動的計画法とフィボナッチ数, その２次評価分割、トリボナッチ数列による連の確率計算

安田　正實

August 28 (Fri), 2016

概要

1. はじめに
   - 講演内容の概要
   - 動的計画法
   - 偽科学を発見する方法
   - たくさん有り過ぎるけど
2. 整数から拡張すると
3. 最適化にかかわる問題
   - 2 次関数の分割：最適値との関係式
4. 分割数の 2 乗値評価
5. 最適化に表れるフィボナッチ数
   - 最適化を伴わない場合
   - ３つの関係、トリボナッチ数とよぶと
6. トリボナッチ数列

内容項目

- 動的計画法
- フィボナッチは誰？
- fibonacci 数と Lucas 数
- さまざまな分野で（入試問題も多数）
- 2 次評価分割
- 連の確率

Dynamic Programming

- R.Bellman
- Bellman Continuum (故小田中敏男先生が主催)
- ゆかりの人々（Eye of the Hurricane, an autobiography）
- 金鉱発掘の選択問題
- フィボナッチ数列の生成アルゴリズム (WikipediA に現れる例題)

偽科学を 10 倍楽しむ本（山本弘、ちくま文庫、2015）

- 話の出どころを確認する「12 世紀ごろの話である」「精密古文書の分析」「背景とする時代文化の考証」
- 誰が言っているかを調べる「権威ある ワッツの数学史 の本でも」
- キーワードに注目
- 反論に目を通す
- 正しい科学知識を身につける

ピサにあるフィボナッチ立像

インターネット上の掲載されたフィボナッチ画像

名前の出どころ（呼び名）

小説、映画でも, 映画「ダビンチ・コード」より

フィーシェは紙切れをみていった。

１，１，２，３，５，８，１３，２１

それだけか？
ダ・ビンチ・コード (The Da Vinci Code by Dan Brown 2003)
批判の一環として、特別番組「ダ・ヴィンチ・コードの嘘」が放送された。また、「日経エンタテインメント!」は『大名所で原作のウソを発見!』と題し原作で描かれている名所と実際の名所の相違点を挙げている。(Wikipedia)

- 1,1,2,3, 5, 8, 13, 21 もう少し続けると、34, 55, 89, $\cdots$
-

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$11\cdots$
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	$89\cdots$

これだけではありませんよ。　フィーシェさん！

天地明察のロケ地

渋谷の金王八幡神社

算額ー３つの球が外接し合うとき、
大球、中球の半径から、小球の半径を求めよ。

デカルトの四円定理：4 番目は板（平面）とみる。この 3 円の関係は、よく知られている幾何の「反転」で、ピタゴラスの定理（日本名：鈎股弦（こうこげん）の定理）から求められる。さらに一般の再帰的関係は、フィボナッチ再帰であり、実は半径の値はフィボナッチ数の一次式で表される。（数セミの高校生による解）

直線に外接とすると

デカルトの 4 円定理

互いに外接（内接）する 3 つの円に 4 番目の描くと

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\pm\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)$$

3 つ目を直線 $(r_3 \to \infty)$ とし、内接とみなして、4 番目の円の半径 $r = r_4$ は

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$$

例えば、ダン・ペトー「日本の幾何、何題解けますか？」（森北出版）
これを繰り返すと

$$\frac{1}{r_n}=\frac{F_{n-1}}{r_2}+\frac{F_{n-2}}{r_1}$$

と表せる。

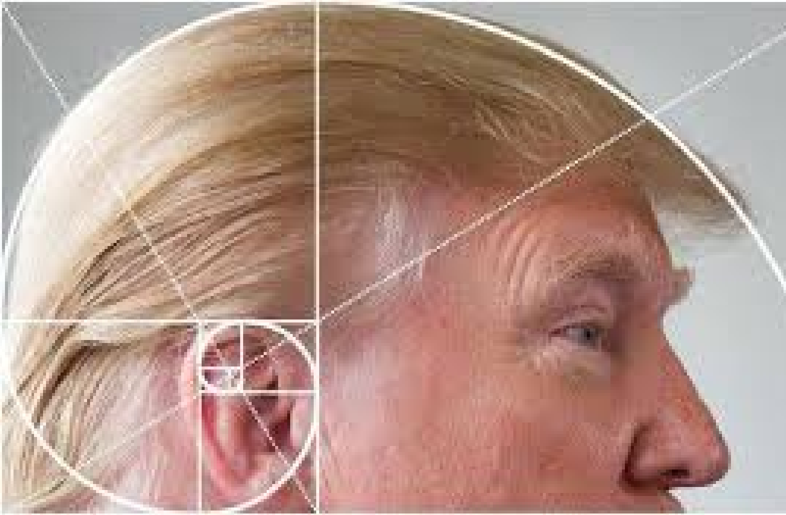
エリオットの波動理論、経験則

(C) ゴールデン・チャート社　GC HELLO TREND MASTER (R)

