X_n, u_1, u_2, ..., u_n)$ で与えられる事を思い出してほしい。

(1) $i = 1, ..., n$ に対して、X_i はプレイヤー i の純粋戦略集合である。

(2) $i = 1, ..., n$ に対して、$u_i(x_1, ..., x_n)$ はプレイヤー 1 が $x_1 \in X_1$ を使い、プレイヤー 2 が $x_2 \in X_2$ を使い、$\cdots$、プレイヤー n が $x_n \in X_n$ を使った場合のプレイヤー i への利得関数である。

戦略形から提携形へのゲームの変形は、各提携 $S \in 2^N$ に対して、値 $v(S)$ を述べる事を含む。戦略形ゲームに特性関数を割り当てる普通の方法は、各 $S \in 2^N$ に対して、提携 S が 1 人のプレイヤーとして行動し、補提携 $\overline{S} = N - S$ が他のプレイヤーとして行動し、S への利得が $\sum_{i \in S} u_i(x_i, ..., x_n)$ で、S におけるプレイヤーらへの合計利得が次のようになる時に得られる、2 人ゼロ和ゲームの**値**として定義する事である。

$$v(S) = \mathrm{Val}(\sum_{i \in S} u_i(x_1, ..., x_n)) \tag{4.1}$$

値 $v(S)$ は、safety level と同類のものである。提携 S がそれ自身を保証でき、$\overline{S}$ のメンバーがそれに対して団結しても、可能な限り少ない S のメンバーへの合計利得を保つただ 1 つの対象を持つ。これは、$\overline{S}$ のメンバーが、行動の結果として受け取る可能性の利得を知らないと仮定しているので、受け取るべき利得 S の下界である。3 人のゲームに関しての計算の例は、下で与えられる。

式 (4.1) の v が特性関数である事を確かめるため、空の合計は 0 より、条件 (i) を満たす事に注意せよ。(ii) を満たす事を確かめるため、s が S に対して $v(S)$ を保証する戦略の集合、t が T に対して $v(T)$ を保証する戦略の集合なら、戦略集合 (s, t) は $S \cup T$ に対して少なくとも $v(S) + v(T)$ を保証する事に注意せよ。おそらく他の合同戦略はそれよりも多くを保証でき、よって確かに $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ である。

全ての戦略形 n 人ゲームは、この方法で提携形に変形できる。しばしば、そのような提携形への変形によって、脅しのようなゲームにおける重要な特性を失う。よって与えられた特性関数 v に対し、上の方法によって変形し、特性関数 v を持つ多くの提携形ゲームが大抵ある。プレイヤーの 1 人に有利で、提携形への変形が対称である 2 人ゲームの Exercise 3 を見よ。

与えられた特性関数 v を持つ提携形への変形をする戦略形ゲームを構成する 1 つの方法は、次の通りである。プレイヤー i の戦略空間 X_i を、$i : X_i = \{S \in 2^N : i \in S\}$ を含む全ての提携の集合として取る。するとプレイヤー i への利得は、プレイヤー i によって選ばれた提携 S_i の全てのメンバーがプレイヤー i と同じ提携を選ばない限り、最小量 $v(\{i\})$ となり、選ばれた場合は提携 S はそのメンバーの間で分けた値 $v(S_i)$ が与えられる。従って利得関数 u_i は次のようになる。

$$u_i(S_1, ..., S_n) = \begin{cases} v(S_i)/|S_i| & ({}^\forall j \in S_i, S_j = S_i) \\ v(\{i\}) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.2}$$

$|S_i|$ は提携 S_i のメンバーの数を表す。明らかに、提携 S は S の各メンバーが提携の選択として S を選ぶことによって、単純に $v(S)$ を保証できる。さらに、v は優加法的なので、提携 S はそのメンバーが部分提携を作る事によって、さらにはそれを保証できない。

4.1.3 定数和ゲーム

戦略形ゲームは、プレイヤーらの全ての戦略選択 $x_1, ..., x_n$ に対して $\sum_{i \in N} u_i(x_1, ..., x_n) = 0$ なら、**ゼロ和**であるという。そのようなゲームでは、$\bar{S} = N - S$ が S の補集合であるどんな S に対しても、$\sum_{i \in S} u_i(x_1, ..., x_n) = -\sum_{i \in \bar{S}} u_i(x_1, ..., x_n)$ が成り立つ。これはそのようなゲームから提携形への変形において、$\bar{S}$ に対して提携 S でプレーするゲームの値は、S に対して $\bar{S}$ でプレーするゲームの値の負であり、全ての提携 S に対して $v(S) + v(\bar{S}) = 0$ である事を意味する。これを提携形ゼロ和ゲームの定義とする。同様に、戦略形ゲームは、ある定数 c に対して $\sum_{i \in N} u_i(z_1, ..., z_n) = c$ なら、**定数和**であるという。同様の理由によって、そのようなゲームの変形は、定数和ゲームにおいて全ての提携 S に対して $v(S) + v(\bar{S}) = c = v(N)$ を導く。これを提携形定数和ゲームの定義とする。

■Definition　提携形ゲームは、全ての提携 $S \in 2^N$ に対して $v(S) + v(\bar{S}) = v(N)$ であるなら**定数和**であるといい、加えて $v(N) = 0$ なら**ゼロ和**であるという。

4.1.4 例

次のような利得ベクトルである、プレイヤー　、　、　のそれぞれに 2 つの純粋戦略がある 3 人ゲームを考えよ。

が 1 を選んだ場合

	1	2
1	(0,3,1)	(2,1,1)
2	(4,2,3)	(1,0,0)

が 2 を選んだ場合

	1	2
1	(1,0,0)	(1,1,1)
2	(0,0,1)	(0,1,1)

特性関数 v を求める事によって、提携形ゲームを求めよ。自動的に $v(\emptyset) = 0$ である。$v(N)$ を求めるのは簡単である。8 つの欄の最も大きい和である。これによって項 (1,2,1) がわかり、合計利得は $v(N) = 9$ である。$v(\{1\})$ を求めるために、次の (　,　) に対する　の勝ち分の利得行列を計算せよ。

(,)

	1,1	1,2	2,1	2,2
1	0	2	4	1
2	1	1	0	0

2,3 列目が支配されているので、$v(\{1\}) = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1/2$ である。

$v(\{2\}), v(\{3\})$ を求めるために、同様に , に対する の勝ち分の行列と、 , に対する の勝ち分の行列を作り、結果的なゲームの値を求める。 の勝ち分の行列では、 が 2 を選び、(,) が (2,1) を選ぶ事が $v(\{2\}) = 0$ となる saddle point である。 の勝ち分の行列では、値は $v(\{3\}) = 3/4$ である。

$v(\{1, 3\})$ を求めるために、最初に に対する と の勝ち分の合計の行列を作る。これは、次のようになる。

(,)		1	2
	1,1	1	7
	1,2	3	1
	2,1	1	1
	2,2	2	1

下の 2 つの行は 2 行目に支配されているので、値は $v(\{1, 3\}) = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 5/2$ である。同様に、 に対する と の行列、 に対する と の行列を計算する。両方のこれらの行列は saddle point を持つ。これにより、$v(\{1, 2\}) = 3, v(\{2, 3\}) = 2$ である事がわかる。これは、特性関数の詳述を計算する。

4.1.5 Exercises

1. 次のような利得ベクトルである、プレイヤー 、 、 のそれぞれに 2 つの純粋戦略がある 3 人ゲームの特性関数を求めよ。これはゼロ和ゲームであり、従って $v(\{1, 3\}) = -v(\{2\})$ 等である事に注意せよ。

が 1 を選んだ場合

	1	2
1	(−2,1,1)	(1,−4,3)
2	(1,3,−4)	(10,−5,−5)

が 2 を選んだ場合

	1	2
1	(−1,−2,3)	(−4,2,2)
2	(12,−6,−6)	(−1,3,−2)

$v(\emptyset) = 0$ であり、ゼロ和ゲームなので $v(N) = 0$ である。$v(\{1\})$ を求めるために、(,) に対する の勝ち分の利得行列を計算する。

	(,)			
	1,1	1,2	2,1	2,2
1	−2	1	1	10
2	−1	−4	12	−1

3,4 列目は支配されているので、$v(\{1\}) = \mathrm{Val}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = -3/2$ である。$v(\{2\}), v(\{3\})$ を求めるために、同様に　,　に対する　の勝ち分の行列と、　,　に対する　の勝ち分の行列を作り、結果的なゲームの値を求める。　の勝ち分の行列では、　が 1 を選び、(　,　) が (1,2) を選ぶ事が $v(\{2\}) = -4$ となる saddle point である。　の勝ち分の行列では、値は $v(\{3\}) = -22/5$ である。このゲームはゼロ和なので、$v(\{1,2\}) = -v(\{3\}) = 22/5, v(\{2,3\}) = -v(\{1\}) = 3/2, v(\{1,3\}) = -v(\{2\}) = 4$ である。

2. 次のような利得ベクトルの時の戦略形 3 人ゲームの特性関数を考えよ。

　が 1 を選んだ場合

	1	2
1	(1,2,1)	(3,0,1)
2	$(-1, 6, -3)$	(3,2,1)

　が 2 を選んだ場合

	1	2
1	(−1,2,4)	(1,0,3)
2	(7,5,4)	(3,2,1)

$v(\emptyset) = 0$ であり、3 つの利得の和が最も大きいのは (　,　,　) が (2,2,1) を選ぶ時なので、$v(N) = 16$ である。$v(\{1\}), v(\{2\}), v(\{3\})$ を求めるために、　,　に対する　の勝ち分の行列と、　,　に対する　の勝ち分の行列と、　,　に対する　の勝ち分の行列を作り、結果的なゲームの値を求める。　の勝ち分の行列では、値は $v(\{1\}) = 1/2$ である。　の勝ち分の行列では、　が 2 を選び、(　,　) が (1,2) か (2,2) を選ぶ事が $v(\{2\}) = 2$ となる saddle point である。　の勝ち分の行列では、　が 2 を選び、(　,　) が (1,1) か (1,2) を選ぶ事が $v(\{3\}) = 1$ となる saddle point である。
$v(\{1,3\})$ を求めるために、最初に　に対する　と　の勝ち分の合計の行列を作る。これは、次のようになる。

		1	2
(　,　)	1,1	2	−4
	1,2	4	4
	2,1	3	11
	2,2	4	4

saddle point は 4 なので、$v(\{1,3\}) = 4$ である。同様に、　に対する　と　の行列、　に対する　と　の行列を計算すると、$v(\{1,2\}) = 5, v(\{2,3\}) = 3$ である事がわかる。

3. 次の双行列の 2 人ゲームを考えよ。

$$\begin{pmatrix} (0,2) & (4,1) \\ (2,4) & (5,4) \end{pmatrix}$$

(a) 提携形ゲームを求めよ。提携形では、2 人のプレイヤーにおいて対称である事に注意せよ。

$v(\emptyset) = 0$ で、$v(N) = 9$ である。また、$v(\{1\}) = 2$ で、$v(\{2\}) = 2$ である。

(b) 上のゲームが、実際にはプレイヤー 2 に有利である事を議論せよ。
プレイヤー　が実際に (a) のゲームの値を得ようとすれば、　は 2 行目、　は 1 列目を使うが、その時の利得は (2,4) であるため、実際の　の利得は 4 となり、　より有利になる。

(c) 戦略形ゲームとしての TU 値を求めよ。この値は、プレイヤー 1 へよりもプレイヤー 2 により多く与える事に注意せよ。
合計利得が最大となるのは、$\sigma = 9$ となる協力戦略 $< 2, 2 >$ の場合である。そして、次の行列のゼロ和ゲームを考える。

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行第 1 列と第 2 行第 1 列の -2 は saddle point なので、脅し戦略は次のようになる。

$$p^* = (1, 0)^\top \qquad q^* = (1, 0)^\top$$

このゲームの値は $\delta = -2$ なので、side payment は -2 で、TU 値は次のようになる。

$$\varphi^* = (7/2, 11/2)$$

(d)(a) で見られる提携形ゲームから、式 (4.2) の方法によって戦略形に変形した場合、双行列はどうなるか。
プレイヤー　の純粋戦略は $X = \{\{1\}, N\}$ であり、プレイヤー　の純粋戦略は $Y = \{\{2\}, N\}$ なので、(a) から、双行列は次のようになる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \{2\} & \quad N \end{array} \\ \begin{array}{c} \{1\} \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} (2, 2) & (2, 2) \\ (2, 2) & (9/2, 9/2) \end{pmatrix} \end{array}$$

4.2 imputation とコア

協力ゲームでは、優加法的によって、受け取る量 $v(N)$ は、それらが形作るどんな共通元を持たない提携の集合によって受け取る合計量と同じであるので、完全提携を形作るためのプレイヤーらの合同利益である。2 人 TU ゲームの学習のように、「理性的」なプレイヤーらは完全提携をして $v(N)$ を受け取ることに同意するであろうという仮定は道理的である。問題は、その時プレイヤーらの間でどのようにその量を分けるか同意する事である。このセクションでは、公平な分配における同意の可能な特性の 1 つと、同意を覆す欲求や権力のある提携がないという意味で静的である事を議論する。そのような合計収益の分配は、コアの点と呼ばれ、経済学におけるゲーム理論の中心的な事項である。

4.2.1 imputation

プレイヤー i が x_i を受け取るということを理解しているプレイヤーらによって受け取られる提案された量の利得ベクトル $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ は、**imputation** と呼ばれる事がある。imputation の 1 つ目の望ましい特性は、プレイヤーらによって受け取られる合計量が、$v(N)$ であるべき事である。

■Definition　利得ベクトル $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ は、$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ なら、**group rational** または、**効率的**という。

決して、単独で行動した時に得られる量よりも、受け取るのに合意する事を期待しないプレイヤーはいない。従って、imputation $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ に期待される 2 つ目の自然な条件は、全てのプレイヤー i に対して、$x_i \geq v(\{i\})$ である。

■Definition　利得ベクトル x は、${}^{\forall} i = 1, ..., n$ に対して $x_i \geq v(\{i\})$ なら、**individually rational** という。

imputation は、これら両方の条件を満たす利得ベクトルとして定義される。

■Definition　**imputation** は、group rational で individually rational な利得ベクトルである。imputation の集合は、次のように書かれる。

$$\{x = (x_1, ..., x_n) : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \text{ and } x_i \geq v(\{i\}) \quad {}^{\forall} i \in N\} \tag{4.1}$$

従って、imputation は、n ベクトル $x = (x_1, ..., x_n)$ s.t. ${}^{\forall} i\ x_i \geq v(\{i\})\ \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ である。imputation の集合は、v の優加法的から、$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(N)$ なので、決して空にならない。例えば、ある imputation は、$i = 1, ..., n-1$ に対して $x_i = v(\{i\})$ で、$x_n = v(N) - \sum_{1}^{n-1} v(\{i\})$ である $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ によって与えられる。これは、プレイヤー n に最も好まれる imputation である。実際、imputation の集合は、$\sum_{1}^{n} x_i = v(N)$ を満たすために選ばれる以外の全ての x_i に対して $x_i = v(\{i\})$ とする事で得られる、n 点の凸包を含む単体である。

