トリボナッチ数列に纏わる話から — 線形再帰数列による生成列

安田正實

フィボナッチ数列の表現として、よく知られたべき乗式によるものだけでなく、チェビシェフ多項式の複素数値の巡回性から定められる表現を紹介した。実数（無理数）が複数値の多項式を組み合わせることで、不思議な関係式が得られていた。さらにルーカス数列は関連するペリン数列や Padovan 数列も紹介した。ここでは、さらに OEIS や FQ の文献を探ると、出るわ出るわ！ということでとくに 部分 Bell 多項式を紹介します。

KW： Tibonacci sequence; Invert Transform; partial Bell plolynomial; Faá di Bruno formula; Linear recurrence sequence;

1 はじめに

Fibonacci という言葉の響きを引き続けて、3 項 (Tri) の再帰関係式が (Tribonacci) トリボナッチが使われている。すでに 3 項関係というより一般の再帰関係についても、一般化フィボナッチ数列として多くの結果が発表され研究されている。この概念は古典的確率論でも昔から使われている。たとえば、ド・モアブルは一つの例であろう。

まずトリボナッチ数列 $\{T_n = T(n); n = 0, 1, 2, \cdots\}$ から

(i) OEIS: A000073

初期値 $T_0 = T_1 = 0, T_2 = 1;$

再帰関係式 $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3};$

$n:$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T_n:$	0	0	1	2	4	7	7	13	24	44

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
81	149	274	504	927	1705	3136	5768	10609	19513	15902591

(ii) OEIS: A001590(記号 $Tr(n)$ はここで便宜上用いる) 上記の通常のトリボナッチ数列とは初期値が異なる.

初期値 $Tr(0) = 0, Tr(1) = 1, Tr(2) = 0;$

再帰関係式 $Tr(n) = Tr(n-1) + Tr(n-2) + Tr(n-3);$

$n:$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Tr(n):$	0	1	0	1	2	3	6	11	20	37

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
68	125	230	423	778	1431	2632	4841	8904	16377	13346834

昨年の発表ではトリボナッチ数列とよんだのは (i) の場合で、Padovan 数列（後出）としたのは同じ再帰関係式でさらに再帰式が異なっているもので、ペリン数列 $\{Pe(n)\}$ を紹介した.

(iii) ペリン数列　OEIS: A001608

初期値 $Pe(0) = 3, Pe(1) = 0, Pe(2) = 2;$

再帰関係式 $Pe(n) = Pe(n-2) + Pe(n-3);$

$n:$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Pe(n):$	3	0	2	3	2	5	5	7	10	12

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
17	22	29	39	51	68	90	119	158	209	277

これに対して、二項係数をもちいた表現式を示した。2017 年秋田研究集会 `www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/ippansug/fibo/2017Akita/2017Akita-cont.pdf`, `www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/ippansug/fibo/2017Akita/beamer_03.pdf`

定理 1

$$Pe(m) = \sum_{(n,r):2n+r=m} \binom{n}{r} \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

さらに整数論では整数分割など興味ある性質をもつ Padovan 数列をあげておく。

(iv) Padovan 数列　OEIS: A000931

初期値 $Pa(0) = 1, Pa(1) = 1, Pa(2) = 1;$

再帰関係式 $Pa(n) = Pa(n-2) + Pa(n-3);$

$n:$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Pa(n):$	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	16	21	28	37	49	65	86	114	151	200

定理 2

1. $Pa(n) = Pa(n-1) + Pa(n-5)$
2. $Pa(n) = Pa(n-3) + Pa(n-4) + Pa(n-5)$
3. (ペリン数列との関係) $Pe(n) = Pa(n+1) + Pa(n-10)$

cf.[Padovan sequence - Wikipedia]

これに関連した性質を OEIS から挙げると

性質 (I)　定義： INVERT tranform by Bernstein and Sloane により, $S(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ に対して、変換 $\tilde{S}(x) = \tilde{a}_1x + \tilde{a}_2x^2 + \tilde{a}_3x^3 + \cdots$, を INVERT Tranform of $(a_1, a_2, a_3, \cdots) = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \cdots)$ と表す。ただし

$$\tilde{S}(x) = \frac{1}{1 - S(x)} - 1, \quad S(x) = \frac{\tilde{S}(x)}{1+\tilde{S}(x)}$$

