Tribonacci 数列に対する三項係数の和による表現

岩本誠一（九大名誉教授)、木村寛（秋田県立大)、安田正實（千葉大名誉教授）

フィボナッチ数列は 2 項係数（パスカル三角形）の表で、斜めに足し合わせると得られるという関係はよく知られている。トリボナッチ数列は三項関係による線形再帰関係であり、三項の和のべき乗展開で表されることが期待される。このメモの目的はこの性質について考察をするが、ステップとして 2 段階の数列定めていくことを要する。またフィボナッチ列でのビネ公式と同様なトリボナッチ列に対する表現も与える。

1 はじめに

２０１３年 RIMS 誌に　この性質に関連したものとして、ペリン数列における同様な関係式を表した。具体的には、増加乗積をもちいた Perrin 数列の表現であった。３項関係が Tribonacci 数列であるから３項和のべき乗展開式に対して、まず Möbius の三角座標を示す。これの和がまず最初のステップで、これを平面の直交形式でならべ、それを斜めに足し合わせるとトリボナッチ数列が得られる。

まず準備として、三項和の展開式を並べると、

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^1 &= a+b+c \\
(a+b+c)^2 &= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 \\
(a+b+c)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3 \\
(a+b+c)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+4a^3c+12a^2bc \\
&\quad +12ab^2c+4b^3c+6a^2c^2+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3+c^4 \\
(a+b+c)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5+5a^4c \\
&\quad +20a^3bc+30a^2b^2c+20ab^3c+5b^4c+10a^3c^2 \\
&\quad +30a^2bc^2+30ab^2c^2+10b^3c^2+10a^2c^3+20abc^3 \\
&\quad +10b^2c^3+5ac^4+5bc^4+c^5
\end{aligned}
$$

この展開式の係数は

$$
\binom{n}{r_1, r_2, r_3} = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\,r_3!}, \quad r_1+r_2+r_3=n \tag{1.1}
$$

で与えられる。

2 三項から定める数列

つぎに三項和の展開式を Möbius の三角座標 $(x,y,z), x+y+z=n$, ただし $n \geq 1$, 非負整数で表す。一次式 $(n=1)$、2 乗式 $(n=2)$、3 乗式 $(n=3)$ では座標 (x,y,z) を $a^x b^y c^z$ と対応させて

$$
\boxed{\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & c \end{array}}
\quad
\boxed{\begin{array}{ccccc} & & b^2 & & \\ & 2ab & & 2bc & \\ a^2 & & 2ac & & c^2 \end{array}}
\quad
\boxed{\begin{array}{ccccccc} & & & b^3 & & & \\ & & 3ab^2 & & 3b^2c & & \\ & 3a^2b & & 6abc & & 3bc^2 & \\ a^3 & & 3a^2c & & 3ac^2 & & c^3 \end{array}}
$$

このように書き表した table における縦列を考え、変数を無視して、係数のみを上から下へ縦毎に加えるとする。(Feinberg[6])

	a	b	c				
$1st:$	1	1	1				
	a^2	ab	b^2, ac	bc	c^2		
$2nd:$	1	2	$1+2=3$	2	1		
	a^3	a^2b	ab^2, a^2c	b^3, abc			
$3rd:$	1	3	$3+3=6$	$1+6=7$	$3+3=6$	3	1

変数を省略して、4 乗式 $(n=4)$ と 5 乗式 $(n=5)$ では係数のみを記すると

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 4 & & 4 & & & \\
 & & 6 & & 12 & & 6 & & \\
 & 4 & & 12 & & 12 & & 4 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 5 & & 5 & & & & \\
 & & & 10 & & 20 & & 10 & & & \\
 & & 10 & & 30 & & 30 & & 10 & & \\
 & 5 & & 20 & & 30 & & 20 & & 5 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

同様にこのように書き表した table における縦列を考え、上から下へ縦毎に加えるとする。6 乗式、7 乗式を求めると、

$4th:$	1	4	$6+4=10$	$4+12=16$	$1+12+6=19$	16	10	4	1		
$5th:$	1	5	$10+5=15$	$10+20=30$	$5+30+10=45$	$1+20+30=51$	45	30	15	5	1
$6th:$	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	$\cdots$
$7th:$	1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	$\cdots$