Fibonacci The Man

Fibona

Who is the



「フィボナッチ数の初め」から探るには

- Fibonacci(1170-1240): 北アフリカのビシャーヤ生れ
  Leonard of Pisa
  古代エジプト、アラビアの数学を中世の数学へ
- Èdouard Lucas(1842-1891):Fibonacci sequence and the test for Mersenne primes
  フィボナッチ数列の研究、メルセンヌ数 $2^{127}-1$ は素数、ルーカス・レーマーの判定条件
- The Fibonacci Association Official Website
  1963 年創刊の研究誌
  The Fibonacci Quarterly,
  Internationa Conferences from 1984 biyearly
- オンライン整数列: OEIS(*On-line Encyclopedia of Integer Sequences*), founded by in 1964 by N.J.A.Sloane

L.E.Sigler translation by Google Scholar

レオナルド・ピサーノ（フィボナッチ）の数学史的な観点から：
Leonardo Pisano (Fibonacci): The Book of Squares(2013)
算板の書、幾何学の実際、平方の書など

> *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation* by Laurence E. Sigler
>
> New York: Springer, 2002. Pp. viii + 636. ISBN 0–387–95419–8. Cloth $99.00

Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation(2002):

Fibonacci, also known as Leonardo Pisano or Leonardo Bigollo, was born in 1170, the son of a customs officer. He lived and worked, probably as a merchant, in different parts of the Mediterranean, learning the mathematics concerned with trade and exchange but also Euclid's *Elements*. He came to the attention of the emperor Frederick II of Hohenstaufen, a patron of the arts and sciences who had founded the University of Naples in 1224, and whose court included people like Domenicus Hispanus, an astronomer and astrologer, Theodorus of Antiochia, again an astrologer and a translator from the Arabic, and Michael Scotus, an astrologer, a translator from the Arabic, as well as a philosopher. It was to the latter that Fibonacci dedicated his *Liber abaci*. He also wrote *Practica geometriae* (1220, dedicated to a Domenicus, probably Domenicus Hispanus), *Flos* (around 1225, dedicated to Cardinal Ranieri Capocci), a letter to Theodorus of Antiochia (around 1225), and *Liber quadratorum* (1225, dedicated to Frederick II himself). After extensive travelling, by 1220 Fibonacci seems t [illegible] ed a state [illegible]

Édouard Lucas

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lucas.html

François Édouard Anatole Lucas

Born: **4 April 1842 in Amiens, France**
Died: **3 October 1891 in Paris, France**

Édouard Lucas

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lucas.html

Lucas is best known for his results in number theory: in particular he studied the Fibonacci sequence and the associated Lucas sequence is named after him. He gave the well-known formula for the Fibonacci numbers

$$\sqrt{5}\, f_n = ((1 + \sqrt{5})/2)^n - ((1 - \sqrt{5})/2)^n.$$

Lucas also devised methods of testing primality, essentially those used today. In 1876 he used his methods to prove that the Mersenne number $2^{127} - 1$ is prime. This remains the largest prime number discovered without the aid of a computer.

R.Knott Homepage:

http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Fibonacci Numbers and the Golden Section

This is the **Home page** for Dr Ron Knott's *multimedia* web site on the Fibonacci numbers, the Golden section and the Golden string hosted by the Mathematics Department of the University of Surrey, UK.

The **Fibonacci numbers** are

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (add the last two to get the next)

The **golden section numbers** are

0·61803 39887... = phi = φ and
1·61803 39887... = Phi = Φ

The **golden string** is

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 ...
a sequence of 0s and 1s that is closely related to the Fibonacci numbers and the golden section.

