複素関数の微分 $\cdots$ まとめと例題

[微分可能の定義] 複素関数 $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ が、点 $z = \alpha$ で微分可能であるとは

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \text{が存在すること（極限が存在すること）}$$

この極限値を微分係数といい、$f'(\alpha)$ と表す。

定理 1 (i) 複素関数 $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ が $z = z_0 (= x_0 + iy_0)$ で微分可能であれば、

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (-i)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

ここで $\dfrac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = u_y + iv_y$ の意味。変数 x, y の偏微分 u_x, v_y などをもちいて表される。

(ii) 点 $z = \alpha$ で微分可能であるための必要十分条件はコーシー・リーマンの方程式（関係式）

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすこと。

例題 1 $f(z) = e^z$ を微分する。$e^z = e^x(\cos y + \sin y)$ だから、$u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ を偏微分すると、$u_x = e^x \cos y$, $v_x = e^x \sin y$ であり、さらに $u_y = e^x(-\sin y)$, $v_y = e^x \cos y$ であるから、$f_x = u_x + iu_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$ および $f_y = u_y + iu_y = -e^x \sin y + ie^x \cos y$ を得る。ゆえに $(-i)f_y = (-i)\{-e^x \sin y + ie^x \cos y\} = ie^x \sin y + e^x \cos y = e^z = f_x$ となるから、コーシー・リーマンの方程式 $f_x = (-i)f_y$ が成り立っている。このとき微分は、$f'(z) = (e^z)' = e^z$ と得られる。

例題 2 $f(z) = \overline{z} = x - iy$ は微分可能でない。なぜなら、$f = u + iv$ において、$u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ であるから、$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ であり、$\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$ となっている。したがって $f_x = 1$, $(-i)f_y = -1$ では、コーシー・リーマンの方程式は成り立っていないから微分可能ではない。

[正則の定義] 複素関数 $f(z)$ が、ある範囲のすべての点で微分可能であるとき、関数は正則であるという。いいかえると、正則であるための必要十分条件は、コーシー・リーマン方程式が成り立つことである。

微分可能を単に「正則」といい代えただけではなく、実変数の場合より強い命題を得ることができる。たとえば、正則な複素関数は繰り返して微分可能となる。

例題 3 $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ とすれば、$x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ であるから、$\dfrac{\partial x}{\partial z} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z} = \dfrac{1}{2i}$, 合成関数の微分をもちいることで、$\dfrac{\partial f}{\partial z} = f_x \dfrac{\partial x}{\partial z} + f_y \dfrac{\partial y}{\partial z} = \dfrac{1}{2}(f_x - if_y)$, 同様に $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = f_x \dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}} + f_y \dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}(f_x + if_y)$ となる。これから、$f(z)$ が正則であれば、$\dfrac{\partial f}{\partial z} = f_x$, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ となる。すなわち、正則な関数 f の中には $\overline{z}$ が含まれてはいない (参照 例題 2)。