これから先は同様にすればよいが、当該の係数値は「当該値」=「上段値」+「前上段値」+「前々上段値」つまり、項目順を 1 から番号づけると $5th$, $6th$, $7th$ でみれば、

「$5th4$ 項目」(30)=「$4th4$ 項目」(16) +「$4th3$ 項目」(10) +「$4th2$ 項目」(4),
「$6th7$ 項目」(141)=「$5th7$ 項目」(45) +「$5th6$ 項目」(51) +「$5th5$ 項目」(45)
「$7th7$ 項目」(357)=「$6th7$ 項目」(141) +「$6th6$ 項目」(126) +「$6th5$ 項目」(90)

などとなっている。数式でまとめると

$$\begin{cases} a_{0,0}=1, \quad a_{1,0}=a_{1,1}=a_{1,2}=1 \\ a_{n,j}=a_{n-1,j}+a_{n-1,j-1}+a_{n-1,j-2}, \quad n=2,3\cdots \end{cases} \tag{2.1}$$

具体的には

$$
(a_{n,j}) = \begin{pmatrix}
1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 15 & 30 & 45 & 51 & 45 & 30 & 15 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 21 & 50 & 90 & 126 & 141 & 126 & 90 & 50 & 21 & 6 & \cdots \\
1 & 7 & 28 & 77 & 161 & 266 & 357 & 393 & 357 & 266 & 161 & 77 & \cdots \\
1 & 8 & 36 & 112 & 266 & 504 & 784 & 1016 & 1107 & 1016 & 784 & 504 & \cdots \\
1 & 9 & 45 & 156 & 414 & 882 & 1554 & 2304 & 2907 & 3139 & 2907 & 2304 & \cdots \\
1 & 10 & 55 & 210 & 615 & 1452 & 2850 & 4740 & 6765 & 8350 & 8953 & 8350 & \cdots
\end{pmatrix}
$$

これらは 3 項係数であるから、その記号 $\binom{n}{r_1,r_2,r_3}$ を一部分だけもちいてみると、積の交換律から順序を無視して

$$
\begin{array}{llllll}
0th: & 1 \\
1st: & \binom{1}{1,0,0} & \binom{1}{1,0,0} & 1 \\
2nd: & \binom{2}{2,0,0} & \binom{2}{1,1,0} & \binom{2}{2,0,0}+\binom{2}{1,1,0} & 2 & 1 \\
3rd: & \binom{3}{3,0,0} & \binom{3}{2,1,0} & \binom{3}{2,1,0}+\binom{3}{2,1,0} & \binom{3}{3,0,0}+\binom{3}{1,1,1} & 6 & \cdots \quad \cdots \\
4th: & \binom{4}{4,0,0} & \binom{4}{3,1,0} & \binom{4}{3,1,0}+\binom{4}{2,2,0} & \binom{4}{3,1,0}+\binom{4}{2,1,1} & \binom{4}{4,0,0}+\binom{4}{2,2,0}+\binom{4}{2,1,1} & \cdots \quad \cdots \\
5th: & \binom{5}{5,0,0} & \binom{5}{4,1,0} & \binom{5}{4,1,0}+\binom{5}{3,2,0} & \binom{5}{4,1,0}+\binom{5}{3,1,1} & \binom{5}{4,1,0}+\binom{5}{3,2,0}+\binom{5}{2,2,1} & \cdots \quad \cdots
\end{array}
$$

などと表現できる。このような縦列の和を考えた Feinberg[6] の理由は、つぎのようにみなせる。

Möbius の三角形に $a=1, b=x, c=x^2$ とし，たとえば $n=3$ であれば、

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^3 &= (1+x+x^2)^3 \\
&= a^3+3a^2b+(3ab^2+3a^2c)+(b^3+6abc)+(3b^2c+3ac^2)+3bc^2+c^3 \\
&= 1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6
\end{aligned}
$$