例 4.1.4 では、$v(\{1\}) = 1/2, v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 1, v(N) = 9$ である。imputation の集合は、次のようになる。

$$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 9, x_1 \geq 1/2, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1\}$$

これは、3 つの不等式と等式の 2 つを満たす頂点の三角形であり、すなわち $(8, 0, 1), (1/2, 15/2, 1), (1/2, 0, 17/2)$ である。これらはそれぞれプレイヤー 1,2,3 にとって、最も好ましい imputation である。

4.2.2　Essential Games

1 つの点の imputation の集合が明らかな場合がある。そのようなゲームを inessential という。

■Definition　提携形ゲームは、$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) = v(N)$ なら **inessential** といい、$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) < v(N)$ なら **essential** という。

ゲームが inessential なら、ただ 1 つの imputation は $x = (v(\{1\}), ..., v(\{n\}))$ で、ゲームの「解」として考えられる。全てのプレイヤーがそれぞれの safety level を受け取ることが期待できる。2 人ゼロ和ゲームは、全て inessential である (Exercise 1)。

ゲーム理論的な視点からは、inessential game はとても単純である。全ての提携 S に対して、$v(S)$ は $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ に支配される。提携を作るプレイヤーの傾向はない。

例 4.1.4 では、$v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) = 1/2 + 0 + 1 < 9 = v(N)$ なので、ゲームは essential である。

4.2.3　コア

ある imputation x が、プレイヤーらの間で $v(N)$ の分配としての提案であるとする。x からの合計収益が自身で行動した時に達成できる提携より少ない提携 S が存在するなら ($\sum_{i \in S} x_i < v(S)$)、$x$ から受け取るよりも、各メンバーにそのような提携はより多くを保証できるので、提案 x を覆し、提携 S をする傾向があるだろう。そのような imputation は、固有の不安定がある。

■Definition　imputation x は、$v(S) > \sum_{i \in S} x_i$ なら、**提携 S で不安定**であるという。S が不安定である x のような S があるのなら、x は**不安定**であるといい、そうでないのなら x は**安定**であるという。

■Definition　安定な imputation の集合 C を**コア**といい、次のように表される。

$$C = \{x = (x_1, ..., x_n) : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ and } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), {}^{\forall} S \subset N\} \tag{4.2}$$

コアは、下の例のような多くの点で成り立つ事ができるが、コアは空になる事もできる。全ての提携を同じく満たす可能性がある。1 つは安定性の大きさとしてのコアの大きさや、どのくらい交渉された合意が覆される傾向があるのかがあるかもしれない。1 つは空のコアのゲームの例としての essential な定数和ゲームを扱うかもしれない。

■Theorem 1　essential な n 人定数和ゲームのコアは、空である。

■**証明**　x を imputation とする。ゲームは essential なので、$\sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N)$ である。その時、$x_k > v(\{k\})$ となるプレイヤー k がいなくてはならない (そうでなければ $v(N) = \sum_{i \in N} x_i \leq \sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N)$ となるので)。ゲームは定数和なので、$v(N - \{k\}) + v(\{k\}) = v(N)$ である。しかし、$\sum_{i \neq k} x_i = \sum_{i \in N} x_i - x_k < V(N) - v(\{k\}) = v(N - \{k\})$ なので、x は提携 $N - \{k\}$ で不安定でなければならない。■

4.2.4　例

例 1. 次で与えられる特性関数 v のゲームを考えよ。

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = 1 & v(\{1,2\}) = 4 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 3 & v(\{1,2,3\}) = 8 \\ & v(\{3\}) = 1 & v(\{2,3\}) = 5 & \end{array}$$

imputation は、$x_1 + x_2 + x_3 = 8, x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1$ となる点 (x_1, x_2, x_3) である。この集合は、頂点 $(7,0,1), (1,6,1), (1,0,7)$ の三角形である。

この三角形を**重心座標**で表す事は役に立つ。これは、図表の平面を平面 $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ で、平面に足して 8 になる 3 つの座標の各点を与えるように装う事によって成される。$x_1 = 1$ や $x_1 + x_3 = 3$ 等の線を引くのは簡単である ($x_2 = 5$ の線も同じ)。すると、imputation の集合が正三角形になる。

imputation が不安定である事を確かめよう。提携 $\{2,3\}$ は、$v(\{2,3\}) = 5$ を保証できるので、$x_2 + x_3 < 5$ である全ての点 (x_1, x_2, x_3) は、$\{2,3\}$ で不安定である。これらは、図の $x_2 + x_3 = 5$ の線の下の点である。$\{1,2\}$ は、$v(\{1,2\}) = 4$ を保証できるので、$x_1 + x_2 = 4$ の線の右下の全ての点は不安定である。最後に、

$\{1,3\}$ は、$v(\{1,3\}) = 3$ を保証できるので、$x_1 + x_3 = 3$ の線の下の全ての点は不安定である。コアは、図の 5 角形で与えられる imputation の集合の中の残った集合の点であり、境界を含む。

例 2. プレイヤー $i(i = 1,2,3)$ にとって a_i ドルの価値があるオブジェがある。$a_1 < a_2 < a_3$ と仮定すると、プレイヤー 3 が最も高く価値をつけている。しかし、プレイヤー 1 がそのオブジェを持っているので、$v(\{1\}) = a_1$ である。プレイヤー 2 と 3 は、彼ら自身によって何もできないので、$v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 0, v(\{2,3\}) = 0$ である。もしプレイヤー 1 と 2 が共に行動するなら、共同の価値は a_2 なので、$v(\{1,2\}) = a_2$ である。同様に、$v(\{1,3\}) = a_3$ である。もし 3 人全員が共に行動するなら、オブジェには a_3 の価値しか付かないので、$v(N) = a_3$ である。このゲームのコアを求めよう。

コアは、次を満たす全てのベクトル (x_1, x_2, x_3) から構成されている。

$$\begin{array}{lll} x_1 \geq a_1 & x_1 + x_2 \geq a_2 & \\ x_2 \geq 0 & x_1 + x_3 \geq a_3 & x_1 + x_2 + x_3 = a_3 \\ x_3 \geq 0 & x_2 + x_3 \geq 0 & \end{array}$$

$x_2 = a_3 - x_1 - x_3 \leq 0$ と $x_2 \geq 0$ から、コアの全ての点に対して $x_2 = 0$ である。よって、$x_1 \geq a_2$ と $x_3 = a_3 - x_1$ がわかる。従ってコアは、$C = \{(x, 0, a_3 - x) : a_2 \leq x \leq a_3\}$ である。

これは、オブジェがプレイヤー 3 によって、a_2 と a_3 の間のある価格 x で獲得されるであろう事を示している。プレイヤー 1 は x ドルで終わり、プレイヤー 3 は x ドル引かれたオブジェで終わる。プレイヤー 2 はこれにおける積極的な役割はないが、2 の周り以外で、プレイヤー 3 が a_2 以下でオブジェを得る事を望んでいる。

4.2.5 Exercises

1. 全ての 2 人定数和ゲームが inessenitial である事を示せ。

   定数和ゲームより、$v(\{1\}) + v(N - \{1\}) = v(N)$ が成り立つ。プレイヤーの人数は 2 人なので、$N - \{1\} = \{2\}$ である。よって、$v(\{1\}) + v(\{2\}) = \sum_{i=1}^{2} v(\{i\}) = v(N)$ であるので、inessential である。

2. 次の双行列の男女の争いの imputation の集合とコアを求めよ。

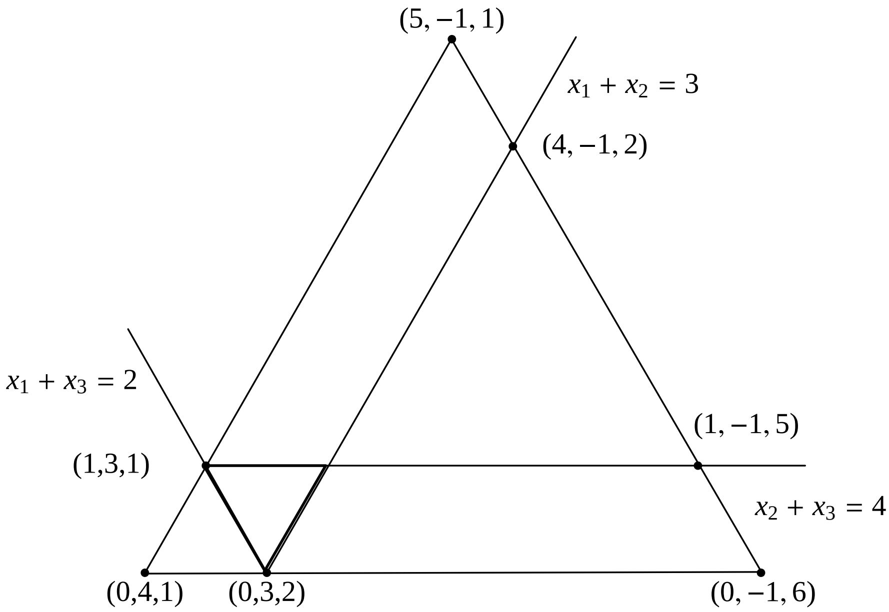
$$\begin{pmatrix} (4,2) & (1,1) \\ (0,0) & (2,4) \end{pmatrix}$$

   このゲームの特性関数は $v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 8/5, v(\{2\}) = 3/5, v(N) = 6$ である。従って、imputation の集合は、$\{(x_1, x_2) : x_1 \geq 8/5, x_2 \geq 3/5, x_1 + x_2 = 6\}$ である。この場合のコアは、imputation の集合と同じである。

3. $v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = -1, v(\{3\}) = 1, v(\{1,2\}) = 3, v(\{1,3\}) = 2, v(\{2,3\}) = 4, v(N) = 5$ である特性関数の 3 人ゲームのコアをグラフで示せ。

   imputation の集合は、$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0, x_2 \geq -1, x_3 \geq 1, x_1 + x_2 + x_3 = 5\}$ である。つまり、この

集合は頂点 $(5,-1,1),(0,4,1),(0,-1,6)$ の三角形である。この三角形を重心座標で表すと、次のようになる。



$v(\{1,2\})=3, v(\{1,3\})=2, v(\{2,3\})=4$ より、上のように不安定である部分を取り除くと、図の太線で囲まれた imputation の集合 (境界含む) がコアである事が言える。

4. **Defintion** $v(S)$ が、ある関数 f に対して S の元の数字に依存する、つまり $v(S)=f(|S|)$ である特性関数 v のゲームを**対称**であるという。

   (a) 何らかの値 a に対して、$v(\{i\})=0, v(\{i,j\})=a, v(\{1,2,3\})=3$ である対称な 3 人ゲームは、空でないコアか。

   $x_1+x_2=a, x_2+x_3=a, x_1+x_3=a$ より、$a=2$ の時ただ 1 つの点 (1,1,1) がコアとなり、$a>2$ だとコアは空である。

   (b) 何らかの値 a,b に対して、$v(\{i\})=0, v(\{i,j\})=a, v(\{i,j,k\})=b, v(N)=4$ である対称な 4 人ゲームは、空でないコアか。

   (c) 一般化せよ。対称なゲームに対して、$f(|S|)=v(S)$ の値において、空でないコアを持つための必要十分条件を求めよ。

5. $i=1,\ldots,n$ に対して、$\delta_i=v(N)-v(N-\{i\})$ とする。$\sum_1^n \delta_i < v(N)$ なら、コアは空である事を示せ。

6. 全ての提携 S に対して、$v(\{i\}\cup S)=v(S)$ なら、プレイヤー i は、ゲーム (N,v) において、**ダミー**で

あるという。特に、$v(\{i\}) = 0$ である。従って、ダミーはどんな提携も助ける (または害する) 事はできない。プレイヤー 1 がダミーで、$(x_1, x_2, ..., x_n)$ がコアの元なら、$x_1 = 0$ である事を示せ。
$(x_1, x_2, ..., x_n)$ はコアの元なので、$\sum_{i\in N} x_i = v(N)$ である。また、プレイヤー 1 はダミーなので、$v(N) = v(\{1\} \cup \{2, ..., n\}) = v(\{2, ..., n\})$ である。$S = \{2, ..., n\}$ とすると、コアの定義より $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S) = v(N) = \sum_{i\in N} x_i$ となるので、$x_1 = 0$ である。

7. **グローブの市場** N は、$P \cap Q = \emptyset$ であるプレイヤーの 2 つのタイプ $N = P \cup Q$ で構成されているとする。特性関数を次のように定義する。

$$v(S) = \min\{|S \cap P|, |S \cap Q|\}$$

ゲーム (N, v) は、次のような説明により、グローブの市場と呼ばれる。P の各プレイヤーは、右手のグローブを、Q の各プレイヤーは、左手のグローブを持っている。もし P の j のメンバーと、Q の k のメンバーが提携をするなら、価値が 1 となる完全な対のグローブが $\min\{j, k\}$ となる。組み合わされていないグローブには何の価値もない。
(a)$|P| = 2, |Q| = 2$ とする。コアを求めよ。
$P = \{1, 2\}$, $Q = \{3, 4\}$ とする。特性関数は、$v(\{\emptyset\}) = 0$, $v(\{i\}) = 0(i = 1, 2, 3, 4)$, $v(\{1, 2\}) = v(\{3, 4\}) = 0$, $v(\{1, 3\}) = v(\{1, 4\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{2, 4\}) = 1$, $v(\{1, 2, 3\}) = v(\{1, 2, 4\}) = v(\{2, 3, 4\}) = v(\{1, 3, 4\}) = 1$, $v(N) = 2$ となる。従って、imputation の集合は、$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\}$ である。さらに、$x_l + x_k \geq 1(l \in P, k \in Q)$ を満たす集合がコアである。

(b)$|P| = 2, |Q| = 3$ とする。コアが 1 点しかない事を示せ。
$P = \{1, 2\}$, $Q = \{3, 4, 5\}$ とする。特性関数は、$v(\{\emptyset\}) = 0$, $v(\{i\}) = 0(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, $v(\{1, 2\}) = v(\{3, 4\}) = v(\{3, 5\}) = v(\{4, 5\}) = 0$, $v(\{1, 3\}) = v(\{1, 4\}) = v(\{1, 5\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{2, 4\}) = v(\{2, 5\}) = 1$, $v(\{1, 2, 3\}) = v(\{1, 2, 4\}) = v(\{1, 2, 5\}) = v(\{2, 3, 4\}) = v(\{2, 3, 5\}) = v(\{1, 3, 4\}) = v(\{1, 3, 5\}) = v(\{1, 4, 5\}) = v(\{2, 4, 5\}) = 1$, $v(\{1, 2, 3, 4\}) = v(\{1, 2, 3, 5\}) = v(\{1, 2, 4, 5\}) = v(N) = 2$ となる。従って、imputation の集合は、$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i \geq 0(i = 1, 2, 3, 4, 5), \sum_{i=1}^{5} x_i\}$ である。さらに、$x_l + x_k \geq 1(l \in P, k \in Q), x_1 + x_2 + x_s + x_t \geq 2(s, t \in Q)$ を満たす集合がコアである。これは、(1,1,0,0,0) の 1 点しか存在しない。