また逆変換を INVERTi Tranform of $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \cdots) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$ と表す。このとき、たとえば、(OEIS:A000931) から、自然数の変換から、フィボナッチ数列、トリボナッチ数列が表れる。

$$\begin{aligned} \mathrm{INVERTTranformof}(1,2,3,\cdots) &= (1,3,8,21,55,\cdots) \\ &= (F(2),F(4),F(6),F(8),F(10),\cdots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{INVERT Tranform of}(1,-1,2,-2,3,-3,\cdots) &= (1,1,2,2,3,4,5,\cdots) \\ &= (Pa(1),Pa(2),Pa(3),Pa(4),Pa(5),\cdots) \end{aligned}$$

性質 (II)　(OEIS:A000931) パスカル三角形 (重複された行) の斜め和に関する Padovan 数列の性質も知られている。

$$\begin{aligned}
Pa(5) = 1 &= \tbinom{0}{0}, \\
Pa(6) = 1 &= \tbinom{0}{0}, \\
Pa(7) = 1 &= \tbinom{1}{0}, \\
Pa(8) = 2 = 1+1 &= \tbinom{1}{0} + \tbinom{1}{1}, \\
Pa(9) = 2 = 1+1 &= \tbinom{2}{0} + \tbinom{1}{1}, \\
Pa(10) = 3 = 1+2 &= \tbinom{2}{0} + \tbinom{2}{1}, \\
Pa(11) = 4 = 1+2+1 &= \tbinom{3}{0} + \tbinom{2}{1} + \tbinom{2}{2}, \\
Pa(12) = 5 = 1+3+1 &= \tbinom{3}{0} + \tbinom{3}{1} + \tbinom{2}{2}, \\
Pa(13) = 7 = 1+3+3 &= \tbinom{4}{0} + \tbinom{3}{1}, + \tbinom{3}{2} \\
Pa(14) = 9 = 1+4+3+1 &= \tbinom{4}{0} + \tbinom{4}{1} + \tbinom{3}{2} + \tbinom{3}{3},
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$

性質 (III)　(OEIS:A000931, Gil2015) Padovan 数列や Tribonacci 数列では Linear Recurrence Sequences and Their Convolutions via Bell Polynomials by D. Birmajer, B.Gil and D.Weiner, J. Integer Sequences, Vol.18(2015), の結果から、求められている。

With offset 3: Padovan sequence convolved with the Tribonacci numbers prefaced with “1”.

定理 3 (Birmajer/Gil/Weiner) 初期値と生成法則を
Initial value : $a_0, a_1, \cdots, a_{d-1}$;
Recurrence :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_d a_{n-d}, \quad n \geq d \geq 1 \tag{1.2}$$

とする線形再帰関係式 $\{a_n\}$ が与えられるとき、

$$\lambda_0 = a_0, \quad \lambda_n = a_n - \sum_{j=1}^{n} c_j a_{n-j}$$

をもちいて、一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda_0 y_n + \lambda_1 y_{n-1} + \cdots + \lambda_{d-1} y_{n-d+1} \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \sum_{j=0}^{n-k} \frac{j!}{(n-k)!} B_{n-k,j}(1!c_1, 2!c_2, \cdots) \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

ここで、$B_{n,k} = B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots)$ は (n,k)-th partial Bell 多項式とよばれる。

つまり、$a_n = \lambda_0 y_n + \lambda_1 y_{n-1} + \cdots + \lambda_{d-1} y_{n-d-1}$ の形であるから、
連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ y_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ y_1 & y_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & & \ddots & \vdots \\ y_{d-1} & y_{d-2} & \cdots & \cdots & y_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{d-1} \end{pmatrix}$$