であり、$a^3=1, b^3=x^3, c^3=x^6, a^2b=x, a^2c=x^2, ab^2=x^2, ac^2=x^4, bc^2=x^5$ で、これを x のべき乗で整理まとめている。したがって Möbius の三角形と三項和の展開とを組み合わせれば関係式が出てくる。

三項和の n 乗式：$(1+x+x^2)^n, n=0,1,2,\cdots$ を数式処理ソフト Ｍａｔｈｅｍａｔｉｃａ で計算すると、

```
Table[CoefficientList[Series[(Sum[x^i,{i,0,2}])^n,{x, 0, 2*n}],x],{n,0,7}]//Grid
{
 {1}
 {1,1,1}
 {1,2,3,2,1}
 {1,3,6,7,6,3,1}
 {1,4,10,16,19,16,10,4,1}
 {1,5,15,30,45,51,45,30,15,5,1}
 {1,6,21,50,90,126,141,126,90,50,21,6,1}
 {1,7,28,77,161,266,357,393,357,266,161,77,28,7,1}
}
```

という形で確かめられる。

パスカル三角形の斜め和をとると、フィボナッチ数列が得られる理由は

$$X = 1 + \frac{1}{X}$$

の関係で生成母関数から計算することである。この理由をこのトリボナッチ数列での場合でも同様に

$$X = 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}$$

としてトリボナッチ数列は前項の 3 つをまとめればよいことから得られる。このようにして斜めの係数和をおこなう操作がおこなわれる。

この三角座標の係数は 3 項係数 $\binom{n}{r_1, r_2, r_3}$ と 2 項係数 $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ とはつぎで結ばれている：ただし $n = r_1 + r_2 + r_3, r_1 \geq r_2 \geq r_3$

$$\binom{n}{r_1, r_2, r_3} = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_3} = \binom{n}{r_2+r_3}\binom{r_2+r_3}{r_3} = \binom{n}{r_2+r_3}\binom{r_2+r_3}{r_2}$$

3 トリボナッチ数列の生成

パスカル三角形の斜めの和と同様に加え合わせると、トリボナッチ数列を生成することができる (Wong and Maddocks[13])。左側から右斜め上に沿ってその和をカッコ数字で表すと

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & (1) & & & & & & & & & \\
1 & (1) & (2) & (4) & & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & (7) & (13) & (24) & & & & & \\
1 & 2 & 3 & 2 & 1 & (44) & (81) & (149) & & & \\
1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & (274) & (504) & (927) & \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 & (1705) & (3136) \\
1 & 5 & 15 & 30 & 45 & 51 & 45 & 30 & 15 & 5 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

具体的なトリボナッチ数列の和の計算との比較をすれば、

$$
\begin{array}{llll}
T_0 & = 1 & = 1 & = a_{0,0} \\
T_1 & = 1 & = 1 & = a_{1,0} \\
T_2 & = 2 & = 1+1 & = a_{2,0}+a_{1,1} \\
T_3 & = 4 & = 1+2+1 & = a_{3,0}+a_{2,1}+a_{1,2} \\
T_4 & = 7 & = 1+3+3 & = a_{4,0}+a_{3,1}+a_{2,2} \\
T_5 & = 13 & = 1+4+6+2 & = a_{5,0}+a_{4,1}+a_{3,2}+a_{2,3} \\
T_6 & = 24 & = 1+5+10+7+1 & = a_{6,0}+a_{5,1}+a_{4,2}+a_{3,3}+a_{2,4} \\
T_7 & = 44 & = 1+6+15+16+6 & = a_{7,0}+a_{6,1}+a_{5,2}+a_{4,3}+a_{3,4} \\
T_8 & = 81 & = 1+7+21+30+19+3 & = a_{8,0}+a_{7,1}+a_{6,2}+a_{5,3}+a_{4,4}+a_{3,5} \\
\cdots\cdots & & &
\end{array}
$$