(c) 任意の $|P|, |Q|$ について一般化せよ。

8. 2 人の機械の持ち主 (プレイヤー 1、2) と、3 人の労働者 (プレイヤー 3、4、5) がいる。それぞれの機械の持ち主は、2 つの機械を持っている。各労働者は、どんな機械においても 1 単位を製造する。従って例えば、

$$v(\{i, k\}) = 1 \ (i = 1, 2, \ k = 3, 4, 5)$$
$$v(\{i, j, k\}) = 2 \ (i = 1, 2, \ j, k = 3, 4, 5)$$
$$v(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 3$$

コアを求めよ。

imputation の集合は、$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i \geq 0(i = 1, 2, 3, 4, 5), \sum_{i=1}^{5} x_i = 3\}$ である。さらに、$x_i + x_k \geq 1(i = 1, 2, k = 3, 4, 5), x_i + x_j + x_k \geq 2(i = 1, 2, j, k = 3, 4, 5)$ を満たす集合がコアである。

4.3 Shapley 値

特性関数の形の n 人ゲームのもう 1 つの方法を扱う。コアの概念は、安定性の基準として役に立つ。解の概念として、他者に有利な集合の 1 点の区別がない、imputation の集合を表す。実際は、コアは空にもなり得る。

ここでは、値の概念を扱う。この方法では、各提携形ゲームに、値と呼ばれるただ 1 つの利得ベクトルを割り当てようとする。値ベクトルの i 番目の要素は、ゲームにおける i 番目のプレイヤーの値、または力の単位として考えられる。あるいは、値ベクトルはある公平で impartial な仲裁人によって決められるゲームの調停結果として考えられる。ゲーム理論での中心となる「値の概念」は、1953 年に Shapley によって提案された。このセクションでは、Shapley 値と定義し、Shapley-Shubik 指数と呼ばれる投票の体系における力を測るための応用を議論する。セクション 4 では、もう 1 つの値の概念、仁を扱う。

4.3.1 価値関数、Shapley の公理

ゲームの調停に関する議論の形の例として、セクション 4.2.4 の例 1 を考えよ。確かな調停者は、8 を受け取る完全提携を作るように、プレイヤーらに要求するべきであるが、プレイヤーらの間でこれをどう分けるのか。プレイヤー 2 は 1 人で何も得られないが、提携を 1 か 3 で作るよりも価値がある。より重要なのはどちらか。公正の概念を公理化する事によって、問題を解く。

価値関数 ϕ は、n 人ゲーム v の各可能な特性関数に、実数の n 組 $\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), ..., \phi_n(v))$ を割り当てる関数である。ここでは $\phi_i(v)$ は、特性関数 v のゲームにおけるプレイヤー i の価値を表す。公正の公理は、関数 ϕ に基づく。

■ϕ に対する Shapley の公理

1. **効率性** $\sum_{i\in N} \phi_i(v) = v(N)$
2. **対称性** i, j が、i, j を含まない全ての提携 S に対して $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ ならば、$\phi_i(v) = \phi_j(v)$ である。
3. **ダミーの公理** i が、i を含まない全ての提携 S に対して $v(S) = v(S \cup \{i\})$ ならば、$\phi_i(v) = 0$ である。
4. **加法性** u, v が特性関数ならば、$\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$ である。

公理 1 は、プレイヤーらの合計値は、完全提携の値であるという、group rationality である。2 つ目の公理は、特性関数がプレイヤー i, j で対称ならば、i, j に割り当てられる値は等しいというものである。3 つ目の公理は、プレイヤー i が加わるどんな提携の手助けにも害にもならないという意味で、ダミーであれば、i の値は 0 になるというものである。最も強い公理は 4 である。同じ回数でプレーされた 2 つのゲームの調停された値は、違う回数でプレーされた場合のゲームの調停された値の合計であると感じられる事を反映している。u, v が特性関数なら、それによって $u + v$ である事に注意すべきである。

■Theorem 1　Shapley の公理を満たすただ 1 つの関数 ϕ が存在する。

■証明　与えられた空でない集合 $S \subset N$ に対して、w_S は特別な特性関数を表すとし、全ての $T \subset N$ に対して、次のように定義する。

$$w_S(T) = \begin{cases} 1 & (S \subset T) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.1}$$

公理 3 から、$i \notin S$ ならば $\phi_i(w_S) = 0$ である。公理 2 から、i, j 両方が S の元ならば、$\phi_i(w_S) = \phi_j(w_S)$ である。公理 1 から、$\sum_{i \in N} \phi_i(w_S) = w_S(N) = 1$ なので、全ての $i \in S$ に対して $\phi_i(w_S) = 1/|S|$ である。任意の数 c に対して、特性関数 cw_S に同様の解析を応用すると、次のようになる。

$$\phi_i(cw_S) = \begin{cases} c/|S| & (i \in S) \\ 0 & (i \notin S) \end{cases} \tag{4.2}$$

次の段落では、どんな特性関数 v が、ある適当な簡単に計算できる定数 c_S に対して、$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S$ という (4.1) の形の特性関数の重みの合計を表せる事を示す。公理 4 は、価値関数が存在するなら、次のようになるという事を示す事を応用している。

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{c_S}{|S|} \tag{4.3}$$

この合計は、i を含む全ての提携 S に引き継がれている。これはたとえ c_S が負であっても、公理 4 は与えられた u, v、特性関数 $u - v$ に対して $\phi(u - v) = \phi(u) - \phi(v)$ である事も意味しているので機能する ($u = (u - v) + v$)。証明を完全にするために、存在性、つまり下のように定義された c_S の (4.3) が Shapley の公理を満たす事を示さなければならない。これは難しくはないが、Shapley の公理を満たすもう 1 つの価値関数を示す事によって存在性を示す定理 2 に証明を延ばす (従って (4.3) と同じでなければならない)。

今から、定数 c_S を求める事によってどんな v も $v = \sum_{S \subset N} c_S w_S$ と書ける事を示す。$c_\emptyset = 0$ とし、次のように、全ての $T \subset N$ に対して T の元の数を帰納的に定義する。

$$c_T = v(T) - \sum_{\substack{S \subset T \\ S \neq T}} c_S \tag{4.4}$$

各 c_T は、全ての $S \subset T, S \neq T$ に対する c_S によって定義される。よって、

$$\sum_{S \subset N} c_S w_S(T) = \sum_{S \subset T} c_S = c_T + \sum_{\substack{S \subset T \\ S \neq T}} c_S = v(T) \tag{4.5}$$

従って、$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S$ は示された。■

この証明において、v の優加法的が必要でない事は興味深い。

4.3.2 Shapley 値の計算

定理 1 の証明によって、Shapley 値の計算方法がわかる。最初に式 (4.4) を使って帰納的に数 c_S を求めよ。次に式 (4.3) を使って Shapley 値を形作れ。

この方法の例として、セクション 4.2.4 の例 1 の特性関数を考えよ。

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = 1 & v(\{1,2\}) = 4 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 3 & v(\{1,2,3\}) = 8 \\ & v(\{3\}) = 1 & v(\{2,3\}) = 5 & \end{array}$$

帰納的に、$c_{\{1\}} = v(\{1\}) = 1, c_{\{2\}} = 0, c_{\{3\}} = 1$ がわかる。次に、$c_{\{1,2\}} = v(\{1,2\}) - c_{\{1\}} - c_{\{2\}} = 4 - 1 - 0 = 3, c_{\{1,3\}} = 3 - 1 - 1 = 1, c_{\{2,3\}} = 5 - 0 - 1 = 4$ がわかる。最後に、次がわかる。

$$c_N = v(N) - c_{\{1,2\}} - c_{\{1,3\}} - c_{\{2,3\}} - c_{\{1\}} - c_{\{2\}} - c_{\{3\}} = 8 - 3 - 1 - 4 - 1 - 0 - 1 = -2$$

従って、v を次のように書けることがわかる。

$$v = w_{\{1\}} + w_{\{3\}} + 3w_{\{1,2\}} + w_{\{1,3\}} + 4w_{\{2,3\}} - 2w_{\{1,2,3\}}$$

これから、次がわかる。

$$\begin{array}{l} \phi_1(v) = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{3} \\ \phi_2(v) = \frac{4}{2} + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = 2 + \frac{5}{6} \\ \phi_3(v) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - \frac{2}{3} = 2 + \frac{5}{6} \end{array}$$

Shapley 値は、$\phi = (14/6, 17/6, 17/6)$ である。この点は、コアに入っている (セクション 2 の図を見よ)。Shapley 値は常にコアにあるわけではない。コアが空の場合が起こり得るからである。しかし、コアが空であっても、Shapley 値はコアの中に入っている必要はない (例えば Exercise 1 を見よ)。

4.3.3 Shapley 値の二者択一

その特性のさらなる見識を与える Shapley 値に達する代わりの方法がある。プレイヤーらが一度にこの提携に入る事によって、完全提携を作るとする。各プレイヤーが提携に入れば、プレイヤーの要素は、入った提携の値に増える事による量を受け取る。この計画によってプレイヤーが受け取る量は、プレイヤーが入ったものの順序である。Shapley 値は、プレイヤーらが完全無作為な順序に入った場合のプレイヤーへの平均利得である。

■Theorem 2　Shapley 値は $i = 1, ..., n$ に対して、次の $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ によって与えられる。

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})] \tag{4.6}$$

この公式の要約は、i を含む全ての提携 S にわたる要約である。量 $v(S) - v(S - \{i\})$ は、プレイヤー i が加わった時に、提携の値 $S - \{i\}$ が増える事による量である。従って $\phi_i(v)$ を求めるために、i を含む全て

の提携を単純にリストにし、その提携へのプレイヤー i の貢献の値を計算し、$(|S|-1)!(n-|S|)!/n!$ をかけ、合計を出せ。

この公式の説明は次の通りである。プレイヤーが同様に好む全ての $n!$ の順序 (順列) のプレイヤーの無作為な順序を選ぶとする。この順番に従って入る。プレイヤー i が入った時に提携 S を形作るなら (すなわち、既に $S-\{i\}$ を求めた場合)、量 $[v(S)-v(S-\{i\})]$ を受け取る。

i が入る時、既に提携 $S-\{i\}$ を求めるであろう確率は、$(|S|-1)!(n-|S|)!/n!$ である。分母は、n 人のプレイヤーの順列の合計数である。分子は、最初に $S-\{i\}$ に来た $|S|-1$ のメンバー ($(|S|-1)!$ の方法)、プレイヤー i、残った $n-|S|$ のプレイヤー ($(n-|S|)!$ の方法) のこれらの順列の数である。よってこの公式は、$\phi_i(v)$ はプレイヤーらが連続的に無作為な順序でこの提携を作る場合に、プレイヤー i が完全提携に与える平均量である、という事を示している。

この公式を使う説明として、セクション 4.2.4 の例 1 をもう一度計算しよう。プレイヤー 1 が最初に入る確率は $2!0!/3! = 1/3$ で、利得は $v(\{1\}) = 1$ である。1 が 2 番目に入り 2 を見つける確率は 1/6 で、利得は $v(\{1,2\}) - v(\{2\}) = 4 - 0 = 4$ である。1 が 2 番目に入り 3 を見つける確率は 1/6 で、期待利得は $v(\{1,3\})-v(\{3\}) = 3-1 = 2$ である。1 が最後に入る確率は 1/3 で、利得は $v(\{1,2,3\})-v(\{2,3\}) = 8-5 = 3$ である。プレイヤー 1 の平均利得は、従って次のように簡単に求められる。

$$\phi_1(v) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 3 = 14/6$$

次の表は、3 人全てのプレイヤーに対する同時の計算を表している。プレイヤーの 6 つの異なる順序が、プレイヤーらへの利得に沿って表にされている。1 行目では、プレイヤーが 1,2,3 という順序で入る。プレイヤー 1 は、$v(1) = 1$ を受け取る。プレイヤー 2 は、$v(1,2) - v(1) = 4 - 1 = 3$ を受け取る。最後に、プレイヤー 3 は、$v(N) - v(1,2) = 8 - 4 = 4$ を受け取る。6 つの行それぞれが、同様に 1/6 の確率である。Shapley 値は、各列の 6 つの数字の平均である。

	プレイヤー			
順序	1	2	3	合計
1 2 3	1	3	4	8
1 3 2	1	5	2	8
2 1 3	4	0	4	8
2 3 1	3	0	5	8
3 1 2	2	5	1	8
3 2 1	3	4	1	8
平均	14/6	17/6	17/6	8

■定理 2 の証明　公式 (4.6) が Shapley 値を与えることを確かめるために、多くともそのような 1 つの関数 ϕ がある事が既に示されているので、公理 1 から 4 までを満たす事を確かめればよい。公理 2,3,4 は、定理 2 の公式から直接確かめる事は簡単である。公理 1 は、それぞれの完全提携の実現化において、まさに $v(N)$ がプレイヤーに与えられるので、公式の上の説明から続く。従って、プレイヤーらに与えられる

平均量もまた $v(N)$ である。■

4.3.4　単純ゲーム、Shapley-Shubik 指数

Shapley 値は、選挙ゲームのメンバーの力のモデル化における重要な応用がある。この応用は、Shapley と Shubik によって 1954 年に改良され、その測度は、現在 Shapley-Shubik 指数として知られている。

プレイヤーらは議会のメンバー、または会社の管理職会議のメンバー等である。そのようなゲームでは、提案された法案または決定は、可決されるか却下される。外部の手助け無しで法案を可決できるプレイヤーらの部分集合を勝利提携といい、そうできない方を敗北提携という。全てのそのようなゲームでは、勝利提携の値を 1 とし、敗北提携の値を 0 とする。そのようなゲームを、単純ゲームという。

■Definition　全ての提携 $S \subset N$ に対して、$v(S) = 0$ か $v(S) = 1$ なら、ゲーム (N, v) は**単純**であるという。

単純ゲームにおいて、提携 S は、$v(S) = 1$ なら**勝利**提携といい、$v(S) = 0$ なら**敗北**提携という。よって単純ゲームでは、全ての提携が勝利か敗北のどちらかである。v の優加法性から、単純ゲームでは敗北提携の全ての部分集合は敗北で、勝利提携の全ての上位集合は勝利である。

単純ゲームの典型的な例は、次の通りである。

(1) **多数決原理ゲーム** $v(S) = \begin{cases} 1 & |S| > n/2 \\ 0 & |S| \le n/2 \end{cases}$

(2) **満場一致ゲーム** $v(S) = \begin{cases} 1 & S = N \\ 0 & S \ne N \end{cases}$

(3) **独裁者ゲーム** $v(S) = \begin{cases} 1 & 1 \in S \\ 0 & 1 \notin S \end{cases}$

単純ゲームに対して、$[v(S) - v(S - \{i\})]$ が常に 0 か 1 なので、Shapley 値の公式 (4.6) を簡単にできる。$v(S)$ と $v(S - \{i\})$ の両方が 0 か、両方が 1 なら 0 になり、そうでなければ 1 になる。従って、i の勝利であるか、i でない敗北である提携 S だけの集まりなら、公式 (4.6) から $[v(S) - v(S - \{i\})]$ を取り除ける。Shapley 値 (Shapley-Shubik 指数) の公式 (4.6) は、次のようになる。