フィボナッチ数にまつわる話2

- フィボナッチ探索 (Kiefer) ：有限区間内で単一の最大値を探索する分割法
  P.Whittle "Optimization over Times: Dynamic Programming and Stochastic Control", Wiley 1983.
- 「フィボナッチ数の小宇宙」 フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割　改訂版、 中村滋、日本評論社 2008
- 「フィボナッチ　アラビア数学から西洋中世数学へ」 三浦伸夫, 現代数学社, 2016
- すべての植物をフィボナッチの呪いから救い出す
  「波紋と螺旋とフィボナッチ ー 数理の眼鏡でみえてくる生命の神秘」； 近藤滋、秀潤社、2013
- 整数の分割； Integer Partitions by G.E.Andrews. 数論における分割の総数を表す
  "Pattern Identities", A.D.Healy, math192.pdf 2001,
  (k, l)-sequence にはフィボナッチ数列が再帰関係になる

フィボナッチ数にまつわる話3

専門分野でのフィボナッチ数列：

- Kalman Filter; 動的線形観測誤差観測システム (離散型時間)；
  Riccati 方程式ー事前誤差共分散の満たす式
  J.Donoghue; The Kalman Filter for Complex Fibonacci Systems, ISRN Signal Processing vol.2012, Article ID 631873, 5 page.
- Ladder(梯形) network の電気回路:
  Morgan-Voyce; Lader network analysis using Fibonacci numbers, Proc.IRE, IRE Trans, on Circuit Theory, Sep,1959, pp321-322
- などなど

まず並べると

ここで Fibonaci 数と

n ;	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	$\cdots$
F_n;	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34,	55	$\cdots$

Lucas 数を並べると

n ;	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	$\cdots$
L_n;	2,	1,	3,	4,	7,	11,	18,	29,	47,	76,	123	$\cdots$

たとえば、初期値 $(n = 0, 1)$ を変えると

n ;	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
x_n;	100,	1,	101,	102,	203,	305,	508,	813,	1321,	2134,

明らかに

$813 = F_6 * 10^2 + F_7, 1321 = F_7 * 10^2 + F_8, 3455 = F_9 * 10^2 + F_{10}, \cdots$

生成母関数から

フィボナッチ数列の母関数は、

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \cdots$$

であることを利用すると

$$\frac{100}{89} = 1.12358\cdots$$

$$\frac{10000}{9899} = 1.010203050813213455\cdots$$

$$\frac{1000000}{998999} = 1.001002003005008013021034055\cdots$$

などが得られる。

数列の拡張

Lucas sequence:

$$x_n = p\,x_{n-1} - q\,x_{n-2}$$

(i) Fibonacci number	$p = 1, q = -1$	$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ $x_0 = 0, x_1 = 1,$
(ii) Lucas number	$p = 1, q = -1$	$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ $x_0 = 2, x_1 = 1,$
(iii) Pell number	$p = 2, q = -1$	$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ $x_0 = 0, x_1 = 1,$ $x_2 = 2, x_3 = 5, x_4 = 12, \cdots$
(vi) Mersenne number	$p = 3, q = 2$	$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ $x_0 = 0, x_1 = 1,$ $x_2 = 3, x_3 = 7, x_4 = 15, \cdots$ $M \equiv 2^n - 1$ の形

因数分解では

$$
\begin{aligned}
&F_6 = 2^3, \quad F_8 = 3\cdot 7, \quad F_9 = 2\cdot 17, \quad F_{10} = 5\cdot 11,\\
&F_{12} = 2^4\cdot 3^2, \quad F_{14} = 13\cdot 29, \quad F_{15} = 2\cdot 5\cdot 61,\\
&F_{18} = 2^3\cdot 17\cdot 19, \quad F_{20} = 3\cdot 5\cdot 11\cdot 41,\\
&F_{21} = 2\cdot 13\cdot 421, \quad F_{24} = 2^5\cdot 3^2\cdot 7\cdot 23,\\
&F_{28} = 3\cdot 13\cdot 29\cdot 281, \quad F_{30} = 2^3\cdot 5\cdot 11\cdot 31\cdot 61,\\
&F_{35} = 5\cdot 13\cdot 141961, \quad F_{36} = 2^4\cdot 3^3\cdot 17\cdot 19\cdot 107,\\
&F_{42} = 2^3\cdot 13\cdot 29\cdot 211\cdot 421, \quad F_{70} = 5\cdot 11\cdot 13\cdot 29\cdot 71\cdot 911\cdot 141961,
\end{aligned}
$$

(J.H.Halton; FQ 1966)

よく知られた命題

入試問題でもよく出題される：

基本式

1.
$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}$$
分数の形と変形して、整数であることの証明、
この式は再帰加法的と同値、
カッシーニ・シムソンの定理といわれる。

2.
$$\mathrm{GCM}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{GCM}(m,n)}$$
大きな数にしても最小公倍数を計算すれば簡単となる。