であり、一般項も

$$T_{n+1} = \sum_{i=0}^{[(n+1)/2]} a_{n-j,j}$$

と与えられることは、2 次式の展開式:$(1{+}x{+}x^2)^n = \sum_{j=0}^{2n} a_{n,j} x^j$ ただし $a_{n,j} = \displaystyle\sum_{j_1+j_2+j_3=n, j_2+2j_3=j} \binom{n}{j_1, j_2, j_3}$ という表現で求められる (Anatielleo and Vincenzi[4])。

つぎによく知られているように、フィボナッチ数と 2 項係数の関係では、平面での経路の距離として得られ、 2 項係数が表れる。これをトリボナッチ数に当てはめるよう、経路の数を 3 つにさせてみよう。この格子経路の場合数を計算するために 2 項係数をつかうが、 3 通りの経路を可能とするときには、予想通りにトリボナッチ数との関連が得られる。

$g(n,r)$:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 1 \arrow[d] \arrow[dr] & \cdots \\
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 5 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 7 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 9 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 11 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 13 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \cdots \\
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 5 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 13 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 25 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 41 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 61 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 85 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \cdots \\
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 7 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 25 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 63 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 129 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 231 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 377 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & {} \\
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 9 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 41 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 129 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 321 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 681 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 1289 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \cdots \\
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 11 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 61 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 231 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 681 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 1683 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 3665 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

ここでこの表での各要素を $\{g(n,r)\}$ と表す。行 $\{n = 0, 1, 2, 3, \cdots\}$, 列 $\{r = 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ のインデックス。これを使って、下の表では対角線に並び替えてみたものである。この表から、前と同様に、右側では斜め対角線の和を考えると、期待通りのトリボナッチ数列が得られる。

$$\begin{pmatrix}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 3 & 1 \\
1 & 5 & 5 & 1 \\
1 & 7 & 13 & 7 & 1 \\
1 & 9 & 25 & 25 & 9 & 1 \\
1 & 11 & 41 & 63 & 41 & 11 & 1 \\
1 & 13 & 61 & 129 & 129 & 61 & 13 & 1 \\
1 & 15 & 85 & 231 & 321 & 231 & 85 & 15 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}$$

すなわち上表から、対角線斜めの和で 定めることにより、

$$\begin{cases}
T_0 &= g(0,0) & = 1 & = & 1 \\
T_1 &= g(1,0) & = 1 & = & 1 \\
T_2 &= g(2,0)+g(1,1) & = 1+1 & = & 2 \\
T_3 &= g(3,0)+g(2,1) & = 1+3 & = & 4 \\
T_4 &= g(4,0)+g(3,1)+g(2,2) & = 1+5+1 & = & 7 \\
T_5 &= g(5,0)+g(4,1)+g(3,2) & = 1+7+5 & = & 13 \\
T_6 &= g(6,0)+g(5,1)+g(4,2)+g(3,3) & = 1+9+13+1 & = & 24 \\
T_7 &= g(7,0)+g(6,1)+g(5,2)+g(4,3) & = 1+11+25+7 & = & 44 \\
T_8 &= g(8,0)+g(7,1)+g(6,2)+g(5,3)+g(4,4) & = 1+13+41+25+1 & = & 81 \\
\cdots
\end{cases}$$

以上から、式 $\{g(n,r); n,r \geq 0\}$ をつかって、これらの関係を式で定義すると、 (Alladi and Hogatt[3])

$$g(n+1,r+1) = g(n+1,r) + g(n,r+1) + g(n,r) \tag{3.1}$$

ただし $g(n,0) = g(0,r) = 1,\ n,r = 0,1,2,\cdots$ とする。すなわち図式では３通りの和で次項を定めていく。

$$\begin{tikzcd}
g(n,r) \arrow[dr] & g(n,r+1) \arrow[d] \\
g(n+1,r) \arrow[r] & g(n+1,r+1)
\end{tikzcd}$$

定理 1 トリボナッチ数列 $\{T_n\}$ は (3.1) 式の $\{g(s,t); s,t \geq 0\}$ より、つぎで計算される。

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{s+t=n, s,t\geq 0} g(s,t) \\ &= g(n,0) + g(n-1,1) + g(n-2,2) + \cdots \end{aligned} \tag{3.2}$$