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S\ \text{勝利} \\ S-\{i\}\ \text{敗北}}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \tag{4.7}$$

例. 加重投票ゲームと呼ばれる単純ゲームの大きな種類がある。重みと呼ばれるある非負数 w_i と、割り当てと呼ばれるある正の数 q に対して、特性関数を次のように定義する。

$$v(S) = \begin{cases} 1 & (\sum_{i \in S} w_i > q) \\ 0 & (\sum_{i \in S} w_i \le q) \end{cases}$$

$q = (1/2)\sum_{i\in N} w_i$ なら、加重多数決ゲームと呼ばれる。

例として、会社においてそれぞれ 10,20,30,40 の株を取得しているプレイヤー 1,2,3,4 のゲームを考えよ。株の多数決 (50% 以上) によって、決定は承認される。これは、重み $w_1 = 10, w_2 = 20, w_3 = 30, w_4 = 40$ で、割り当てが $q = 50$ である加重多数決ゲームである。

このゲームの Shapley 値を求めよう。勝利提携は $\{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}$ と全ての上位集合である (これらの 1 つを含んでいる集合)。$i = 1$ に対して、$S = \{1,2,3\}$ でない限り、$v(S) - v(S - \{1\}) = 0$ なので、

$$\phi_1(v) = \frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{12}$$

$i = 2$ に対して、$S = \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}$ でない限り、$v(S) - v(S - \{2\}) = 0$ なので、

$$\phi_2(v) = \frac{1!2!}{4!} + 2\frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{4}$$

同様に、$\phi_3(v) = 1/4$ である。$i = 4$ に対して、$S = \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$ でない限り、$v(S) - v(S - \{4\}) = 0$ なので、

$$\phi_4(v) = 2\frac{1!2!}{4!} + 3\frac{2!1!}{4!} = \frac{5}{12}$$

Shapley 値は、$\phi = (1/12, 3/12, 3/12, 5/12)$ である。プレイヤー 3 がより多く株を取得しているものの、プレイヤー 2 と 3 の値は同じである。

4.3.5 Exercises

1. (1 人の売り手と 2 人の買い手の市場) プレイヤー 1 は、彼にとって本質的に価値がない美術品を持っている。従って彼をそれを売りたいと思っている。その品は、プレイヤー 2 には 30 ドル、プレイヤー 3 には 40 ドルの価値がある。ゲームを特性関数の形にせよ。Shapley 値を求めよ。コアの中に Shapley 値はあるか (セクション 4.2.4 の例 2 で言及)。
   特性関数は、$v(\{\emptyset\}) = 0, v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0, v(\{1,2\}) = 30, v(\{1,3\}) = v(N) = 40$ である。$i = 1$ に対して、$\phi_1(v)$ は次のように与えられる。

   $$\phi_1(v) = \frac{1!1!}{3!}\cdot 30 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 40 + \frac{2!0!}{3!}\cdot 40 = 25$$

   同様に、$\phi_2(v) = 5, \phi_3(v) = 10$ である。従って、Shapley 値は $\phi = (25, 5, 10)$ である。コアの集合は $x_1 + x_3 \geq 40$ でなくてはならないので、コアの中に Shapley 値はない。

2. 次の特性関数のゲームの Shapley 値を求めよ。

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = 1 & v(\{1,2\}) = 2 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = -1 & v(\{1,2,3\}) = 6 \\ & v(\{3\}) = -4 & v(\{2,3\}) = 3 & \end{array}$$

$i = 1$ に対して、$\phi_1(v)$ は次のように与えられる。

$$\phi_1(v) = \frac{0!2!}{3!} \cdot 1 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 2 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 3 + \frac{2!0!}{3!} \cdot 3 = \frac{13}{6}$$

同様に、$\phi_2(v) = 11/3, \phi_3(v) = 1/6$ である。従って、Shapley 値は、$\phi = (13/6, 11/3, 1/6)$ である。

3. (a)v の優加法性を使って、Shapley 値が imputation である事を示せ。
(b)T を N の固定された提携とする。$\phi_x(v)$ は、$x \in T$ なら $v(T)$(他の $v(S)$ で、固定された $S \neq T$) の単調増加関数で、$x \notin T$ なら $v(T)$ の単調減少関数である事を示せ。

4. 次の特性関数の n 人ゲームの Shapley 値を求めよ。
(a)$v(S) = \begin{cases} |S| & (1 \in S) \\ 0 & (1 \notin S) \end{cases}$
$i = 1$ に対して、$1 \in S$ である S に限り、$v(S) - v(S - \{1\}) = |S|$ なので、次のように書ける。

$$\phi_1(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ 1 \in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}|S|$$

また、$j = 2, ..., n$ に対して、$1, j \in S$ である S に限り、$v(S) - v(S - \{j\}) = 1$ なので、次のように書ける。

$$\phi_j(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ 1, j \in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$$

よって Shapley 値は、上のようになる。

(b)$v(S) = \begin{cases} |S| & (1 \in S \text{ または } 2 \in S) \\ 0 & (1 \notin S \text{ かつ } 2 \notin S) \end{cases}$
$i = 1$ に対して、$1 \in S$ かつ $2 \notin S$ である S に限り、$v(S) - v(S - \{1\}) = |S|$ なので、次のように書ける。

$$\phi_1(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ 1 \in S, 2 \notin S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}|S|$$

$i = 2$ に対して、$2 \in S$ かつ $1 \notin S$ である S に限り、$v(S) - v(S - \{2\}) = |S|$ なので、次のように書ける。

$$\phi_2(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ 2 \in S, 1 \notin S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}|S|$$

また、$j = 3, ..., n$ に対して、$1, j \in S$ または $2, j \in S$ である S に限り、$v(S) - v(S - \{j\}) = 1$ なので、次のように書ける。

$$\phi_j(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ 1, j \in S \text{ or } 2, j \in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$$

よって Shapley 値は、上のようになる。

$$(c)v(S) = \begin{cases} |S| & (1 \in S \text{ かつ } 2 \in S) \\ 0 & (1 \notin S \text{ または } 2 \notin S) \end{cases}$$

$i = 1$ に対して、$1, 2 \in S$ である S に限り、$v(S) - v(S - \{1\}) = |S|$ なので、次のように書ける。

$$\phi_1(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ 1,2 \in S}} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} |S|$$

$i = 2$ に対しても、$1, 2 \in S$ である S に限り、$v(S) - v(S - \{2\}) = |S|$ なので、次のように書ける。

$$\phi_2(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ 1,2 \in S}} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} |S|$$

また、$j = 3, ..., n$ に対して、$1, 2, j \in S$ である S に限り、$v(S) - v(S - \{j\}) = 1$ なので、次のように書ける。

$$\phi_j(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ 1,2,j \in S}} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!}$$

よって Shapley 値は、上のようになる。

5. 全ての単純ゲームは加重投票ゲームであるか。証明するか、反例を挙げよ。

(反例) 単純ゲームの例 (2) で挙げられている満場一致ゲームを考える。これを n 人で行った場合、$w_i = 1/n$ とすれば、特性関数を次のように定義できる。

$$v(S) = \begin{cases} 1 & (\sum_{i \in S} w_i = 1) \\ 0 & (\sum_{i \in S} w_i < 1) \end{cases}$$

従って、$q = (n - 1)/n > (1/2) \sum_{i \in N} w_i$ なので、加重多数決ゲームではない。

6. 4 人のプレイヤーがそれぞれ 10,30,30,40 のシェアを持っている加重多数決ゲームの Shapley 値を求めよ。

勝利提携は、$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ と全ての上位集合である。$i = 1$ に対して、どんな S についても $v(S) - v(S - \{1\}) = 0$ なので、$\phi_1(v) = 0$。$i = 2$ に対して、$S = \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}$ でない限り $v(S) - v(S - \{2\}) = 0$ なので、

$$\phi_2(v) = 2\frac{1!2!}{4!} + 2\frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{3}$$

$i = 3$ に対して、$S = \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}$ でない限り $v(S) - v(S - \{3\}) = 0$ なので、

$$\phi_3(v) = 2\frac{1!2!}{4!} + 2\frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{3}$$

$i = 4$ に対して、$S = \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$ でない限り $v(S) - v(S - \{4\}) = 0$ なので、

$$\phi_4(v) = 2\frac{1!2!}{4!} + 2\frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{3}$$

従って、Shapley 値は、$\phi = (0, 1/3, 1/3, 1/3)$ である。

7. プレイヤー 1 が $2n - 3$、プレイヤー 2 から n は 2 のシェアを持っている $n \geq 3$ 人の加重多数決ゲームの Shapley 値を求めよ。
この場合の割り当て q は、$q = 2n - 3 + 2(n - 1) = (4n - 5)/2$ である。従って、勝利提携は $\{1, i\}(i = 2, ..., n)$ と $\{2, ..., n\}$ と全ての上位集合である。$i = 1$ に対して、$1 \in S$ かつ $S \neq N$ である S に限り $v(S) - v(S - \{1\}) = 1$ なので、

$$\phi_1(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ 1 \in S \text{ and } S \neq N}} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!}$$

$j = 2, ..., n$ に対して、$S = \{1, j\}$ または $S = \{2, ..., n\}$ である S に限り $v(S) - v(S - \{j\}) = 1$ なので、

$$\phi_j(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ S = \{1, j\} \text{ or } S = \{2, ..., n\}}} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!}$$

よって、Shapley 値は、上のようになる。

8. 4.3.4 の例を、会議の議長が投票の引き分けを決められるように変更せよ (会議の議長は株を持たない 5 人目のプレイヤーである)。Shapley 値を求めよ。

9. (a)(1 つが大政党、3 つが小政党) 1 つの大政党が投票の 1/3 を占め、3 つの小政党がそれぞれ投票の 2/9 を占めている加重多数決ゲームを考えよ。Shapley 値を求めよ。大政党の力はその比例した大きさよりも大きいか、小さいか。
大政党をプレイヤー 1、小政党をプレイヤー 2,3,4 とする。勝利提携は $\{1, j\}(j = 2, 3, 4), \{2, 3, 4\}$ と全ての上位集合である。$i = 1$ に対して、$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$ でない限り $v(S) - v(S - \{1\}) = 0$ なので、

$$\phi_1(v) = 3\frac{1!2!}{4!} + 3\frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{2}$$

$i = 2, 3, 4$ に対して、$\{1, i\}, \{2, 3, 4\}$ でない限り $v(S) - v(S - \{i\}) = 0$ なので、

$$\phi_i(v) = \frac{1!2!}{4!} + \frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{6}$$

よって、Shapley 値は $\phi = (1/2, 1/6, 1/6, 1/6)$ となり、大政党の力はその比例した大きさよりも大きいことになる。

(b)(2 つが大政党、3 つが小政党) 2 つの大政党がそれぞれ投票の 1/3 を占め、3 つの小政党がそれぞれ投票の 1/9 を占めている加重多数決ゲームを考えよ。Shapley 値を求めよ。2 つの大政党を合わせた力は、その比例した大きさよりも大きいか、小さいか。

大政党をプレイヤー 1,2、小政党をプレイヤー 3,4,5 とする。勝利提携は $\{1,2\},\{i,j,k\}(i=1,2,\ j,k=3,4,5)$ と全ての上位集合である。$i=1$ に対して、$\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{1,3,4,5\}$ でない限り $v(S)-v(S-\{1\})=0$ なので、

$$\phi_1(v)=\frac{1!3!}{5!}+6\frac{2!2!}{5!}+\frac{3!1!}{5!}=\frac{3}{10}$$

同様に、$\phi_2(v)=3/10$ である。$i=3$ に対して、$\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\}$ でない限り $v(S)-v(S-\{3\})=0$ なので、

$$\phi_3(v)=4\frac{2!2!}{5!}=\frac{2}{15}$$

同様に、$\phi_4(v)=\phi_5(v)=2/15$ である。

よって、Shapley 値は $\phi=(3/10,3/10,2/15,2/15,2/15)$ であり、大政党の力はその比例した大きさよりも小さい。

10. (L.S.Shapley(1981) Game Theory and its Applications Proceedings in Applied Mathematics Vol.24, Amer. Math. Soc.,Providence RI の Measeurement of Power in Political Systems) New York の中の群政府が、町議会で一堂に会した。概して、群の各自治体はそれぞれ 1 席を持っているが、大きい街は 2 つかそれ以上持っている。しかし、議員の区は大抵人口と全く等しくなく、会議で個々の議員が違う数の投票を与える事によって、群を通して市民の表明が平等になるような努力がされてきた。表 1 は、Nassau 群の 1964 年の状況を示している。

地区	人口	%	票数	%
Hempstead 1	728,625	57.1	31	27.0
Hempstead 2			31	27.0
Oyster Bay	285,545	22.4	28	24.3
North Hempstead	213,335	16.7	21	18.3
Long Beach	25,654	2.0	2	1.7
Glen Cove	22,752	1.8	2	1.7
合計	1,275,801		115	

表 4.1

このシステムの下で、115 の投票のうち、過半数の 58 が可決に必要な目安となる。しかし、数的な可能性の調査によって、3 つの会議の弱いメンバーが実際投票の力を少しも持っていない事が明らかにされた。実は、25 の票を合わせた合計は、決定的な影響を少しも及ぼさない。割り当てられた票の重みは、$(31,31,28,0,0,0)$ も、さらに言えば $(1,1,1,0,0,0)$ でも同じである。

Shapley 値は、明らかに (1/3, 1/3, 1/3, 0, 0, 0) である。これは明らかに不十分である。1971 年に、法律が変わり、法律を可決させるのに 58 から 63 の票が必要となった。この法律の下での Shapley 値を求め、上の表と比較せよ。

議会のメンバーを表の上からプレイヤー 1,2,3,4,5,6 と名付ける。勝利提携は、$\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,6\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,3,5,6\}$, $\{2,3,5,6\}$ と全ての上位集合である。$i = 1$ に対して、$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5,6\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,6\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,4,6\}, \{1,2,5,6\}, \{1,3,4,5\}, \{1,3,4,6\}, \{1,3,4,5,6\}$ でない限り $v(S) - v(S - \{1\}) = 0$ なので、

$$\phi_1(v) = 5\frac{2!3!}{6!} + 8\frac{3!2!}{6!} + \frac{4!1!}{6!} = \frac{1}{4}$$

同様に、$\phi_2(v) = 1/4$ である。$i = 3$ に対して、$\{1,2,3\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,3,5,6\}$, $\{2,3,5,6\}$, $\{1,3,4,5\}, \{1,3,4,6\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}$ でない限り $v(S)-v(S-\{3\}) = 0$ なので、

$$\phi_3(v) = 3\frac{2!3!}{6!} + 6\frac{3!2!}{6!} + 2\frac{4!1!}{6!} = \frac{13}{60}$$