を解くことになる。

2 部分 Bell 多項式について

定義はいろいろな形で定められているが、分かりにくいものでは Djurdje Cvijović New identities for the partial Bell polynomials Applied Math. Letters 24(2011) 1544-1547 によれば、
定義：

$$\frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}) \frac{t^n}{n!} \quad (k \geq 0) \tag{2.1}$$

また直接的な表現では

$$B_{n,k} = \sum \frac{n!}{\ell_1! \ell_2! \ldots \ell_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{\ell_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{\ell_2} \cdots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{\ell_{n-k+1}} \tag{2.2}$$

ここで多重和の意味は $\{(\ell_1, \ell_2, \ldots \ell_{n-k+1}); (\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-k+1} = k) \wedge (\ell_1 + 2\ell_2 + \ldots + (n-k+1)\ell_{n-k+1} = n)\}$ とする。第 2 種スターリング数 $B_{n,k}(1,1,\ldots) = S(n,k) = \left\{ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\}$ に等しい。ベル数についても 2 項係数の斜め和で新しい数列となるようにつぎの関係も知られている。

- $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$, (2 項係数をもちいた再帰関係式),
- $B_n = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k^n}{k!}$

さらにベル数の三角形とよばれる（Atkin's array）ものがある。

はじめには $1, 1$ の 2 個の数字を新たな行に書き並べ、$\begin{array}{|ll|} \hline 1 & \\ 1 & 2 \\ 2 & (x) \\ \hline \end{array}$ $(x) = (\text{左隣}) + (\text{斜め左上}) = 1 + 2 = 3$, 行の最初

の数は上の終りの数をコピーしてくる。これを繰り返して $\boxed{\begin{array}{lll} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 2 & 3 & (y) \end{array}}$ $(y) = (\text{左隣}) + (\text{斜め左上}) = 3 + 2 = 5.$

繰り返して $\boxed{\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ 2 & 3 & 5 & & \\ 5 & 7 & 10 & 15 & \\ 15 & 20 & 27 & 37 & 52 \end{array}}$ が得られる。このようにして作られた三角形の最初の数がベル数となる。

OEIS ；A000110 Bell or exponential numbers : number of ways to partition a set of n labeled elements.

$$\{1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, \ldots\}$$

Aitken array: $a(0,0) = 1, a(n,0) = a(n-1, n-1), a(n,k) = a(n,k-1) + a(n-1,k-1)$ (OEIS: A011971)

Wolfram Mathematica で BellY が部分 Bell 多項式を生成する：

BellY[$n, k, \{x_1, \ldots, x_{n-k+1}\}$]
gives the partial Bell Polynomial $Y_{n,k}(x_1, \ldots, x_{n-k+1})$
In[1]:= BellY[4,2,$\{x_1, x_2, x_3\}$]
Out[1] = $3x_2^2 + 4x_1x_3$

ここでは、$n = 4, n - k + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$ の例であるが、もっと簡単には部分 Bell 多項式は、合成関数の微分で示すことができる。

$y = f(x)$, $z = g(y)$ を合成して、$z = g(f)(x)$ を微分すると、

(i) $z' = f'g'$,
(ii) $z'' = f''g'^2 + f'g''$,
(iii) $z''' = \left(f''g'^2\right)' + (f'g'')' = (f'''g'^3 + f''\,2g'\,g'') + (f''\,g'g'' + f'g''') = f'''g'^3 + 3f''g'\,g'' + f'g'''$
(iv) $z^{(4)} = f^{(4)}(g')^4 + f^{(3)}\left\{3(g')^3 + 3g'^3g''\right\} + f^{(2)}\left\{3(g'')^2 + 4g'g^{(3)}\right\} + f'g^{(4)}g'$

ここまでの計算で得られた $x_1 = g', x_2 = g'', x_3 = g''' = g^{(3)}$ と表す。すなわち、$n = 4$ 回の微分で、$f^{(2)}$ を含む項での係数 ”部分”では

$$\left\{3(g'')^2 + 4g'g^{(3)}\right\} = 3x_2^2 + 4x_1x_3$$

となることが上記の Out[1] の意味するものである。

3 再帰数列たちを統合して

[J2002] W.P.Johnson; The curious History of Faá di Bruno’s formula, Ameri. Math. Monthly, (2002), 109(3), pp.217- 234.