4 関連した部族 (tribe) たち

4.1 Perrin 数列

ペリン数列 $\{Pen; n = 0,1,2\cdots\}$ はフィボナッチ数と異なり、トビの項を考慮するから、多少、和のインデックスが複雑になるが、基本的には、項の拾い上げであり、トリボナッチ数列と同じ線形再帰４次数列で定める。初期値に対しては、奇異に感じるが、この値ではあれば、一般項は正の整数値となり、これらの値はいろいろな分野、たとえば、組合せ論、整数論では重要な意味を持つことが知られている。研究されたのは Knuth([9]) によれば François Oliver Raul Perrin, Édouard Lucas, Adams and Shanks といわれている。

定義 4.1 ペリン数列 $\{Pe(n); n = 0, 1, 2\cdots\}$; OEIS A001608

$$\begin{aligned} Pe(n) &= 0 \cdot Pe(n-1) + 1 \cdot Pe(n-2) + 1 \cdot Pe(n-3) \\ &= Pe(n-2) + Pe(n-3) \end{aligned}$$
$$Pe(0) = 3,\ Pe(1) = 0,\ Pe(2) = 2$$

$n:$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Pe(n):$	3	0	2	3	2	5	5	7	10	12	17	22	29	39	51	68
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
	90	119	158	209	277	367	486	644	853	1130	1497	1983	2627	3480	4610	

一般項を求めるには、2 項係数のパスカル三角形、数列ではよく用いられることから、パスカル・ピラミッドなどともよばれることがある。与えられた関係が線形であり、線形式の整数点を通る拾い上げるような具体式を定めればよい。

注意 2 ${}_n\mathrm{C}_r \dfrac{m}{n} = \dfrac{m}{r}\dbinom{n-1}{r-1},\ r > 0$ ただし ${}_n\mathrm{C}_r = \dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ if $n \geq r, = 0$ otherwise

数列の初期値が特別な値になっているのは、フィボナッチ数列で理解できるように、一般項を表すためには平方根等がもちいねばならない。トリボナッチ数列では 3 次方程式の解を立方根で表すから複雑になる。そのためにも、初期値を選ぶことで、一般項が正の整数とすることができる。

定理 3 (Y[2]) m を与えられた自然数とするとき、

$$Pe(m) = \sum_{\{(n,r):2n+r=m\}} \binom{n}{r}\frac{m}{n} \tag{4.1}$$

4.2 Padovan 数列

この数列も全く同じ再帰関係で定義されるが、初期値の違いがある。

定義 4.2 Padovan 数列 $\{Pa(n); n = 0, 1, 2\cdots\}$: OEIS A000931

$$Pa(n) = 0 \cdot Pa(n-1) + 1 \cdot Pa(n-2) + 1 \cdot Pa(n-3) = \cdot Pe(n-2) + 1 \cdot Pe(n-3)$$
$$Pa(0) = 1,\ Pa(1) = 1,\ Pa(2) = 1$$

$n:$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Pa(n):$	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
	65	86	114	151	200	265	351	465	616	816	1081	1432	1897	2513	3329	

注意 4 (Padovan sequence - Wikipedia)

1. $Pa(n) = Pa(n-1) + Pa(n-5)$
2. $Pa(n) = Pa(n-3) + Pa(n-4) + Pa(n-5)$
3. ペリン数列との関係 $Pe(n) = Pa(n+1) + Pa(n-10)$

これらの関係を解析するために、生成母関数を計算してみると、より明確になる。すなわち $GF(\{a_n\};x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ とおくと、
トリボナッチ数列:

$$GF(T(n);x) = \frac{x^2}{1-x-x^2-x^3} \tag{4.2}$$

ペリン数列:

$$GF(Pe(n);x) = \frac{3-x^2}{1-x^2-x^3} \tag{4.3}$$

パドバン数列:

$$GF(Pa(n);x) = \frac{1-x^2}{1-x^2-x^3} \tag{4.4}$$

から関係の成り立つことがわかる。

5 Binet Formula for the Tribonacci sequence

よく知られたビネ公式とはフィボナッチ数列の一般項を 2 次方程式の解から定めるもので

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

ここで $\alpha > \beta$ は $x^2 - x - 1 = 0$ の解とする。これは解の n 乗積の差に対してであるが、Dresden[5] は

$$F_n = \frac{\alpha - 1}{2 + 3(\alpha - 2)}\alpha^{n-1} + \frac{\beta - 1}{2 + 3(\beta - 2)}\beta^{n-1} \quad n = 1, 2, \cdots \tag{5.1}$$