$i = 4$ に対して、$\{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4,5\}, \{1,3,4,6\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}$ でない限り $v(S) - v(S - \{4\}) = 0$ なので、

$$\phi_4(v) = 3\frac{2!3!}{6!} + 4\frac{3!2!}{6!} + 2\frac{4!1!}{6!} = \frac{11}{60}$$

$i = 5$ に対して、$\{1,2,5\}, \{1,3,5,6\}, \{2,3,5,6\}$ でない限り $v(S) - v(S - \{5\}) = 0$ なので、

$$\phi_5(v) = \frac{2!3!}{6!} + 2\frac{3!2!}{6!} = \frac{1}{20}$$

同様に、$\phi_6(v) = 1/20$ である。
従って、Shapley 値は $\phi = (1/4, 1/4, 13/60, 11/60, 1/20, 1/20)$ であり、ほぼ人口の割合に近い値になる。

11. 国際連合安全保障理事会では、「ビッグ 5」を含め、15 の投票の国がある。決議を可決するために、15 の票のうちの 9 が必要となるが、各ビッグ 5 には拒否権がある。この状況を見る 1 つの方法は、各ビッグ 5 が 7 票、その他の国が 1 票を持ち、39 票が決議の可決に必要な比重多数決ゲームとすることである。Shapley 値を求めよ。
勝利提携は、ビッグ 5 とその他の 4 ヶ国の提携とその全ての上位集合である。あるその他の国 i に対して、ビッグ 5 と i を含むその他の 4 ヶ国の提携でない限り $v(S) - v(S - \{i\}) = 0$ なので、

$$\phi_i(v) = \binom{9}{3}\frac{8!6!}{15!} = \frac{4}{2145}$$

従って、あるビッグ 5 j に対しては、$\phi_j(v) = 421/2145$ である。

12. **費用の負担** 科学者が、3 都市で協議に招かれた。科学者への協議への報酬に加え、旅費も期待されている。しかし、これらの 3 都市は比較的近いので、全て 1 つの旅として収めれば、旅費はかなり減る。問題は、3 都市の間でどのように旅費を負担するか決める事である。3 都市 A, B, C と科学者の家 H の間の旅費の 1 つの方法は、一緒の表で与えられる (ある明確でない単位で測られている)。

$$\begin{array}{ll} H \text{ から } A \text{ までの旅費} = 7 & A \text{ から } B \text{ までの旅費} = 2 \\ H \text{ から } B \text{ までの旅費} = 8 & A \text{ から } C \text{ までの旅費} = 4 \\ H \text{ から } C \text{ までの旅費} = 6 & B \text{ から } C \text{ までの旅費} = 4 \end{array}$$

訪問の値は、それぞれの都市で同じ 20 単位とする。問題を、特性関数を述べる事によって、提携形の 3 人ゲームとせよ。Shapley 値を求めよ。旅費はどのくらいになり、各都市でどのように負担するか。

特性関数を次のように定義する (訪問の価値から、最低限の旅費を引く)。

$$\begin{array}{llll} & v(\{A\}) = 6 & v(\{A, B\}) = 23 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{B\}) = 4 & v(\{A, C\}) = 23 & v(\{A, B, C\}) = 41 \\ & v(\{C\}) = 8 & v(\{B, C\}) = 22 & \end{array}$$

A に対しては、次のようになる。

$$\phi_A(v) = \frac{0!2!}{3!} \cdot 6 + \frac{1!1!}{3!} \cdot (19 + 15) + \frac{2!0!}{3!} \cdot 19 = 14$$

B に対しては、次のようになる。

$$\phi_B(v) = \frac{0!2!}{3!} \cdot 4 + \frac{1!1!}{3!} \cdot (17 + 14) + \frac{2!0!}{3!} \cdot 18 = \frac{25}{2}$$

C に対しては、次のようになる。

$$\phi_C(v) = \frac{0!2!}{3!} \cdot 8 + \frac{1!1!}{3!} \cdot (17 + 18) + \frac{2!0!}{3!} \cdot 18 = \frac{29}{2}$$

従って Shapley 値は $\phi = (14, 25/2, 29/2)$ で、旅費の負担は (6,15/2,11/2) である。

13. **単品均衡市場 (A one-product balanced market)**(Vorob'ev) プレイヤーらの集合 N が 2 つの共通元を持たない集合、買い手 B と売り手 C で、$N = B \cup C$ と分けられる、1 つの完全可分の商品の市場を考えよ。各売り手 $k \in C$ は、ある量 y_k の商品を持っていて、各買い手 $j \in B$ は、ある量 x_j の需要がある。市場は需要と供給が等しい ($\sum_{k \in C} y_k = \sum_{j \in B} x_j$)、均衡状態にあるとする。そのようなゲームにおいては、次のような特性関数にする。

$$v(S) = \min \left\{ \sum_{j \in S \cap B} x_j, \sum_{k \in S \cap C} y_k \right\}$$

従って、提携の値は、提携のメンバーの間でできる商売の合計量である。ゲームの Shapley 値を求めよ。(ヒント：プレイヤーらの各順列に対して、プレイヤーが逆の順序で完全提携に入る逆の順

列も考えよ。)

14. (a) 次を満たす特性関数のプレイヤー $1, 2, ..., n$ の n 人ゲームを考えよ。

$$v(S) = k \ (\{1, ..., k\} \in S, k+1 \notin S)$$

例えば、$v(\{2, 3, 5\}) = 0, v(\{1, 3, 4, 6\}) = 1, v(\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}) = 3$ である。Shapley 値を求めよ (定理 1 を使え)。
(b) 次のように一般化せよ。

$$v(S) = a_k \ (\{1, ..., k\} \in S, k+1 \in S, 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n)$$

15. **空港ゲーム** (Littlechild and Owen(1973)) 次の費用の負担問題を考えよ。飛行場を建設すると、n 人のプレイヤーの利益になる。プレイヤー j は、費用 c_j で建設し、全てのプレイヤーを収めるために、飛行場は $\max_{1 \leq j \leq n} c_j$ の費用で建てられるだろう事を要求している。プレイヤーらの間でどのように費用を分けるべきか。全ての費用は異なり、$c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ とする。ゲームの特性関数を次のようにする。

$$v(S) = -\max_{j \in S} c_j$$

(a)$R_k = \{k, k+1, ..., n\}(k = 1, 2, ..., n)$ とし、特性関数 v_k を次のように定義する。

$$v_k(S) = \begin{cases} -(c_k - c_{k-1}) & (S \cap R_k \neq \emptyset) \\ 0 & (S \cap R_k = \emptyset) \end{cases}$$

$v = \sum_{k=1}^n v_k$ である事を示せ。
(b)Shapley 値を求めよ。

16. 1 人の売り手と m 人の買い手の市場 プレイヤー 0 は、彼にとって本質的に何の価値もない物を持っている。買い手 j は、物に a_j ドルの価値をつけている。$a_1 > a_2 > \cdots > a_m > 0$ とする。特性関数を作り、Shapley 値を求めよ (答え : 売り手は $\phi_0(v) = \sum_{k=1}^m a_k/(k(k+1)$ で、買い手は、

$$\phi_j(v) = \frac{a_j}{j(j+1)} - 2 \sum_{k=j+1}^{m} \frac{a_k}{(k-1)k(k+1)} \text{である)}$$

17. **単純ゲームのコア** 単純ゲーム (N, v) では、プレイヤー i は、$v(N - \{i\}) = 0$ ならば拒否プレイヤーという。
(a) 拒否プレイヤーがいなければ、コアは空である事を示せ。
x を imputation とする。拒否プレイヤーがいないので、$^\forall i$ に対して $v(N - \{i\}) = 1$ である。従って、コアの集合は $^\forall i$ に対して $x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n \geq 1$ を満たす imputation である。これを満たすためには、$x_1 + \cdots + x_n \geq n/(n-1) > 1$ でなければならないので、コアは空であることが言え

る。

(b) 逆に、少なくとも 1 人拒否プレイヤーがいれば、コアは空でない事を示せ。
ある拒否プレイヤー k に対して、$v(N - \{k\}) = 0$ である。
(c) コアを述べよ。

4.4 仁

n 人協力ゲームのもう 1 つの興味深い価値関数は、仁という、Schmeidler(SIAM J. Appl. Math, 1969) によって紹介された概念で見つけられる。全ての特性関数の集合において定義された価値関数への公平性の一般的な公理化を応用する代わりに、固定された特性関数 v を見て、最も悪い不公平な imputation $x = (x_1, ..., x_n)$ を見つけようとする。すなわち、それぞれの提携 S が、提案された imputation でどのように満たさないかどうかを調べ、最大の不満を最小化しようとする。

4.4.1 仁の定義

提携 S に対する imputation x の不公平さの単位として、超過として定義される。

$$e(x, S) = v(S) - \sum_{j \in S} x_j$$

配分 x におけるその可能性 $v(S)$ なしでは落ちる提携 S によって、量 (不公平の大きさ) を測る。コアは、全ての提携 S に対して $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ となるような imputation の集合として定義されているので、imputation x は、全ての超過が負か 0 である時に限り、コアの中にあるという事をすぐに言える。

最も大きな声で叫んだ人が最初を務めるという原理において、固定された配分 x に対して超過が最も大きい提携 S を最初に見る。可能ならば、x の最も大きい超過を小さくするようにする。最も大きい超過をできるだけ小さくした時、次に大きな超過に注目し、x をできるだけ小さくするようにして、これを続ける。例で、この方法を明らかにする。

■**例** 1. **倒産ゲーム** (O'Niell (1982))　小さな会社が、3 つの債権者からの借りで倒産しようとしている。会社は、債権者 A からは 10000 ドル、債権者 B からは 20000 ドル、債権者 C からは 30000 ドル借りている。会社がこれらの負債を埋める為に 36000 ドルしか持っていないとすれば、債権者の間でどうお金を分けるべきか。**プロラタ (残高按分比例)** では、それぞれへの配分を A には 6000 ドル、B には 12000 ドル、C には 18000 ドルにし、1000 ドル単位で $x = (6, 12, 18)$ と表す。この配分と、これから提案する Shapley 値と仁の配分を比べてみる。

最初に、このゲームを表す特性関数を決めなくてはならない。もちろん、特性関数の定義から $v(\emptyset) = 0$ で、1000 ドル単位で $v(ABC) = 36$ で、1 人ずつでは、A は他の 2 人が全体の量を受け取るので、何かを受け取る保証がなく、従って $v(A) = 0$ である。同様に、$v(B) = 0$ である。債権者 C は、A と B が彼らの要求の合計量、30000 ドルを受け取ったとしても、36000 ドル $-$30000 ドル =6000 ドル残るので、確かに少なくとも 6000 ドル受け取れる。従って $v(C) = 6$ である。同様に、$v(AB) = 6, v(AC) = 16, v(BC) = 26$ である。

このゲームの仁を求めるために、$x = (x_1, x_2, x_3)$ を有効な配分 (すなわち $x_1 + x_2 + x_3 = 36$ とせよ) とし、下の表で見つけられる超過を見よ。空集合と完全提携は、超過が常に 0 なので、考察から除外してよい。進め方の考えを得るために、最初に任意の点、つまりプロラタ点 (6,12,18) を考えよ。表を見ると、超過

のベクトルは $e = (-6, -12, -12, -12, -8, -4)$ である。これらで最も大きい数は、提携 BC に対応する -4 である。この提携は、全ての他の提携がそれより良くしている要求であろう。よってこの提携に対して、$x_2 + x_3$ をより大きくするか、x_1 をより小さくするか ($x_1 = 36 - x_2 - x_3$ なので) によって、対象を改善しようとする。しかし、BC の超過を小さくするにつれ、A の超過が同じ割合で増えるので、$x_1 = 5$ の時、これらの超過が -5 で交わる。提携 A と BC の少なくとも 1 つの超過が少なくとも -5 なので、最大の超過を -5 より小さくできる x の選択がない事は明らかである。従って、$x_1 = 5$ は仁の最初の要素である。

S	$v(S)$	$e(x,S)$	$(6,12,18)$	$(5,12,19)$	$(5,10.5,20.5)$	$(6,11,19)$
A	0	$-x_1$	-6	-5	-5	-6
B	0	$-x_2$	-12	-12	-10.5	-11
C	6	$6 - x_3$	-12	-13	-14.5	-13
AB	6	$6 - x_1 - x_2$	-12	-11	-9.5	-11
AC	16	$16 - x_1 - x_3$	-8	-8	-9.5	-9
BC	26	$26 - x_2 - x_3$	-4	-5	-5	-4

x_1 は固定されていても、まだ x_2 と x_3 は $x_2 + x_3 = 36 - 5 = 31$ で変動し、次に大きな超過をより小さくするそれらを選ぶ。次の推測として点 $x = (5, 12, 19)$ を選ぶと、-5 の次に大きな超過は、提携 AC に対応する -8 である。これをより小さくするために、x_3 を大きく (x_2 を小さく) しなければならない。しかしそうするにつれ、提携 B と AB の超過が同じ割合で増える。提携 AB の超過は -8 のより近くで始まるので、$e(x, AB) = e(x, AC)$ となるような x_2, x_3 を見つける。これは $x_2 = 10.5, x_3 = 20.5$ である。仁は従って、$(5, 10.5, 20.5)$ である。

この解と Shapley 値を比べてみると興味深い。セクション 3 で与えられた方法で Shapley 値を計算できる。公式を使って、次がわかる。

$$\phi_A = (1/3)(0) + (1/6)(6) + (1/6)(10) + (1/3)(10) = 6$$
$$\phi_B = (1/3)(0) + (1/6)(6) + (1/6)(20) + (1/3)(20) = 11$$
$$\phi_C = (1/3)(6) + (1/6)(16) + (1/6)(26) + (1/3)(30) = 19$$

表の最後の列は、Shapley 値の超過を示している。■

特性関数 v のゲームの仁の概念をより詳細に定義する。最初に、上の例において与えられる最大超過をより小さくする考え方を反映する、ベクトルの配列を定義する。

$O(x)$ を、減少 (非増加) 順序に配列された超過のベクトルとして定義する。例えば、$x = (6, 12, 18)$ なら $O(x) = (-4, -6, -8, -12, -12, -12)$ である。ベクトル $O(x)$ では、辞書式順序を使う。ベクトル $y = (y_1, ..., y_k)$ は、ベクトル $z = (z_1, ..., z_k)$ より辞書では前で、$y_1 < z_1$ なら、または $y_1 = z_1$ で $y_2 < z_2$ なら、または $y_1 = z_1, y_2 = z_2$ で $y_3 < z_3$ なら、または...、または $y_1 = z_1, ..., y_{k-1} = z_{k-1}$ で $y_k < z_k$ ならば、$y <_L z$ と書く。

すなわち、y と z の 1 つ目の要素が異なれば $y <_L z$ で、y の要素は対応する z の要素より小さい。同様に、$y <_L z$ と $y = z$ のどちらも満たしていれば、$y \leq_L z$ と書く。仁は、辞書式順序で $O(x)$ を最小化する効果的な分配である。

