

1 まず Fibonacci 数を書き上げます

番号 (インデックス) $n = 1, 2, 3, \dots$ として、2つの初期値 $F(1) = 1, F(2) = 1$ として、以降は順に和 (たし算): $F(3) = F(1) + F(2) = 2, F(4) = F(2) + F(3) = 3, \dots$, で決めていきます。

問 1. 数列の空欄を埋めていきましょう。どんどん大きくなっていきますよ。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
$F(n)$	1	1																

問 2. 数字 $F(n)$ が 3 桁になるのは何番目の n ですか? また 4 桁になるのは?

問 3. 数字 $F(n)$ が素数になっているのは、番号 n がどんな場合ですか?

2 文字式の計算をします

2数の積、べき乗、分数の計算:

$$(i) (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \quad (ii) (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(iii) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (iv) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(v) \frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{a^2-b^2} \quad (vi) a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = a + \frac{c}{bc+1} = \frac{abc+a+c}{bc+1}$$

問. つぎの数を $a + b\sqrt{5}$ の形にせよ。ヒント: (3) は (v) をもちいる。

(1) 積 $(2 + \sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})$

(2) 3乗 $(2 + \sqrt{5})^3$

(3) 逆数 $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

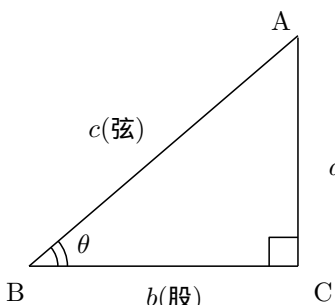
3 最大公約数 (Greatest Common Diviser)

2つ以上の整数に対して、共通した約数（積に分解したとき、因数としているもの）を公約数といい、公約数のうちで最大となるものを最大公約数という。たとえば、24, 180 の最大公約数を求める。素因数分解することで、 $24 = 2^3 \cdot 3$, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ であるから、共通な約数は、1, 2, 3, 4, 6, 12 である。12 = $2^2 \cdot 3$ が最大。よってこれを $\text{GCD}(24, 180) = 12$ と表す。別例では、 $\text{GCD}(15, 28) = 1$ で、なぜなら、 $15 = 3 \cdot 5$, $28 = 2^2 \cdot 7$ であるから。このときは共通な因数は 1 しかない。これを 15 と 28 は互いに素という。因数分解はそう簡単ではない。この計算を簡単にするために、2数 a, b に $a = bq + r$ の関係があれば、 $\text{GCD}(a, b) = \text{GCD}(b, r)$ をもちいる。順次に小さい数へと帰着させていく（ユークリッドの互除法）。

問. つぎの最大公約数に関する問いに答えよ。

- (1) $\text{GCD}(a, b) = \text{GCD}(b, a) = \text{GCD}(a, b - a)$ (ただし $b > a$) をいくつかの例で確かめよ。
- (2) $\text{GCD}(629, 259)$, $\text{GCD}(1463, 304)$ をもとめよ。(数研出版「数A」より引用)
- (3) $\text{GCD}(1071, 1029) = 21$ を確かめよ。
- (4) $\text{GCD}(144, 89)$ をもとめよ。(それぞれ 12 番目、11 番目のフィボナッチ数)

4 三角比、三角関数、ピタゴラスの定理 (三平方の定理)



直角三角形 ABC において、3つの辺の長さを斜辺 $AB = c$ 、垂直辺 $BC = a$ 、底辺 $CA = b$ とし、 $\angle ABC = \theta$ とするとき、直角を挟む2辺 a, b と斜辺 c の関係を $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立ち、

$$\sin \theta = \frac{a}{c}, \quad \cos \theta = \frac{b}{c}, \quad \tan \theta = \frac{a}{b}$$