3. 階段を上る方法の場合の数（中学数学）

フィボナッチ数列の中学入試問題

参考書として挙げられているもの：

フィボナッチ数の小宇宙
中村滋著
日本評論社
大変くわしい本。絶版？

[自然にひそむ数学]
佐藤修一著
講談社

[黄金比とフィボナッチ数]
ダンラップ著
日本評論社

[フィボナッチのうさぎ]
キースボル著
青土社

[整数とあそぼう]
一松信著
日本評論社

Fibonacci Polynomial

整数列から拡張の準備として
Hoggatt,V.Jr.,Long,C.T.(FQ, 1974)

Definition 1

$$f_{n+2}(x) = x\,f_{n+1}(x) + f_n(x); \quad f_0(x) = 0, f_1(x) = 1.$$

$$u_{n+2}(x,y) = x\,u_{n+1}(x,y) + y\,u_n(x,y); \quad u_0(x,y) = 0, u_1(x,y) = 1.$$

Fibonacci Polynomial 2

多項式と数列

n	$u_n(x,y)$	$F_n = u_n(1,1)$
0	0	0
1	1	1
2	x	1
3	$x^2 + y$	2
4	$x^3 + 2xy$	3
5	$x^4 + 3x^2y + y^2$	5
6	$x^5 + 4x^3y + 3xy^2$	8
7	$x^6 + 5x^4y + 6x^2y^2 + y^3$	13

Hoggatt and Long (FQ 1974) Corollay 10 (page 118)

一般式の命題

For $n \geq 2$, n even,

$$u_n(x, y) = x \prod_{k=1}^{(n-2)/2} \left(x^2 + 4y \cos^2 \frac{k\pi}{n}\right)$$

and for $n \geq 2$, n odd,

$$u_n(x, y) = x \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(x^2 + 4y \cos^2 \frac{k\pi}{n}\right)$$

では

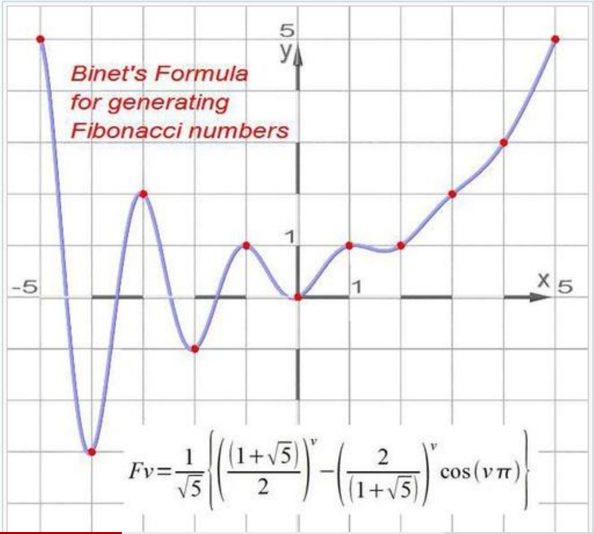
Real number sequences;

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\{\phi^n - (-1/\phi)^n\} \qquad\qquad n = 1, 2, \cdots \\
&= \Pi_{k=1}^{[(n-1)/2]}\left(1 + 4\cos^2\frac{k\pi}{n}\right) \\
L_n &= \phi^n + (-1/\phi)^n \qquad n = 1, 2, \cdots
\end{aligned}
$$

where Goledn Raio: $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Continuous Fibonacci sequence

Binet's Formula



Extended Fibonacci numbers

$\cos(n\pi) = (-1)^n$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) から, 実数 x に対して

$$
\begin{aligned}
F_x &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \phi^x - \frac{1}{\phi^x} \cos(\pi x) \right\} \\
L_x &= F_{x-1} + F_{x+1}
\end{aligned}
$$

ビネ公式の拡張として、複素数版では J.Donoghue：ISRN Signal Processing（2012）が知られている。

$$
(-1)^x = e^{i\pi x} = \cos(\pi x) + i \sin(\pi x), \quad i = \sqrt{-1}
$$

Complex Fibonacci numbers and Lucas

REFERENCE:

• Horadam,A.F.,Shannon,A.G.:Finbonacci and Lucas Curves, FQ, vol26 3-13, 1988.

• Good,I.J.:Complex Fibonacci and Lucas Numbers, Continued Fractions, and the Square Root of the Golden Ratio(Condensed Version), J. Opr. Res Soc. 1992(43) 837-842,

• Garnier,N. and O.Pamarè(FQ 2008): Fibonacci numbers and trigonometric identities, "intrigue(!)" How could we connect $\cos\frac{2k\pi}{n}$ and $\cos\frac{2k\pi}{n+1}$?