■Definition　$X = \{x : \sum_{j=1}^{n} x_j = v(N)\}$ を効果的な分配とする。ベクトル $\nu \in X$ は、全ての $x \in X$ に対して $O(\nu) \leq_L O(x)$ なら、仁である。

4.4.2　仁の特性

仁の主な特性は、次の定理で証明なしで述べられる。

■Theorem 1　提携形のゲームの仁はただ 1 つ存在する。仁は group rational で、individually rational で、対称公理とダミー公理を満たす。コアが空でないなら、仁はコアの中にある。

証明で最も難しい部分は、仁の一意性である。議論は Owen の本を見よ。仁は常にただ 1 つ存在するので、ゲームの仁について述べる。Shapley 値のように、仁は特性関数が優加法的、またはより一般的に、全てのプレイヤー i と i を含まない全ての提携 S に対して、$v(S) + v(\{i\}) \leq v(S \cup \{i\})$ という意味で単調なら、individural rationality を満たす。shapley 値と対照的に、仁はコアが空でなければ、コアの中にある (Exercise 1)。

仁は Shapley 値の最初の 3 つの公理を満たすので、線形公理は満たさない。

会社の残りの財産が 0 ドルから 60000 ドルに ($v(N)$ が 0 から 60 に) 変わるにつれ、倒産会社の例ではどのように仁と Shapley 値が変わるのかを見るのはとても興味深い。$v(N)$ が 0 から 15 の間の時、仁はプレイヤーの間で等しく分ける。$v(N)$ が 15 から 25 の時は、仁は 15 より上の超過を B と C に等しく分ける。$v(N)$ が 25 から 35 の時は、25 より上の超過は全て C へ行く。$v(N)$ が 35 から 45 の時は、35 より上の超過は B と C に分け、$v(N)$ が 45 から 60 の時は、45 より上の超過は 3 人のプレイヤーで等しく分けられる。

仁

$v(N)$ の値が	0-15	等しく分ける
	15-25	B, C で分ける
	25-35	C が全てを得る
	35-45	B, C で分ける
	45-60	等しく分ける

Shapley 値

$v(N)$ の値が	0-10	等しく分ける
	10-20	B, C で分ける
	20-40	C が 2/3 を得て、A, B が 1/6 を得る
	40-50	B, C で分ける
	50-60	等しく分ける

$v(N) = 30$ で、仁と Shapley 値はプロラタ点で一致する事に注意せよ。プロラタ点と比較して、Shapley 値と仁の両方は、$v(N)$ が小さければより弱いプレイヤーに有利になり、$v(N)$ が大きければより強いプレイヤーに有利になり、仁よりも Shapley 値の方がよりそうである。

4.4.3　仁の計算

仁は、Shapley 値よりも計算するのが難しい。実際、仁を見つける最初の段階は、$\sum x_j = v(N)$ を条件とした全ての S において超過 $e(x, S)$ の最大値を最小化するベクトル $x = (x_1, ..., x_n)$ を見つける事である。線形制約を条件とした一次関数の収集の最大値を最小化するこの問題は、簡単に線形計画問題に変形でき、従って例えばシンプレックス法で解く事ができる。そうした後に、次に大きな超過を最小化する次の線形計画問題を解き、これを続ける。

$n = 3$ に対して、これらの問題は難しくはないが、倒産会社の例よりは難しい。もう 1 つの例に取り組む事は有益である。次のようであるとする。

$$\begin{array}{llll} & v(\{A\}) = -1 & v(\{AB\}) = 3 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{B\}) = 0 & v(\{AC\}) = 4 & v(\{ABC\}) = 5 \\ & v(\{C\}) = 1 & v(\{BC\}) = 2 & \end{array}$$

単独では、A が最も悪い状態だが、提携を作ればより良くなる。shapley 値は $\phi = (10/6, 7/6, 13/6)$ である。仁を求めよう。

最初の推測として、(1,1,3) を考える。下の表では、提携 AB で最大の超過が起こっている事がわかる。これを良くする為に、x_3 を減らさなくてはならない。次に大きな超過が提携 AC で、x_2 を固定し (x_1 を増やし)、AB と AC の超過が等しくなるように $x_3 = 2$ を選ぶ。これにより、最も大きな超過が提携 AB, AC で起こる 0 である点 (2,1,2) を導く。これをより小さくするために、x_2, x_3 の両方を小さくしなくてはならない。これに関して x_1 を増やせば、BC の超過が増えるだろう。AB, AC, BC の超過が全て等しい時に、最も良くなる事がわかる。3 つの式を解くと、

$$x_3 - 2 = x_2 - 1 = x_1 - 3 \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$x_3 = x_2 + 1, x_1 = x_2 + 2$ がわかるので、解は $x = (8/3, 2/3, 5/3)$ である。これは仁である。

S	$v(S)$	$e(x,S)$	$(1,1,3)$	$(2,1,2)$	$(8/3,2/3,5/3)$
A	-1	$-1 - x_1$	-2	-3	$-11/3$
B	0	$-x_2$	-1	-1	$-2/3$
C	1	$1 - x_3$	-2	-1	$-2/3$
AB	3	$3 - x_1 - x_2 = x_3 - 2$	1	0	$-1/3$
AC	4	$4 - x_1 - x_3 = x_2 - 1$	0	0	$-1/3$
BC	2	$2 - x_2 - x_3 = x_1 - 3$	-2	-1	$-1/3$

Shapley 値と比較して、仁はプレイヤー 1 にとても寛大である。Shapley 値は $v(N)$ の 1/3 をプレイヤー 1 に与えるのに対して、仁は $v(N)$ の半分以上をプレイヤー 1 に与える。

4.4.4　Exercises

1. コアが空でなければ、仁はコアの中にある事を証明せよ。
   コアの定義から、コアは ${}^\forall S \subset N$ に対して、$v(S) - \sum_{j \in S} x_j \leq 0$ である。仁は全ての提携に対して、

超過の最大値を最小化するので、コアが存在するなら明らかに $e(x, S) \leq 0$ である。従って、仁はコアの中にある事は明らかである。

2. 3 人定数和ゲームで、仁は Shapley 値と同じである事を証明せよ。

3. **牛追い** 牧場経営者 A は、市場への準備ができた何頭かの牛を持っていて、売った利益が 1200 ドルであると予想している。しかし、他の 2 人の牧場経営者が A の牧場と市場の街の間にいる。これらの牧場の持ち主 B, C は、土地における通行権を認めないか、適当な報酬を要求する事ができる。適当な報酬をどのように配分すべきか。特性関数を、$v(A) = v(B) = v(C) = 0$ と $v(AB) = v(AC) = v(ABC) = 1200$ とする。
(a) コアを求め、1 点しかない事に注意せよ。この点は仁でなければならない (なぜか)。
imputation $x = (x_A, x_B, x_C)$ とする。コアは、$x_A + x_B \geq 1200, x_A + x_C \geq 1200$ でなくてはならないので、これを満たす imputation は $(1200, 0, 0)$1 点しかない。Exercise 1 より、仁はコアの中になければならないので、仁は (1200,0,0) である。

(b)Shapley 値を求めよ。
A に対して、$\{AB\}, \{AC\}, \{ABC\}$ の時 $v(S) - v(S - \{A\}) = 1200$ なので、
$$\phi_A(v) = 2\frac{1!1!}{3!} \cdot 1200 + \frac{2!0!}{3!} \cdot 1200 = 800$$
B に対して、$\{AB\}$ の時 $v(S) - v(S - \{B\}) = 1200$ なので、
$$\phi_B(v) = \frac{1!1!}{3!} \cdot 1200 = 200$$
同様に、$\phi_C(v) = 200$ である。従って、Shapley 値 $\phi = (800, 200, 200)$ である。

(c) 報酬の問題について、仁と Shapley 値のどちらが適切であると思われるか。そしてそれはなぜか。
仁の値は売り上げ全てを A が手に入れ、B, C には払わないというものであるが、B, C が通行権を持っている以上、A が売り上げを全部取るという形を取るなら、A を通しても通さなくても B, C には利得はないので、通さないという選択肢を選ぶ可能性もある。従って、B, C も利得を得る Shapley 値の方が適切であると思われる。

4. Exercise 4.3.5.1 の仁を求めよ。Shapley 値と比較せよ。計算する前に仁は Shapley 値と同じでないと言えるか。
最初に、Shapley 値 (25,5,10) を考える。この時の最大の超過は提携 $\{1, 3\}$ で起こる。次に大きな超過が提携 $\{1, 2\}$ で、x_3 を固定し、$\{1, 3\}$ と $\{1, 2\}$ の超過が等しくなるように $x_2 = 0$ を選ぶ。これにより、最も大きな超過が $\{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}$ で起こる 0 である点 (30,0,10) を導く。x_2 はこれ以上小さ

くできないので、x_3 を小さくしなくてはならない。$\{1,2\}$ と $\{2,3\}$ の超過が等しい時に最も良くなるので、解は $(35,0,5)$ で、これは仁である。

S	$v(S)$	$e(x,S)$	$(25,5,10)$	$(2,1,2)$	$(35,0,5)$
1	0	$-x_1$	-25	-30	-35
2	0	$-x_2$	-5	0	0
3	0	$-x_3$	-10	-10	-5
1, 2	30	$30 - x_1 - x_2 = x_3 - 10$	0	0	-5
1, 3	40	$40 - x_1 - x_3 = x_2$	5	0	0
2, 3	0	$-x_2 - x_3 = x_1 - 40$	-15	-10	-5

また、Exercise 4.3.5.1 で既にこのゲームの Shapley 値がコアの中にない事を示しているので、計算する前に仁が Shapley 値と等しくない事はわかる。

5. Exercise 4.3.5.2 の仁を求めよ。
最初に、(2,4,0) を考える。この時の最大の超過は $\{1\}, \{2,3\}$ で起こるが、x_1 はこれ以上小さくできない ($x_1 = 2$ で $\{1\}$ と $\{2,3\}$ の超過が等しくなるため)。次に大きな超過は $\{1,3\}$ で起こるので、x_2 を減らすと共に x_3 を増やす。$\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}$ の超過が等しくなるようにすると、$x_2 = 7/2, x_3 = 1/2$ となる。従って、解は (2,7/2,1/2) で、これは仁である。

S	$v(S)$	$e(x,S)$	$(2,4,0)$	$(2,7/2,1/2)$
1	0	$1 - x_1$	-1	-1
2	0	$-x_2$	-4	$-7/2$
3	-4	$-4 - x_3$	-4	$-9/2$
1, 2	2	$2 - x_1 - x_2 = x_3 - 4$	-4	$-7/2$
1, 3	-1	$-1 - x_1 - x_3 = x_2 - 7$	-3	$-7/2$
2, 3	3	$3 - x_2 - x_3 = x_1 - 3$	-1	-1

6. Exercise 4.3.5.4(a) の仁を求めよ。仁が対称公理を満たすと仮定してよい。
仁が対称公理を満たすので、imputation $(x_1, ..., x_n)$ において、$x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ である事が言える。従って、imputation の集合は $\{(x_1, x_2, x_2, ..., x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + (n-1)x_2 = n\}$ と書き換えられる。
7. Exercise 4.3.5.6 の仁を求めよ。仁がダミー公理を満たすと仮定してよい。

8. **負担配分** 3 つの農場が互いに、そして高速道路と図で表されるように舗装されていない道でつながっている。それぞれの農場経営者は、自分の農場と高速道路をつなげた舗装された道路によって利益を得ようとする。これらの利益の量は、各括弧 [...] で表される。道を舗装するのにかかる費用は、セクション毎に図で表されている。
単独の経営者が自分だけの道を舗装して利益を得られないが、協力事業が明らかに有益である事はのは明らかである。
(a) 特性関数を定めよ。

高速道路までの負担が最小になるように道を選ぶ。ただし、提携を結ぶ場合は両者が共に高速道路に辿り着けるようにする。すると、特性関数は次のようになる。

$$\begin{array}{llll} & v(\{A\}) = -1 & v(\{AB\}) = 1 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{B\}) = -1 & v(\{AC\}) = -1 & v(\{ABC\}) = 8 \\ & v(\{C\}) = 0 & v(\{BC\}) = 7 & \end{array}$$

(b)Shapley 値を求めよ。

A, B, C の値は、それぞれ次のようになる。

$$\phi_A(v) = \frac{0!2!}{3!} \cdot (-1) + \frac{1!1!}{3!} \cdot (2 + (-1)) + \frac{2!0!}{3!} \cdot 1 = 1/6$$
$$\phi_B(v) = \frac{0!2!}{3!} \cdot (-1) + \frac{1!1!}{3!} \cdot (2 + 7) + \frac{2!0!}{3!} \cdot 9 = 25/6$$
$$\phi_C(v) = \frac{1!1!}{3!} \cdot 8 + \frac{2!0!}{3!} \cdot 7 = 11/3$$

従って、Shapley 値 $\phi = (1/6, 25/6, 11/3)$ である。

(c) 仁を求めよ。

最初に、(0,4,4) を考える。この時の最大の超過は A, BC で起こるが、x_1 はこれ以上小さくできない。次に大きな超過は AB で起こるので、x_3 を減らし、x_2 を増やす。つまり、C, AB の超過が等しくなればよいので、(0,9/2,7/2) とすればよい。従って、仁は (0,9/2,7/2) である。

S	$v(S)$	$e(x,S)$	$(0,4,4)$	$(0,9/2,7/2)$
A	-1	$-1-x_1$	-1	-1
B	-1	$-1-x_2$	-5	$-11/2$
C	0	$-x_3$	-2	$-7/2$
AB	1	$1-x_1-x_2=x_3-7$	-3	$-7/2$
AC	-1	$-1-x_1-x_3=x_2-9$	-5	$-9/2$
BC	7	$7-x_2-x_3=x_1-1$	-1	-1

9. **地主と百姓** 1 人の特別なプレイヤーがいる対称ゲームの一般化である。ゲームは、1 人の地主と m 人の百姓の $n = m+1$ 人のプレイヤーでプレーされる。百姓は単独では何も生み出せないし、地主もそうである。全ての百姓は交換可能である。もし k 人の百姓と地主が協力すれば、合同で

$f(k)(0 = f(0) < f(1) < f(2) < \cdots < f(m))$ の量を受け取れる。地主をプレイヤー 1 とし、百姓をプレイヤー 2 から n とする。従って、

$$v(S) = \begin{cases} f(|S| - 1) & (1 \in S) \\ 0 & (1 \notin S \end{cases}$$

(a)$m = 3, f(x) = x$ とする。shapley 値を求めよ。
$i = 1$ に対しては、次のようになる。

$$\phi_1(v) = 2\frac{1!1!}{3!} \cdot 1 + \frac{2!0!}{3!} \cdot 2 = 1$$

$i = 2$ に対しては、次のようになる。

$$\phi_2(v) = \frac{1!1!}{3!} \cdot 1 + \frac{2!0!}{3!} \cdot 1 = 1/2$$

$i = 3$ も同様に、$\phi_3(v) = 1/2$。従って、Shapley 値 (1,1/2,1/2) である。

(b)$m = 3, f(x) = x$ とする。仁を求めよ。
Shapley 値の (1,1/2,1/2) からは、これ以上超過を小さくできないので、仁も同じく (1,1/2,1/2) である。