をそれぞれ 正弦、余弦、正接とよびます。

★ 江戸時代には勾股弦（こうこげん）の定理とも呼ばれていました。和算について <http://www.ndl.go.jp/math/s1/c6.html> のページを参照。江戸時代にも寺子屋などで勉強したのでしょう。

問 1. 三角関数の正弦と余弦の2乗和は $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ これはピタゴラスの定理です。

問 2. 三角関数の和の公式がつぎの形となることを確かめます。

- (i) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$ (ii) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$
 (iii) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

問 3. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$ のとき、 $\tan(\alpha + \beta)$ の値を求めます。角度 $\theta = \alpha + \beta$ はいくつですか？（ヒント） $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$, $a = 1, b = 1, c = \sqrt{2}$ です。ここでフィボナッチ数とは $F(3) = 2, F(4) = 3$ の関係です。

5 連分数 (Continued Fraction)

連分数: 記号 $[a; b, c, d]$ によって連分数を表します。以前はさまざまな表し方を使っていましたが、現在はこの形がよく用いられます。左の例は4個の数字ですが、右側では、無限に続く列です。点々 \dots により、果てしなく続くことを表現しています。

$$[a; b, c, d] = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}, \quad [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

つぎの WEB では分数から連分数へと変換するプログラムがあります。

★ <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html>

問. つぎの連分数に関する問いに答えよ。

(1) $\frac{45}{16} = [2; 1, 4, 3] = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}$ を確かめよ。

(2) $\frac{41}{13} = [3; 6, 2]$ を確かめよ。

(3) $[1; 4, 3, 2]$ と $[1; 4, 3, 1, 1]$ を比べて等しいことを示せ。

(4) $[1; 4, 3]$ と $[0; 1, 4, 3]$ とを比べて、どんな関係があるだろうか？

(5) $[1; 1, 1, 1, 1, 1]$ を求めよ。あるフィボナッチ数の分数形となる。

(6) $[4; 4, 4]$ を求めよ。ある数の分数形となる。

(7) $\frac{731}{301} = \frac{17}{7} = [2; 2, 3]$ を確かめよ。GCD(731, 301) = 43 との関係を考えよ。

(8) $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \dots]$ を示せ。

(9) $\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, 4, \dots]$ を示せ。

(ヒント) $\sqrt{2} = 1 + 0.4142\dots$, $0.4142\dots = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ から、 $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ となる。つまり $\sqrt{2}$ の整数部分 1 を取り出し、残り的小数部分 $0.4142\dots$ の逆数をとって変形していく。つぎはこの分母を変形するから $1 + \sqrt{2} = 2 + 0.4142\dots$, $\frac{1}{1 + \sqrt{2} - 2} = 1 + \sqrt{2} = 2 + 0.4142\dots$ などとして繰り返す。連分数の計算は「表計算ソフト」でもできますね。(I) 割り算で「数」の「整数部分」を求めます。(II) 小数部分は引き算です: 「数」- 「整数部分」= 「小数部分」(III) この小数部分の「逆数」を「 $1/x$ 」の関数で求めます。この結果において、同様に、整数部分と小数部分とに分けて計算すると連分数が得られます。(IV) 逆数を計算して、整数になったら、それで終了です。もし終わらないとき、この場合は分数では表せないもの、「無理数」なのです。

6 行列 (matrix) と行列式 (determinant)

つるかめ算を解く場合に使われる 2 元連立方程式が $\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases}$ で与えられると、その解は $x = \frac{sd - tb}{ad - bc}$, $y = \frac{at - cs}{ad - bc}$ となります。分母の数 $ad - bc$ は、係数を並べてつくる行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ から、行列式と定義される $\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ となり、共通な値ですが、分子はそれぞれ $\det \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix} = sd - bt$ と $\det \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix} = at - cs$ という行列からの行列式で表されます。行列の掛け算 (積) は、 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as + bu & at + bv \\ cs + du & ct + dv \end{pmatrix}$ で定義しますが、積の交換はできません。一般には $AB \neq BA$ (積の交換律は不成立) です。しかし順序は $(AB)C = A(BC)$ (結合律は成立) です。