Complex Fibonacci numbers and Lucas

REFERENCE2:

DISMAY(ろうばい、うろたえ):

Fibonacci numbers are linked with the arithmetic of $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ and not with that of $\mathbb{Q}(\exp(2i\pi/n))$.

- Horadam,A.F.: A Generalized Fibonacci Sequence, Amer Math Month 1961 (vol. 68(5) 455-459),
Complex Fibonacci Numbers and Finobacci Quaternions, Amer Math Month 1963 (vol.70(3) 289-291).

さて Dymanic Programming by R.Bellman

いままでの参照の論文は、再帰関係式に関する命題を、数論や複素関数論による立場で議論している。
WikipediA による「動的計画法」には、“最適化“という重要な要因を加味しなければならない。その例としてフィボナッチ数列を挙げている。

最適化問題に適用する場合:

(1) 部分構造最適性（optimal substructure）
(2) 最適性原理（principle of optimality）

部分問題を解き、それを利用して、全体の最適化問題を解く戦略のため、部分構造最適性が動的計画法には必要である。

岩本・木村は 2 個の一定値を和に分解して、2 乗評価の最小値では「フィボナッチ数列」が最適となることを発見している。いいかえると、

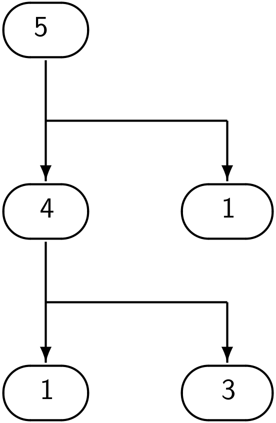
初期値	c の分割	x_{n-1} の分割	x_{n-3} の分割	
$c \rightarrow$	$x_{n-1} \rightarrow$	$x_{n-3} \rightarrow$	$x_{n-5} \rightarrow$	$x_2 = 1 \rightarrow \quad 0$
	$+$	$+$	$+$	
	x_n	x_{n-2}	x_{n-4}	
2 乗評価	$(x_n^2 + x_{n-1}^2)$	$(x_{n-2}^2 + x_{n-3}^2)$	$\cdots$	

与えられた c のうち、はじめの決定政策として x_n を選び、$c = x_n + x_{n-1}$ の関係を持つよう分割する。つまり、残りの $c - x_n = x_{n-1}$ をつぎの状態に受け渡して、この値を分割していく。順次繰り返す。いろいろな証明法が、岩本・木村に述べられているとおりであり、数列の再帰関係式、フィボナッチの生成規則になっている。したがって、最適値は

$$\min_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots} \left[(x_n^2 + x_{n-1}^2) + (x_{n-2}^2 + x_{n-3}^2) + \cdots \right]$$

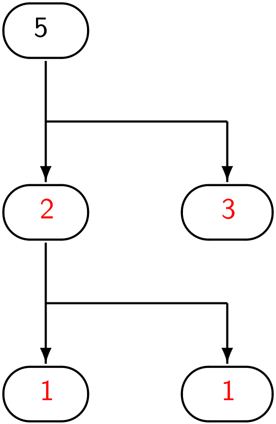
となる。

与えられた整数を分割



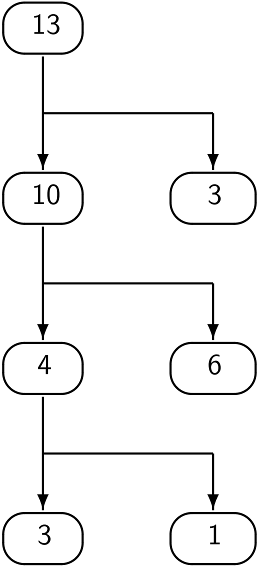
$$(1^2 + 4^2) + (3^2 + 1^2) = 27$$

もっと小さく「最適」な分割は、



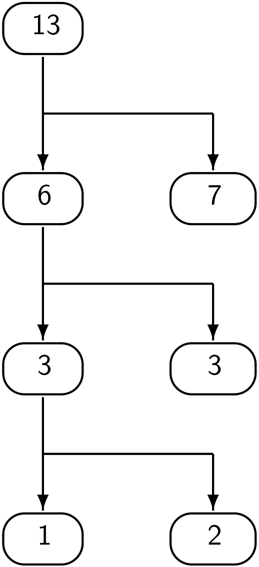
$(3^2+2^2)+(1^2+1^2)=15$（最適分割）≤ 27(前回の場合の値)