と多少の違いがあるべき乗の線形和で表現した。これらの式は $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ であるから、具体的に計算できて項の個数が二つに増えてしまうが、

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{3}{5}L_n - \frac{2}{5}L_{n-2} \\ &= \frac{1}{5}L_n + \frac{2}{5}L_{n-1}, \quad n = 2, 3, \cdots \end{aligned} \tag{5.2}$$

と計算できる。ここでは解のベキ乗和 $\boxed{L_n := \alpha^n + \beta^n}$ として書き直した。証明には、解と係数の関係式 $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ をもちいる。これから、 $\{L_n; n = 0, 1, 2 \cdots\}$ は 初期値 $L_0 = 2, L_1 = 1,$ 再帰関係式が $L_n + L_{n-1} = L_{n+1}$ となる。つまり、$L_2 = 3, L_3 = 4, L_4 = 7, L_5 = 11, \cdots$ なる Lucas 数列に他ならない。よく知られた計算式 $L_n = 2F_{n+1} - F_n$ から $3L_n - 2L_{n-2} = 5F_n$ は容易に上記式が得られる。

この節では、トリボナッチ数列での生成関数に表れる多項式 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ の解; α, β, γ に対して得られる関係式

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -1, \quad \alpha\beta\gamma = 1 \tag{5.3}$$

から得られた 3 変数の上記の elementaly symmetric function $e_1 = 1,\ e_2 = -1,\ e_3 = 1$ の値から 3 変数のベキ乗和 $\boxed{A_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n}$ を表現すればよいこととなる。この 3 項の場合でのベキ乗和を具体的に計算すると、

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
A_n	3	1	3	7	11	21	39	71	131	241	443	$\cdots$

当然ながら $A_n = A_{n-3} + A_{n-2} + A_{n-1}$, $n = 3, 4, \cdots$ の関係をもつ。OEIS [14] で検索すると、A001644 という結果で、４つの例が掲載されている。そのうちの一つは avoiding 列で IKY[1](2013) が含まれる。結果はスマートではないが、

定理 5 トリボナッチ数列 $\{T_n; n = 3, 4, 5 \cdots\}$ OEIS: A000073 はつぎの表現: 数列 A_n (OEIS: A001644) によりつぎの形をもつ。

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{22}\left[6\,A_n - 3\,A_{n-1} + A_{n-2} - 4\,A_{n-3}\right] \\ &= \frac{1}{22}\left[3\,A_{n-1} + 7\,A_{n-2} + 2\,A_{n-3}\right] \\ &= \frac{1}{22}\left[2\,A_n + A_{n-1} + 5\,A_{n-2}\right], \quad (n \geq 3) \end{aligned} \tag{5.4}$$

エレガントではないが、具体的に帰納法でやれば証明できる。

注意 6 従来知られている形としては Shannon[10](1977), Spickerman[11](1982) により、(初期値 $T_0 = T_1 = 1, T_2 = 2$)

$$T_n = \sum_{m=0}^{[n/2]} \sum_{r=0}^{[n/3]} \binom{n-m-2r}{m+r} \binom{m+r}{r}$$

$$T_n = \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)} + \frac{\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

ここで $\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + 1\right), \\ \beta = \dfrac{1}{6}\left(2 - \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right) + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right), \\ \gamma = \overline{\beta} \text{ 共役複素数} \end{cases}$

とした 3 次式 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ の三つの解とすることが知られている。