問. 行列に関する問いに答えよ。

- (1) 2 乗 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を求めよ。
- (2) 4 乗 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を求めよ。行列の要素 (成分) にはフィボナッチ数が表れる。
- (3) 数 k に行列をかける演算 (\diamond) を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \diamond k = \frac{ak + b}{ck + d}$ と定めるとき、連分数とこの行列をつかった関係式を確かめなさい。

$$[a; b, c] = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \diamond c$$

さらに $[a; b, c, d]$ を 2 次正方行列の積と演算 (\diamond) で表し、それを確かめよ。(ヒント: 右辺は行列の積をしてから $\begin{pmatrix} ab+1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \diamond c = \frac{(ab+1)c+a}{bc+1} = \frac{(ab+1)+a/c}{b+1/c} = \frac{a(b+1/c)+1}{b+1/c} = a +$

$$\frac{1}{b+1/c} = [a; b, c] \text{ となる。あるいは } \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \diamond c = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \diamond \frac{bc+1}{c} = \frac{a \cdot \frac{bc+1}{c} + 1}{1 \cdot \frac{bc+1}{c} + 0} =$$

$$\frac{a(bc+1)+c}{bc+1} = a + \frac{c}{bc+1} = a + \frac{1}{b+1/c} = [a; b, c] \text{ としても同じ式が得られる。}$$

7 入試問題から

入試問題にもよく出題されるネタ「頻出」ですから、検索するとたくさんあります。いくつかを拾い上げてみました。

問 1. (2012 年青山学院) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ の a_3, a_7, a_{12} を求めよ。

問 2. (2001 年横浜国立大学) 数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$ により定まる。次の問いに答えよ。

(1) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) m を自然数をするとき、 a_{6m} は 8 の倍数であることを示せ。(ヒント：数学的帰納法)

★ 多くの場合は漸化式の定義から、問題にあるいろいろな関係式の導きを求められますが、この問題は逆に漸化式を求めさせています。ですから、問題の関係式と漸化式とは「互いに同値な式」となり、これも不思議な感じがします。

問 3. (2007 年大阪工業大学より改変、数字の桁だけでも恐ろしい!!) フィボナッチ数列 $\{a_n\}$ において、2 つの項の最大公約数を求めよう。

(1) a_{12} と a_9 の最大公約数、 a_9 と a_6 の最大公約数を求めよ。

(2) 整数 $p > q \geq 1$ に対して、 $a_p = a_{p-q} a_{q+1} + a_{p-q-1} a_q$ を示せ。

(3) $a_{126} = 96151855463018422468774568, a_{78} = 8944394323791464$ である。 a_{126}, a_{78} の最大公約数を求めよ。

(解) (1) $a_{12} = F(12) = 144, a_9 = 34$ は順次に計算して求めます。最大公約数は $GCM(144, 34) = GCM(2^4 \cdot 3^2, 2 \cdot 17) = 2$ と直接求められます。 $F(12-3) = F(9) = 8$ (2) は、 a_q と a_{q+1} が互いに素であることをもちいます。(証明は背理法、なぜなら、最大公約数を $k \neq 1$ とすると、 a_{q-1} も k で割り切れ、順次下げて初期値が $a_2 = a_1 = 1$ であるから、矛盾となるから。 $k = 1$ とは互いに素となることと同値。) 移項して $a_{p-q} = \frac{a_p - a_q \cdot a_{p-q-1}}{a_{q+1}}$ となり、 a_p, a_q が共通のある数 k の倍数であれば、 a_{p-q} も k の倍数となります。

2 つのフィボナッチ数 $F(p), F(q)$ の最大公約数 (GCM) は係数項 p, q の最大公約数 $d = GCM(p, q)$ に対するフィボナッチ数に等しい: $GCM(F(p), F(q)) = F_d$