数を変えて



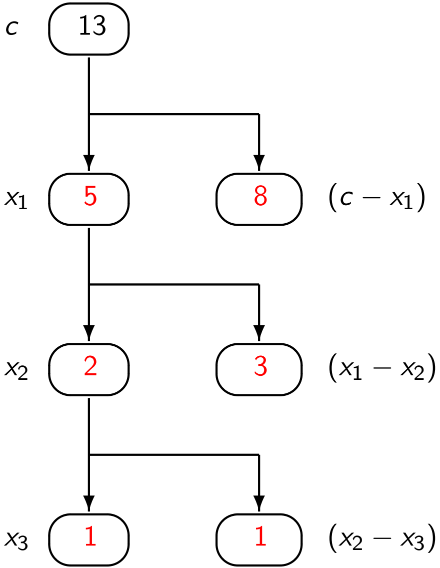
$$(3^2 + 10^2) + (6^2 + 4^2) + (1^2 + 3^2) = 171$$

「半々」で考えてみると、



$$(7^2+6^2)+(3^2+3^2)+(2^2+1^2)=108$$ （半々分割）

この数に対する「最適」な分割は、



$$(8^2 + 5^2) + (3^2 + 2^2) + (1^2 + 1^2) = 104$$ （最適分割）

この値はフィボナッチ数列の 2 乗和：

$$f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + f_{n-3}^2 + \cdots + f_1^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

という結果になる。

$$8^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 104 = 8 \times 13 \quad \text{（最適割当）}$$

最適な 2 次式がフィボナッチの生成規則が与えられた $c = f_n$ に対して、決定政策 $a = f_{n-1}$ とし、つぎの状態が f_{n-2} となっていく。Backward 的に $f_n - f_{n-1} = f_{n-2}$:

$$f_n[n \text{ 期状態}] - [(n-1) \text{ 期決定 } a = f_{n-1}] \quad = \quad f_{n-2}[(n-2) \text{ 期状態}],$$

このフィボナッチの関係の「必要十分条件」として、Cassini の条件：

$$(-1)^n = f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2$$

があるが、これは行列のべき乗値の関係式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

であるが、後での述べる、連分数での再帰関係を行列で表現するために

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot t = \frac{a\,t + b}{c\,t + d}$$

と定める作用素 $(\cdot)$ の累次積に関係がある。連分数とも関わる。

関係式は、

$$z_{n+1} = \frac{2z_n + 1}{z_n + 1}$$

とみなし、$z_n = f_n/g_n$ とおくことで

$$\frac{f_{n+1}}{g_{n+1}} = \frac{f_n + (f_n + g_n)}{f_n + g_n}$$

の再帰関係を見出せる。これと同様な関係は、Lucas 数列でも知られている。

$$L_n^2 + L_{n-1}^2 + L_{n-2}^2 + L_{n-3}^2 + \cdots + L_1^2 = L_n \cdot L_{n+1} - L_0$$

たとえば、$c = F_5 = 5$ とすると、この最小値は $F_5 \cdot F_4$ で再帰関係式は、

$$F_5 \cdot F_4 = F_4^2 + F_3^2 + F_2^2 + F_1^2$$

$$15 = 5 \cdot 3 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$$

$c = F_8 = 13$ とすると、この最小値は $F_5 \cdot F_4$ で再帰関係式は、

$$F_8 \cdot F_7 = F_7^2 + F_6^2 + \cdots + F_2^2 + F_1^2$$

$$104 = 13 \cdot 8 = 8^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$$

岩本・木村がユーチューブで解説した例である。

別の最適関係式として

係数に重みを入れた場合の最小化で、$1 = x + (1 - x)$ の分割では

$$\min_{0 \le x \le 1} \{Ax^2 + B(1-x)^2\} = C$$

となり、$x = \dfrac{B}{A+B}$, $1 - x = \dfrac{A}{A+B}$ のとき、$C = \dfrac{AB}{A+B}$ である。
この関係はフィボナッチ数列をもちいて、$A = 1/F_n$, $B = 1/F_{n-1}$ などとおくことで、

$$\min_{0 \le x \le 1} \left\{ \frac{x^2}{F_n} + \frac{(1-x)^2}{F_{n-1}} \right\} = \frac{1}{F_{n+1}}$$