(c) 一般の m と $f(x)$ に対する、Shapley 値の単独の公式を求めよ。
$i = 1$ に対しては、次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_1(v) &= m\frac{1!(m-1)!}{(m+1)!} \cdot f(1) + \binom{m}{2} 2!(m-2)!(m+1)! \cdot f(2) + \cdots \\ &= \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} \frac{j!(m-j)!}{(m+1)!} \cdot f(j) \end{aligned}$$

$i = 2$ に対しては、次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_2(v) &= \frac{1!(m-1)!}{(m+1)!} + \binom{m-1}{1} 2!(m-2)!(m+1)! + \cdots \\ &= \sum_{j=1}^{m} \binom{m-1}{j-1} \frac{j!(m-j)!}{(m+1)!} \end{aligned}$$

$i = 3, ..., n$ についても同様であり、これが Shapley 値となる。

(d) このゲームの仁の一般の公式を求めよ。

10. **割り当てゲーム** 2 人の家の主 A, B は、それぞれが多くても 1 軒を買いたいと思っている 2 人の買い手 C, D に、家を売りたいと思っている。プレイヤー A, B は、それぞれの家に 10,20 の価値 (あ

る単位で) をつけている。同じ単位で、プレイヤー C はプレイヤー A の家に 14、プレイヤー B の家に 23 の価値をつけ、プレイヤー D は A の家に 18、B の家に 25 の価値をつけている。

(a) ゲームの特性関数を定めよ。

A と B が提携して C または D に家を売る場合は、より高い利益を得る家を売るとすると、特性関数は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
&v(\emptyset) = v(A) = v(B) = v(C) = v(D) = v(AB) = v(CD) = 0\\
&v(AC) = v(ABC) = 4\\
&v(AD) = v(ABD) = v(ACD) = 8\\
&v(BC) = 3\\
&v(BD) = v(BCD) = 5\\
&v(N) = 11
\end{aligned}$$

(b)Shapley 値を求めよ。

A に対して、$\{AC\}, \{AD\}, \{ABC\}, \{ABD\}, \{ACD\}, N$ でない限り、$v(S) - v(S - \{A\}) = 0$ なので、

$$\phi_A(v) = \frac{1!2!}{4!} \cdot (4 + 8) + \frac{2!1!}{4!} \cdot (1 + 3 + 8) + \frac{3!0!}{4!} \cdot 6 = \frac{7}{2}$$

B に対して、$\{BC\}, \{BD\}, \{BCD\}, N$ でない限り、$v(S) - v(S - \{B\}) = 0$ なので、

$$\phi_B(v) = \frac{1!2!}{4!} \cdot (3 + 5) + \frac{2!1!}{4!} \cdot 5 + \frac{3!0!}{4!} \cdot 3 = \frac{11}{6}$$

C に対して、$\{AC\}, \{BC\}, \{ABC\}, N$ でない限り、$v(S) - v(S - \{C\}) = 0$ なので、

$$\phi_C(v) = \frac{1!2!}{4!} \cdot (4 + 3) + \frac{2!1!}{4!} \cdot 4 + \frac{3!0!}{4!} \cdot 3 = \frac{5}{3}$$

D に対して、$\{AD\}, \{BD\}, \{ABD\}, \{ACD\}, \{BCD\}, N$ でない限り、$v(S) - v(S - \{C\}) = 0$ なので、

$$\phi_D(v) = \frac{1!2!}{4!} \cdot (8 + 5) + \frac{2!1!}{4!} \cdot (8 + 4 + 2) + \frac{3!0!}{4!} \cdot 7 = 4$$

従って、Shapley 値は $\phi = (7/2, 11/6, 5/3, 4)$ である。

(c) 仁を求めよ。

11. Exercise 4.3.5.14(a) の n 人ゲームの仁を求めよ (答え : $\nu = (n/2, 1, 1/2, ..., 1/2)$)。

付録 A

追加事項

A.1　効用理論

提示された理論の多くは、基本レベルで効用理論を基にしている。この理論は、(1) 利得関数は数的な値である事、(2) 無作為化された利得はその期待値に置き換えられる事、という仮定を正当化する。様々な教養のレベルで、この議題についての多くの論文がある。基本の理論は、Von Neumann と Morgenstern(1947) の本で発展した。さらなる発展は、Savage(1954)、Blackwell と Girshick(1954)、Luce と Raiffa(1957) によって起こった。さらに最近の記述では、Owen(1982)、Shubik(1984) が見つけられ、この理論のより完全な論文としては、Fishburn(1988) が見つけられる。ここでは、線形効用理論の基本の簡素な説明をする。

a_1, a_2 のどちらの行動をするかを選ぶ「理性的な」人間が使う方法は、かなり複雑である。一般的な状況では、行動を選ぶ利得は必ずしも数では表せず、「雨が降り、雨具が破れた時に明日の野球のチケットを受け取る」または「嫌いな人に 5 ドル負け、それを繰り返し言う」のような複雑な記述で表せる。そのような記述を、利得または褒美という。2 つの行動を選ぶ「理性的な」人間は、様々な利得の値を数字で評価し、利得が発生すると思われる確率で釣合いをとる。大抵、そのような数的な潜在意識で行動する。ここで、行動するそのような選択による数学的モデルを与える。このモデルは、「理性的な」人間は、特定の公理と矛盾しない方法で利得における自分の選好を表現できる、という考えに基づいている。基本的な結論は、利得のその人間にとっての価値を数的な関数として表わし、それを効用と呼び、利得の集合で定義し、利得における確率的な配分を与えるくじにおける選好は、くじの効用の期待値のみに基づくという事である。

$\mathcal{P}$ をゲームの利得の集合とする。P, P_1, P_2 を使い、利得を表す (つまり、$\mathcal{P}$ の元) とする。

■Definition　$\mathcal{P}$ における**選好関係**、または $\mathcal{P}$ における単純選好は、$\mathcal{P}$ における (弱い) 線形順序である。すなわち、

(a) (線形性)P_1, P_2 が $\mathcal{P}$ の元なら、$P_1 \preceq P_2$ または $P_2 \preceq P_1$(もしくは両方) である。
(b) (推移律)P_1, P_2, P_3 が $\mathcal{P}$ の元で、$P_1 \preceq P_2, P_2 \preceq P_3$ なら、$P_1 \preceq P_3$ である。

$P_1 \preceq P_2$ かつ $P_2 \preceq P_1$ なら、P_1, P_2 は**同値**であると言い、$P_1 \simeq P_2$ と書く。

「理性的」である事は、何らかの選好関係と矛盾しない方法で、集合 $\mathcal{P}$ における選好を表せると仮定する。$P_1 \preceq P_2, P_1 \not\simeq P_2$ なら、理性的な人間は P_1 より P_2 を好むと言い、$P_1 \prec P_2$ と書く。$P_1 \simeq P_2$ なら、P_1 と P_2 には無差別であると言う。$P_1 \preceq P_2$ という記述は、P_1 よりも P_2 を好むか、無差別であるかのどちらかである。

あいにく、ある人が P_1 よりも P_2 を好む事を知る事は、どのくらい P_1 よりも P_2 を好んでいるかの指針にはならない。実際、この疑問は比較の 3 つ目の点が紹介されるまで、意味を成さない。例えば、金銭の単位で P_1 よりも P_2 をどのくらい好むかという何らかの比較を得るために、P_1 と 100 ドルの合同の利

得で、P_2 と比べるように頼む事ができる。さらにこれを行い、全ての選好を何らかの数的な形で表したい。これをするために、利得における全てのくじの空間上の好みを表すように要求する。

■Definition　**くじ**は、利得の集合 $\mathcal{P}$ における有限の確率配分である。くじの集合を $\mathcal{P}^*$ で表す。

(有限の確率配分は、有限数の点にのみ正の確率を与えるものである。)

P_1, P_2, P_3 が利得なら、P_1 を確率 1/2、P_2 を確率 1/4、P_3 を確率 1/4 で選ぶ確率配分 p は、くじである。小文字 p, p_1, p_2 は $\mathcal{P}^*$ の元を表すために使う。固定された利得 P に確率 1 を与えるくじ p は、受け取る利得 P が確率 1 で受け取る利得 P と同じであるから、P とみなしてよい事に注意せよ。この同一視で、$\mathcal{P}$ を $\mathcal{P}^*$ の部分集合として考えられる。

p_1, p_2 がくじで、$0 \leq \lambda \leq 1$ なら、$\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$ もまたくじである。最初のコイントスで確率 λ で表が出るようなくじである。表が出れば $\mathcal{P}$ の元を選ぶために p_1 を使い、裏が出れば p_2 を使う。従って $\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$ は、$\mathcal{P}^*$ の元である。数学的に、くじのくじもまた、もう 1 つのくじなのである。

今、「理性的な」人間は、$\mathcal{P}$ だけでなく $\mathcal{P}^*$ においても選好関係を持つと仮定している。$\mathcal{P}^*$ における選好を定めるとても単純な方法が、効用関数である。

■Definition　**効用関数**は、$\mathcal{P}$ 上で定義された実関数である。

効用関数 $u(P)$ とすると、$p \in \mathcal{P}^*$ に対して $u(P)$ を期待される効用と定義する事によって、u の変域を全てのくじの集合 $\mathcal{P}^*$ に拡張する事ができる。つまり、$p \in \mathcal{P}^*$ が、$P_1, P_2, ..., P_k$ をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k (\lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1)$ の確率で選ぶくじなら、次はくじ p に対する利得の期待される効用である。

$$u(p) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u(P_i) \tag{A.1}$$

従って効用が u なら、$\mathcal{P}^*$ 上の単純選好は次によって与えられる。

$$p_1 \preceq p_2 \iff u(p_1) \leq u(p_2) \tag{A.2}$$

つまり、より高い効用のくじが好まれるという事である。

基本的な疑問は、逆が成り立つのかという事である。$\mathcal{P}^*$ の任意の選好 $\preceq$ なら、(A.2) を満たすような $\mathcal{P}^*$ で定義された効用 u が存在するのか。その答えは、一般には成り立たないが、選好関係における次の 2 つの公理の下なら成り立つ。

■A1.　p_1, p_2, q が $\mathcal{P}^*$ の元で、$0 < \lambda \leq 1$ なら、次のようになる。

$$p_1 \preceq p_2 \iff \lambda p_1 + (1-\lambda)q \preceq \lambda p_2 + (1-\lambda)q \tag{A.3}$$

■A2.　任意の $p_1, p_2, q \in \mathcal{P}^*$ に対して、次が成り立つ。

$$p_1 \prec p_2 \Longrightarrow {}^{\exists}\lambda > 0 \ s.t.\ p_1 \prec \lambda q + (1-\lambda)p_2 \tag{A.4}$$

同様に、次も成り立つ。

$$p_1 \prec p_2 \Longrightarrow {}^{\exists}\lambda > 0\ s.t.\ \lambda q + (1-\lambda)p_1 \prec p_2 \tag{A.5}$$

公理 A1 を正当化するのは簡単である。確率 λ で表が出るコインを考えよ。コインが裏なら q を受け取る。表なら p_1 と p_2 のどちらかを選ぶ。p_2 を好むなら、自然に p_2 を選ぶだろう。この公理は、トスの結果が出る前に p_1 と p_2 のどちらかに決めなくてはならないのなら、同じ決定をするだろうという事を述べている。この公理の些細な欠点は、p_2 よりも p_1 を好んでいたとしても、λ が著しく小さい、例えば $\lambda = 10^{-100}$ のような数の時に、$\lambda p_1 + (1-\lambda)q$ と $\lambda p_2 + (1-\lambda)q$ の違いがほとんどなくなる事である。もう 1 つの欠点は、無作為な利得の賭けを好まない人間により起こる。そのような人は、確率 1/2 で 1 ドル、確率 1/2 で 3 ドル 10 セントの p_1 よりも、確実に 2 ドルの p_2 の方を好む。しかし、q が確実に 5 ドルで $\lambda = 1/2$ なら、利得がどちらの場合も無作為なので、より大きな期待される金銭的な報酬の基準で、$\lambda p_2 + (1-\lambda)q$ よりも $\lambda p_1 + (1-\lambda)q$ を好むかもしれない。

公理 A2 は、さらに議論の余地がある。それを連続公理という。条件 (A.4) は、$\lambda = 0$ の時に $p_1 \prec \lambda q + (1-\lambda)p_2$ なら、著しく 0 に近い λ に対して成り立つ、という事を述べている。q が死のような実際に恐ろしい事象であれば、真ではないかもしれない。多くの人々は、$p_1 = 1$ ドル よりも $p_2 = 100$ ドル を、$q =$ 死 よりも $p_1 = 1$ ドル を確実に好む、と仮定すると安全である。しかし、確実に 1 ドルを受け取るよりも、ある $\lambda > 0$ に対して、確率 λ で死が訪れ、確率 $1-\lambda$ で 100 ドルである賭けを好む事があるだろうか。もしそうでないなら、条件 (A.4) に反する。しかしながら、人々は、死を避ける事が関心に優先するかのようには振舞わない。彼らは、たとえ死の確率が増えたとしても (とても小さな量で)、楽しみな映画館や野球場に行くために幹線道路を運転する。とにかく、公理 A2 は、望ましいものが無限に少ない利得でないものや、どんな他の利得よりも無限により望ましいものを意味している。

■Theorem 1　$\mathcal{P}^*$ 上の選好関係 $\preceq$ が A1、A2 を満たすなら、(A.2) を満たす $\mathcal{P}$ 上で定義される効用 u が存在する。さらに、u は位置や規模の変更に沿って一意に定まる。

効用 $u(P)$ が (A.2) を満たすなら、任意の実数 $a, b > 0$ に対して、効用 $\hat{u}(P) = a + bu(P)$ もまた (A.2) を満たす。従って、位置や規模の変更に沿った u の一意性は、得られる最も強い一意性である。

定理 1 から、人間が公理 1、2 を満たす $\mathcal{P}^*$ 上の選好関係を持っていれば、$\mathcal{P}$ 上で定義された効用と、より大きい期待効用のものを好む $\mathcal{P}^*$ における 2 つのくじに基づいた選好で行動する。大抵、人間は実際、効用関数によっては考えず、その存在にも気づかない。しかしながら、選好を引き起こす効用関数は、質問から選考を引き出す事によって近似できる。

可算くじと有界効用

可算な確率配分 (点の可算数に全てそれらの重みを与える配分) のためのくじの概念を拡張する事は、時に望ましい。もしこれが成されるなら、一般的に効用は有界でなくてはならない。その理由は、式 (A.1) が可算くじに対して満たされ、u が非有界なら、$u(P) = \pm\infty$ のようなくじ p が存在するだろう。その理由は、次の通りである。