定理 4（Faá di Bruno’s Formula）

$$\frac{d^m}{dt^m} f(g(t)) = \sum \frac{m!}{b_1!b_2!\cdots b_m!} f^{(k)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{b_1} \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^{b_2} \cdots \left(\frac{g^{(m)}(t)}{m!}\right)^{b_m} \tag{3.1}$$

ここで 非負整数 $\{b_1, b_2, \ldots\}$ は $b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = n$, $k := b_1 + b_2 + \cdots + b_m$ とする。

たとえば、$m = 3$ であれば、$b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 3$ で 3 通りの場合: (i) $k = 1 \leftrightarrow (0, 0, 1)$ (ii) $k = 2 \leftrightarrow (1, 1, 0)$ (iii)

$k=3 \leftrightarrow (3,0,0)$ しかない。つまり

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \frac{3!}{0!0!1!} f'(g(t)) \left(\frac{g^{(3)}(t)}{3!}\right) = f'(g(t))g^{(3)}(t) \\
&\text{(ii)}\ \frac{3!}{1!1!0!} f^{(2)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)\left(\frac{g''(t)}{2!}\right) = 3f^{(2)}(g(t))g'(t)g''(t) \\
&\text{(iii)}\ \frac{3!}{3!0!0!} f^{(3)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^3 = f^{(3)}(g(t))(g'(t))^3
\end{aligned}
$$

これらを加えれば、前述の (iii) z''' の式と一致することが確かめれる。

この他にも

定理 5（Faá di Bruno's determinant formula）

$$
\frac{d^m}{dt^m} f(g(t)) = \begin{vmatrix}
\binom{m-1}{0}g'f & \binom{m-1}{1}g''f & \binom{m-1}{2}g^{(3)}f & \cdots & \binom{m-1}{m-1}g^{(m)}f \\
-1 & \binom{m-2}{0}g'f & \binom{m-2}{1}g^{(2)}f & \cdots & \binom{m-2}{m-2}g^{(m-1)}f \\
0 & -1 & \binom{m-3}{0}g'f & \cdots & \binom{m-3}{m-3}g^{(m-2)}f \\
\vdots & \vdots & \vdots & \binom{1}{0}g'f & \binom{1}{1}g^{(2)}f \\
0 & 0 & 0 & -1 & \binom{0}{0}g'f
\end{vmatrix}
$$

さらにいくつかの形が紹介されている。詳しくは本論を参照されたい。

4 おっとと、数列を忘れずに

[BGW2015] D.Birmajer, J.B.Gil and M.Weiner: Journal of Integer Sqeuences, Vol.18(2015)

から、引用しつつ、具体例として、数列も二項係数の和で表される。

(I) Fibonacci 数列；Bell 多項式から $B_{n-1,k}(1,2,0,\cdots) = \dfrac{(n-1)!}{k!}\dbinom{k}{n-1-k}$ より、

$$
F_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1-j}{j} \tag{4.1}
$$

(II) Padovan 数列；$B_{n-3,k}(0,2!,3!,0,\cdots) = \dfrac{(n-3)!}{k!}\dbinom{k}{n-3-2k}$ より、

$$
Pa(n) = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{k}{n-3-2k} \quad n \geq 3 \tag{4.2}
$$

(III) Tribonacci 数列；$B_{n,k}(1!,2!,3!,0,\cdots) = \dfrac{(n)!}{k!}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{k-\ell}\binom{k-l}{n+\ell-2k}$ より、

$$
T_n = \sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{j} \binom{k}{j-k}\binom{j-k}{n-2-j} \quad n \geq 2 \tag{4.3}
$$

これ以外にも、Lucas 数列が 2 つのベキ乗和であったこととからニュートンの公式と基本対称式との関係、第 2 種 Chebyshev 多項式や第 1 種も表されている。

以上、忘備録的な記述にしかなっていないことをご容赦願いたい。