と表すことができる。
3 個以上の場合では、トリボナッチ数、テトラボッチ数をもちいて表せる。

重み付き最小化

フィボナッチ数では

$$\min_{0\leq x,y,x+y=1}\left\{\frac{x^2}{F_n}+\frac{y^2}{F_{n-1}}\right\}=\frac{1}{F_{n+1}}$$

トリボナッチ数 $\{T_n : T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}\}$ では

$$\min_{0\leq x,y,z,x+y+z=1}\left\{\frac{x^2}{T_n}+\frac{y^2}{T_{n-1}}+\frac{z^2}{T_{n-2}}\right\}=\frac{1}{T_{n+1}}$$

なぜなら

$$\begin{aligned}\min_{0\leq x,y,z,x+y+z=1}\left\{Ax^2+By^2+Cz^2\right\} &= \frac{ABC}{AB+BC+CA}\\ &= \frac{1}{1/A+1/B+1/C}\end{aligned}$$

岩本誠一：最適化の数理〈2〉 (数理経済学叢書), 知泉書館 2013
”ヤングの不等式による動的双対”、その他多数岩本誠一 (九州大学名誉教授), 木村寛 (秋田県立大学), 平成 25 年度 RIMS 研究集会
“ドモアブルが求めた生起継続の確率計算と動的計画法”岩本誠一 (九州大学名誉教授), 木村寛 (秋田県立大学), 安田正實 (千葉大学名誉教授), 平成 25 年度 RIMS 研究集会

このようなフィボナッチ数はどこに

・連 (run): 統計学のノンパラメトリック検定
・回避数列 (avoiding sequence)：　数論的な組み合わせ論
Havil(“Gamma”,Princeton Univ) の本：p.119　数列に誤り、原文 (Doctrine) にはない文章、単なる誤訳？

回帰数列ともよばれている

ドモアブルの数列 (偶然の学理 (1717) 問題 74) コインを n 回 はじいて少なくとも k 回 続けて表が出る確率を求めよ。

答えは

$$P(10,3) = 0.508 = 1 - \frac{504}{2^{10}} = 1 - \frac{T(13)}{2^{10}}$$
$$P(21,4) = 0.497 = 1 - \frac{T(25)}{2^{21}}$$

ここで $P(n,k) = \{n$ 回はじいて少なくとも k 回続けて表が出る確率 $\}$
$T(n)$ はトリボナッチ数列とする。

回避数列 2 個の数字

2 個の数はベルヌーイ列とみなせるから、2 項展開して、数え上げると

ベルヌーイ試行での回避列

n 桁の $\{0,1\}$ から構成された列で、部分列 11（2 個続けて 1 となる）を含まないものは、すべての列 2^n のうち $F(n+2)$ 個となる。ここで $F(n)$ は n 番目のフィボナッチ数。

具体的に考えてみると

例 1

$n = 3$ 桁の $\{0,1\}$ からなるすべての列 $2^3 = 8$ のうち、部分列 11 を含まないものは、$F(3+2)/2^3 = F(5)/8 = 5/8$ 個ある。

x_1	x_2	x_3	$\sum x_i x_{i+1}$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	2

例 2

$n = 4$ 桁では $F(4+2)/2^4 = F(6)/16 = 8/16$ 個ある。

x_1	x_2	x_3	x_4	$\sum x_i x_{i+1}$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	2

1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	2
1	1	1	1	3

同値命題

回避とはある特定の列, たとえば 11 を含まない、起こらないという意味であり、一般に

2 項分布の回避列

n 個の独立なベルヌーイ列、$X_i \sim \mathrm{Binom}\left(1, \frac{1}{2}\right), i = 1, 2, \cdots, n$ において、

$$P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1} = 0\right) = \frac{F(n+2)}{2^n}$$

$F(n)$ は n-th フィボナッチ数

が成り立つ。
論理関数として、積和 $\vee_{i=1}^{n-1}(X_i \wedge X_{i+1}) = 0$ としても同じ。

証明には

再帰関係の補題

数列 $\{a_n, b_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n \end{cases}$$

とおくと、

$$a_n + b_n = F(n+2)$$

が成り立つ。

行列の累乗式から

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

命題の証明

n 桁のフィボナッチ列を考える。このうち、

(1) n 桁目の値が 0 の個数を a_n とし、

(2) n 桁目の値が 1 の個数を b_n とする。

すなわちフィボナッチ列の総数は $a_n + b_n$ である。
つぎに続く $n+1$ 桁目の数字を考えると、a_n と数えたものは 0 と 1 が位置づけられる。しかし b_n で数えたものは 0 しか位置づけられない。このことから、

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n \end{cases}$$

が成り立つ。

したがって行列表示では

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F(n+2) \\ F(n+1) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

n 番目では

$$\therefore a_n + b_n = F(n+1) + F(n) = F(n+2)$$

(QED)

いわゆるウサギの番（つがい）に他ならない。またデカルトの 4 円定理における再帰関係式を定めることが分かる。

フィボナッチ列（情報理論の意味で）において

(1) n 桁目の値が 0 の個数は $a_n = F(n+1)$.