$\mathcal{P}$ 上の効用関数を $u(P)$ とし、$P_1, P_2, ...$ を選ぶ確率がそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, ...(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1)$ であるくじ p に対して、可算くじへの u の拡張が、次を満たすとする。

$$u(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u(P_n) \tag{A.1'}$$

$u(P)$ が非有界、つまり上に非有界なら、$u(P_n) \geq 2^n$ のような数列 $P_1, P_2, ...$ を見つけられる。次に $n = 1, 2, ...,$ に対して確率 2^{-n} で P_n を選ぶくじ p を考えるならば、次を得る。

$$u(P) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} u(P_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} 2^n = \infty$$

従って p は P_1 よりも無限に望ましいくじである。

可算くじへの効用の拡張は無害のように思われるため、一般的に効用全体は有界として考えるべきであると考えられている。

Exercises

1. (A.1) によって与えられる全ての選好が、A1 と A2 を満たすか。

2. $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ とし、A2 は満たすが A1 は満たさない $\mathcal{P}^*$ 上の選好の例を挙げよ。

3. $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ とし、A1 は満たすが A2 は満たさない $\mathcal{P}^*$ 上の選好の例を挙げよ。

A.2　縮約写像と不動点

■Definition 1　距離空間 (X, d) は、空でない点の集合 X と、全ての $x, y, z \in X$ に対して次の 4 つの特性を満たす $X \times X$ から実数への関数 d で構成される。

(1) $\forall x,\ d(x, x) = 0$
(2) $\forall x \neq y,\ d(x, y) > 0$
(3) $\forall x, y,\ d(x, y) = d(y, x)$
(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

■Definition 2　距離空間 (X, d) は、全てのコーシー列が X の点に収束するなら完備であるという。言い換えれば、どんな数列 $x_n \in X(\max_{n>m} d(x_m, x_n) \to 0(m \to 0))$ に対しても、$d(x_n, x^*) \to 0(n \to 0)$ となるような点 $x^* \in X$ が存在する。

■**例**　点 $x = (x_1, ..., x_N)$ の N 次元のユークリッド空間 R^N は、次のいくつかの距離の下で完備距離空間である例である。

1. ユークリッド距離 $\|x\| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_N{}^2}$
2. L_1 距離　$\|x\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N|$
3. 上限ノルム　$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_N|\}$

これらの距離は、数列 $x_n \in X$ に対してそれらの 1 つが $\|x_n\| \to 0$ となるなら、他もまた $\|x_n\| \to 0$ となる、という意味で同値である。次では、固定距離空間 (X, d) を扱う。

■Definition 3　写像 $T : X \to X$ は、任意の $x, y \in X$ に対して、次のような正の定数 $c < 1$(縮約因子という) があるなら、縮約写像である。

$$d(T_x, T_y) \leq cd(x, y)$$

■Definition 4　点 $x \in X$ は、$Tx = x$ なら、写像 $T : X \to X$ の不動点であるという。

■**縮約写像定理**　完備距離空間 (X, d) 上の縮約写像 T は、ただ 1 つの不動点を持つ。さらに、どんな $y \in X$ に対しても、$d(T^n y, x_0) \to 0(n \to 0)$ である。

■**証明**　$c < 1$ を T の縮約因子とする。よって、$d(T^2 y, Ty) \leq cd(Ty, y)$ であり、帰納的に全ての n に対して $d(T^{n+1} y, T^n y) \leq c^n d(Ty, y)$ である。全ての $n > 0$ に対する次の不等式は、

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}y, y) &\leq d(T^{n+1}y, T^n y) + \cdots + d(Ty, y) \\ &\leq (c^n + \cdots + 1) d(Ty, y) \\ &\leq d(Ty, y)/(1-c) \end{aligned} \tag{$*$}$$

全ての $n > m$ に対する事を意味し、次のようになる。

$$d(T^{n+1}y, T^m y) \le \frac{d(T^{m+1}y, T^m y)}{1-c} \le \frac{c^m d(Ty, y)}{1-c}$$

これは、$\{T^n y\}$ がコーシー列である事を示す。従って、$T^n y \to x_0 (n \to \infty)$ となるような点 $x_0 \in R^d$ がある。x_0 は、$n \to 0$ の時に、次のようになるので不動点である。

$$\begin{aligned} d(Tx_0, x_0) &\le d(Tx_0, T^n y) + d(T^n y, x_0) \\ &\le cd(T^{n-1}y, x_0) + d(T^n y, x_0) \to 0 \end{aligned}$$

よって、$d(Tx_0, x_0) = 0$ である。不動点は、z がもう 1 つの不動点なら $d(x_0, z) = d(Tx_0, Tz) \le cd(x_0, z)$ は $d(x_0, z) = 0$ を示すため、ただ 1 つでなくてはならない。■

■Corollary 1　どんな $y \in X$ に対しても、$d(T^n y, x_0) \le c^n d(y, x_0)$($x_0$は T の不動点) である。

■証明　$d(T^n y, x_0) = d(T^n y, T^n x_0) \le c^n d(y, x_0)$ ■

■Corollary 2　どんな $y \in X$ に対しても、$d(x_0, Ty) \le \frac{c}{1-c} d(Ty, y)$($x_0$は T の不動点) である。

■証明　(∗) から、$n \to \infty$ とすると、$d(x_0, y) \le d(Ty, y)/(1-c)$ である。従って、$d(x_0, Ty) \le cd(x_0, y) \le cd(Ty, y)/(1-c)$ ■

系 1 は、$T^n y$ の x_0 への収斂の割合の境界を与える。系 2 は、y から Ty の距離に基づく Ty と x_0 の距離の上界を与える。

■　.6 の定理 1 の証明　この証明は、縮約写像定理と次の単純な命題に基づいている。

■Lemma　A, B が同じ次元の行列なら、次のようになる。

$$|\mathrm{Val}(A) - \mathrm{Val}(B)| \le \max_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|$$

■証明　$z = \max_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|$ とする。すると、任意の i, j に対して $b_{ij} \le a_{ij} + z$ なので、$\mathrm{Val}(A) + z = \mathrm{Val}(a_{ij} + z) \ge \mathrm{Val}(B)$ である。同様に、$\mathrm{Val}(B) + z \ge \mathrm{Val}(A)$ で、証明を完了する。

■定理 1 の証明　T を $Tx = y(y_k = \mathrm{Val}(A^{(k)}(x))(k = 1, ..., N))$ によって定義された R^N から R^N の写像とする ($A^{(k)}(x)$ は、　.6 の式 (10) の行列)。T が、上限ノルム距離 $\|x\| = \max_k\{|x_k| : k = 1, ..., N\}$ の下で縮約因

子 $c = 1 - s$ の縮約写像である事を示す。命題を使って、

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\| &= \max_k |\mathrm{Val}(a_{ij}{}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}{}^{(k)} x_l) - \mathrm{Val}(a_{ij}{}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}{}^{(k)} y_l)| \\
&\le \max_{k,i,j} |\sum_{l=1}^{N} P_{ij}{}^{(k)} x_l - \sum_{l=1}^{N} P_{ij}{}^{(}k) y_l| \\
&\le \max_{k,i,j} \sum_{l=1}^{N} P_{ij}{}^{(k)} |x_l - y_l| \\
&\le (\max_{k,i,j} \sum_{l=1}^{N} P_{ij}{}^{(k)}) \|x - y\| \\
&= (1 - s)\|x - y\|
\end{aligned}$$

仮定 (6) は、縮約因子 $c = 1 - s$ が 1 より小さい事を保証する。従って縮約写像定理より、$Tv = v$ となるただ 1 つのベクトル v がある。しかしこれはまさに定理 1 の式 (9) である。

提示された固定最適戦略が値を保証する事を示さなくてはならない。$x^* = (p_1, ..., p_N)$(p_kは行列 $A^{(k)}(v)$ の　の最適) をプレイヤー　の提示された固定戦略とする。確率的ゲームで、状態 k で始まり、これがプレイヤー　が何をしても、少なくとも $v(k)$ の期待収益を与えることを示さなくてはならない。n を任意とし、ゲームが段階 n まで行われると考えよう。段階 n でプレーが強制的に終了し、その段階での利得が、単に $a_{ij}{}^{(h)}$(その時の段階が h であると仮定する) ではなく、$a_{ij}{}^{(h)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}{}^{(h)}(l)v(l)$ であるなら、x^* はこの多段階ゲームの最適であり、値は $v(k)$ になるだろう。従って、無限段階ゲームでは、プレイヤー　の最初の n 段階の期待利得は、少なくとも次のようになる。

$$v(k) - (1 - s)^n \max_{h,i,j} \sum_{l=1}^{N} P_{ij}{}^{(h)}(l)v(l) \ge v(k) - (1 - s)^n \max_l v(l)$$

そして、残りの段階は (7) のように $(1 - s)^n M/s$ によって下界となる。従って、プレイヤー　の期待利得は、少なくとも次のようになる。

$$v(k) - (1 - s)^n \max_l v(l) - (1 - s)^n M/s$$

全ての任意な n に対してこれは真なので、プレイヤー　の期待利得は少なくとも $v(k)$ である。対称性により、プレイヤー　の期待損益は多くとも $v(k)$ である。これは全ての k に対して真であり、これで定理を証明した事になる。

A.3 有限ゲームにおける均衡の存在性

L. E. J. Brouwer の不動点定理に基づくナッシュの定理の証明を与える。集合 C と C 自身への写像 T とすると、点 $z \in C$ は、$T(z) = z$ なら T の不動点であるという。

■Brouwer **の不動点定理**　C を有元次元ユークリッド空間の空でないコンパクト凸集合とし、T を C 自身への連続写像であるとする。その時、$T(z) = z$ となるような点 $T(z) = z$ が存在する。

証明は簡単ではない。K.Kuga(1974) の論文である Brouwer's Fixed Pint Theorem : An Alternate Proof(SIAM Journal of Mathematical Analysis,5, 893-897) を見ると良い。または、Y.Kannan(1981) の An elementary proof of the no retraction theorem(Amer. Math. Monthly 88, 264-268) や、P.Lax(1999) の Change of variables in multiple integrals(Amer. Math. Monthly 106, 497-501) も見てみよ。

今は、　.2.1 の表記の有限 n 人ゲームを考えよ。純粋戦略集合は $X_1, ..., X_n$ で表される (X_k は $m_k \geq 1$ の元で構成されている、つまり $X_k = \{1, ..., m_k\}$ である)。プレイヤー k の混合戦略空間は、$X_k{}^*$ で与えられる。

$$X_k{}^* = \{p_k = (p_{k,1}, ..., p_{k,m_k}) : p_{k,i} \geq 0 \ (i = 1, ..., m_k, \ \sum_{i=1}^{m_k} p_{k,i} = 1)\} \tag{A.1}$$

与えられた合同純粋戦略選択 $x = (i_1, ..., i_n)(\forall j, i_j \in X_j)$ の、プレイヤー k への利得または効用は、$u_k(i_1, ..., i_n)(k = 1, ..., n)$ によって与えられる。与えられた合同混合戦略選択 $(p_1, ..., p_n)(p_j \in X_j{}^*(j = 1, ..., n))$ の、プレイヤー k への対応する期待利得は、次のような $g_k(p_1, ..., p_n)$ によって与えられる。

$$g_k(p_1, ..., p_n) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} p_{1,i_1} \cdots p_{n,i_n} u_k(i_1, ..., i_n) \tag{A.2}$$

プレイヤー k が p_k から純粋戦略 $i \in X_k$ に戦略を変えた場合の、プレイヤー k への期待利得を表すために、次のような $g_k(p_1, ..., p_n|i)$ という表記を使う。

$$g_k(p_1, ..., p_n|i) = g_k(p_1, ..., p_{k-1}, \delta_i, p_{k+1}, ..., p_n) \tag{A.3}$$

δ_i は、確率 1 を点 i に与える確率配分を表す。$g_k(p_1, ..., p_n)$ は、次によって $g_k(p_1, ..., p_n|i)$ から再現される事に注意せよ。

$$g_k(p_1, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{m_k} p_{k,i} g_k(p_1, ..., p_n|i) \tag{A.4}$$

混合戦略のベクトル $(p_1, ..., p_n)$ は、全ての $k = 1, ..., n$ と $i \in X_k$ に対して、次のようであれば、戦略均衡である。

$$g_k(p_1, ..., p_n|i) \leq g_k(p_1, ..., p_n) \tag{A.5}$$

■Theorem　全ての戦略形有限 n 人ゲームは、少なくとも 1 つの戦略均衡を持つ。

■証明　各 k に対して、$X_k{}^*$ は m_k 次元ユークリッド空間のコンパクト凸部分集合で、よって積 $C = X_1{}^* \times \cdots \times X_n{}^*$ は、$\sum_{i=1}^{n} m_i$ 次元ユークリッド空間のコンパクト凸部分集合である。$z = (p_1, ..., p_n) \in C$ に対して、C から C への写像 $T(z)$ を、次によって定義する。

$$T(z) = z' = (p'_1, ..., p'_n) \tag{A.6}$$

$$p'_{k,i} = \frac{p_{k,i} + \max(0, g_k(p_1, ..., p_n|i) - g_k(p_1, ..., p_n))}{1 + \sum_{j=1}^{m_k} \max(0, g_k(p_1, ..., p_n|j) - g_k(p_1, ..., p_n))} \tag{A.7}$$

$p_{k,i} \geq 0$ に注意し、分母は $\sum_{i=1}^{m_k} p'_{k,i} = 1$ となるように選ばれる。従って $z' \in C$ である。さらに、関数 $f(z)$ は、各 $g_k(p_1, ..., p_n)$ が連続なので、連続である。従って、Brouwer の不動点定理により、$T(z') = z'$ となるような点 $z' = (q_1, ..., q_n) \in C$ が存在する。従って (A.7) から、全ての $k = 1, ..., n$ と $i = 1, ..., m_n$ に対して、次のようになる。

$$q_{k,i} = \frac{q_{k,i} + \max(0, g_k(z'|i) - g_k(z'))}{1 + \sum_{j=1}^{m_k} \max(0, g_k(z'|j) - g_k(z'))} \tag{A.8}$$

(A.4) から $g_k(z')$ は $g_k(z'|i)$ の数の平均なので、$\max(0, g_k(z'|i) - g_k(z')) = 0$ となるような $q_{k,i} > 0$ に対する少なくとも 1 つの i に対して、$g_k(z'|i) \leq g_k(z')$ とならなければならない。しかし (A.8) は $\sum_{j=1}^{m_k} \max(0, g_k(z'|j) - g_k(z')) = 0$ を意味しており、従って全ての k, i に対して $f_k(z'|i) \leq g_k(z')$ である。(A.5) から、これは $z' = (q_1, ..., q_n)$ が戦略均衡である事を示している。■

■Remark　$T(z)$ の定義から、$z = (p_1, ..., p_n)$ は、z が T の不動点であるときに限り、戦略均衡である事がわかる。言い換えれば、戦略均衡の集合は、$\{z : T(z) = z\}$ によって与えられる。方程式 $T(z) = z$ を解けば、均衡を見つける事ができる。あいにく、方程式は簡単には解けない。T は縮約写像ではないので、反復の方法は普通の作業ではないのだ。

索引