この定理を適用する。2 つの数 126, 78 は 6 の倍数である。なぜなら、 $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7, 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$ 。つぎに $GCM(126, 78) = 2 \cdot 3 = 6$ となり、よって、この項数に対応するフィボナッチ数 $F(6) = 8$ が最大公約数。答え 8 である。

実際、数式処理での因数分解により、答えが確かめられます。 $a_{126} = F(126)$ でこれを因数分解すると、

$$96151855463018422468774568 = 2^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 211 \cdot 421 \cdot 1009 \cdot 31249 \cdot 35239681$$

同様に

$$a_{78} = F(78) = 2^3 \cdot 79 \cdot 233 \cdot 521 \cdot 859 \cdot 135721$$

こんな計算はとてみたいへんです。因数分解はとて難しいので、だから暗号理論に使われるのです。

階段の昇り方、場合の数の数え上げもフィボナッチ数になることが知られています。

階段数 n までに到達する回数は、最後に n 段に到達するとき、1 段か 2 段かに場合分けをする。1 段では前段 $n - 1$ 段の値、2 段では $n - 2$ 段、この両者を合わすから、前と前々との 2 項の和、すなわちフィボナッチ数列が求める答えとなる。

問 4. (2007 年京都大学(理系)) 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき、1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか？

問 5. (2006 年早稲田中) 図のように 10 段からなる階段があり、1 段上がりと 2 段上りの一方、または両方を用いて昇ります。次の問いに答えなさい。

- (1) 2 段上りをちょうど 3 回用いたとき、階段の昇り方は何通りありますか。(答え : 35 通り)
- (2) 階段の昇り方は全部で何通りありますか。(89 通り)
- (3) 7 段目を踏まないで階段を上る方法は何通りありますか。(26 通り)

問 6. (1992 年東大文科) 各桁の数字が 0 か 1 であるような自然数の列 $X_n (n = 1, 2, \dots)$ を次の規則により定める。(i) $X_1 = 1$, (ii) X_n のある桁の数字 α が 0 ならば α を 1 で置き換え、 α が 1 ならば α を '10' で置き換える。 X_n の各桁ごとにこのように置き換えを行って得られる自然数を X_{n+1} とする。たとえば、 $X_1 = 1$, $X_2 = 10$, $X_3 = 101$, $X_4 = 10110$, $X_5 = 10110101$, \dots となる。

- (1) X_n の桁数 a_n を求めよ。
- (2) X_n の中に '01' という数字の配列が現れる回数 b_n を求めよ。(たとえば、 $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$, $b_4 = 1$, $b_5 = 3$, \dots).

(ヒント) x_n, y_n を 1, 0 の項数とすると、 $x_{n+1} = x_n + y_n$, $y_{n+1} = x_n$ の関係となり、 $a_n = x_n + y_n$ 。 X_n には '00' の配列はない。作られた配列 X_n で n が奇数ならば、右端は 1, 偶数ならば 0 であるから、 $b_n = y_n - \frac{1+(-1)^n}{2}$.

★ フィボナッチ数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots などの数列を入力すると、それは「フィボナッチ数列です」と答えてくれる英文 URL があります。ここで実際、数列を入力してためしてみてください。フィボナッチの項 (fibonacci) には非常に多くの知られている命題が掲載されています。https://oeis.org/ (オンライン整数列大辞典)

★ <http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/ippansug/fibo.html> にもフィボナッチ関連の話を掲載しています。

★ <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html> フィボナッチ関連の話題がたくさんあります。ぜひ一度訪れてみては？

★ おすすめの本です : [1] フィボナッチ数の小宇宙、中村滋、日本評論社 [2] 波紋と螺旋とフィボナッチ、近藤滋、利潤社 [3] 黄金比とフィボナッチ数、ダンラップ、日本評論社 [4] フィボナッチのうさぎ、キースボル、青土社