(2) n 桁目の値が 1 の個数は $b_n = F(n)$.

が成り立つ。

最適化を入れる…

命題

$$C = \min\{Ax^2 + B(1-x)^2; 0 \le x \le 1\} = \frac{1}{1/A + 1/B},$$

$$i.e. \quad \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$$

等号は　$x = \dfrac{B}{A+B},\ 1-x = \dfrac{A}{A+B}$ のとき

A, B		C	x
$1, 2$	$\to$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$1, 3/2$	$\to$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$

$1, 5/3 \to \frac{5}{8} \quad \frac{5}{8}$

$1, 8/5 \to \frac{8}{13} \quad \frac{8}{13}$

Havil の誤植訂正と拡張フィボナッチ数

ドモアブルの本のうち、問題７４は「年金論」で充てられた最後の問題 (パラメータの誤植を修正)

一般再帰式

$$P(n,k) = P(n-1,k) + \{1 - P(n-k-1,k)\}/2^{k+1}$$

$$P(0,k) = P(1,k) = \cdots = P(k-1,k) = 0$$

の解は

$$P(n,k) = 1 - F_k(n+k)/2^n$$

ここで F_k は拡張 k フィボナッチ数。$k = 2, 3, \cdots$

トリボナッチ数

トリボナッチ数列の定義：

$$T_0 = T_1 = 0,\ T_2 = 1,\ T_{n+3} = T_n + T_{n+1} + T_{n+2}, \quad (n \geq 0)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T_n	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149

親番と子番の生成規則

フィボナッチ数と比べると、急激に増加する。
フィボナッチ列の考え方が兎（うさぎ）の「親番（つがい)」と「子番」の２属性から生成された。
親（◎印）と子（○印）が、規則 (1) ◎→◎と○、規則 (2) ○→◎である。

この場合には３種の属性：◎、△、○を考え、３つの規則

規則 (1)　◎→◎と△、
規則 (2)　△→◎と○、
規則 (3)　○→◎

として各世代での合計 "T_n = ◎ + △ + ○" とすると、これがトリボナッチ数列。

数式処理のお助けで

・StringReplace 文字列の代入：　親、子の生成規則、
・StringCount 数え上げ

MatrixPower[mat, n] の計算とその成分結果

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n(1,1) & a^n(1,2) & a^n(1,3) \\ a^n(2,1) & a^n(2,2) & a^n(2,3) \\ a^n(3,1) & a^n(3,2) & a^n(3,3) \end{pmatrix}$$

具体的な値は。固有多項式の解をもちいて表した。

ここでの報告はつぎの結果をもちいる。

補題

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} T_{n+2} & T_{n+1} + T_n & T_{n+1} \\ T_{n+1} & T_n + T_{n-1} & T_n \\ T_n & T_{n-1} + T_{n-2} & T_{n-1} \end{pmatrix}$$

なぜなら

$$\begin{aligned} T_{n+3} &= T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \\ T_{n+2} &= T_{n+2} \\ T_{n+1} &= T_{n+1} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} T_{n+3} \\ T_{n+2} \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{n+2} \\ T_{n+1} \\ T_n \end{pmatrix}$$

であるから、初期値をもちいて得られる。

回避数列の確率をトリボナッチ数列で分数表現

Theorem（回避数列とトリボナッチ数列）

n 個の独立なベルヌーイ列、$X_i \sim \mathrm{Binom}\left(1, \frac{1}{2}\right), i = 1, 2, \cdots, n$ において、

$$P\left(\sum_{i=1}^{n-2} X_i X_{i+1} X_{i+2} = 0\right) = \frac{T(n+3)}{2^n}$$

$T(n)$ は n-th トリボナッチ数

“n 回試行でトリボナッチ数は続けて３個以上の１が表れない場合の数” より一般化も可能であるが、その解法のひとつには、差分を用い、低次の連鎖に落としていく。いわゆるニュートンの方法に考え方である。