注意 7 式 (5.4) の成り立つことは、トリボナッチ数列ではすでに知られている

$$A_n = T_{n-1} + 2\,T_{n-2} + 3\,T_{n-3} \quad (n \geq 3) \tag{5.5}$$

という関係式から証明できるし、逆も成り立つ同値な式である。数列 $\{A_n; n = 0, 1, 2, \cdots\}$ の生成母関数は

$$GF[A_n; x] = \frac{3 - 2x - x^2}{1 - x - x^2 - x^3} \tag{5.6}$$

であり、式 (5.3) の関係から、

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_n A_n x^n &= \textstyle\sum_n (\alpha x)^n + \sum_n (\beta x)^n + \sum_n (\gamma x)^n \\ &= \frac{1}{1-\alpha x} + \frac{1}{1-\beta x} + \frac{1}{1-\gamma x} \\ &= \frac{3 + (-3+\alpha+\beta+\gamma)x + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x^2}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)} \\ &= \frac{3 - 2x - x^2}{1 - x - x^2 - x^3} \end{aligned}$$

一方、トリボナッチ数列の生成母関数 (4.2) から逆に計算される。ただしそのためには式 (5.5) の $n = 0$ でのトリボナッチ数 $T_{-1} = 1$ は、3 項間の関係式 $T_{-1} + T_0 + T_1 = 0 + 0 + 1 = 1 = T_2$ から便宜上おいて計算する。

注意 8 OEIS（整数列大事典）には大いに参照をさせてもらった。ここに謝辞を述べたい。「ケプラー予想、四百年の難問が解けるまで」（G. スピーロ著、青木薫訳）新潮社 によれば、創始者であるニール・スローンは J.H. コンウェイともに「球の充填、格子、群」は数学の専門書としてはベストセラーで、稀にみる快挙であり、この整数列のサイトカウンターは一日に八千も増えるという。また履歴には、1984 年コレージュ・ド・フランスからのメダル、1998 年シャノン賞ということである。

参考文献

[1] 岩本誠一、木村寛、安田正實；ドモアブルが求めた生起継続の確率計算と動的計画法、RI M S 2013.

[2] 安田正實；フィボナッチ数をバラバラに、—— 線形再帰数列と 2 項係数、チェビシェフ多項式、ＯＲ学会研究部会「確率モデルとその応用」、秋田研究集会 2017
`http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/ippansug/fibo/2017Akita/2017Akita-cont.pdf`
`http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/ippansug/fibo/2017Akita/beamer_03.pdf`

[3] Alladi, Krishnaswami and Hogatt,V.E,JR.; “On tribonacci numbers and related functions”, FQ. , pp.42-45,1977.

[4] Anatiello,G. and Vincenzi,G.; “Tribonacci-like sequences and generalized Pascal’s pyramids, Int.J.Math. Education in Science and Technology, vol.45 pp.1220-1232, 2014.

[5] Dresden, G.P.B., Du,Z.; “A Simplified Binet Formula for $k-$Generalized Fibonacci Numbers, J.Integer Sequences, vol.17(2014).

[6] Feinberg, Mark; “New Slants”, FQ vol.2 1964, October 223-227.

[7] Graham,R.L., Knuth, D.E., Patashnik,O.; “Concrete Mathematics”, 2nd Addison-Wesley (1994).

[8] Kantaphon Kuhapatanakul, Pornpawee Anantakitpaisal; “The k-nacci triangle and applications”, Cogent mathematics 2017, vol.4.

[9] Knuth, Donald E.; “The art of Computer Programming”, Vol.4A, Combinatorial Algorithms,Part 1 Addison-Wesley (2011).

[10] Shannon,A. ; “Tribonacci numbers and Pascal’s pyramid”, FQ 15:3 pp.268-275, 1977.

[11] Spikerman,W.; “Binet’s formula for the Tribonacci sequences”, FQ 20:2 pp.118-120, 1982.

[12] Stanton,R.G. and Cowan,D.D.; “Note on a Square Function Equation”, SIAM Rev. 12, pp.277-279,1970.

[13] Wong,C.K. and Madocks,T.W.; “A generalized Pascal’s triangle”, FQ 13 pp.134-136, 1975.

[14] ON-LINE ENCYCLOPEDIA INTEGER SEQUENCES founded in 1964 by N.J.A.Sloane.