1　ラプラス変換

1.　ラプラス変換の基礎問題

問題 1. 次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1) $at+b$　(2) at^2+bt+c　(3) e^{at+b}　(4) $\cos(\omega t+\theta)$

(5) $\sin(\omega t+\theta)$　(6) $\cos^2 t$　(7) $\sin^2 t$

(8) $f_1(t)=\begin{cases} a & (0\le t<b) \\ 0 & (b\le t) \end{cases}$　(9) $f_2(t)=\begin{cases} \dfrac{at}{b} & (0\le t<b) \\ 0 & (b\le t) \end{cases}$

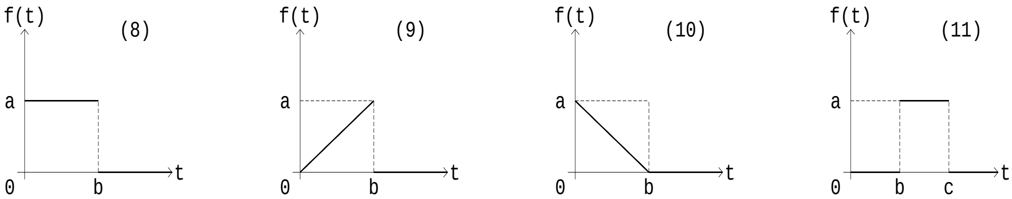
(10) $f_3(t)=\begin{cases} a-\dfrac{at}{b} & (0\le t<b) \\ 0 & (b\le t) \end{cases}$　(11) $f_4(t)=\begin{cases} 0 & (0\le t<b) \\ a & (b\le t<c) \\ 0 & (c\le t) \end{cases}$

(12) (8) で $a=\dfrac{1}{h}$, $b=h$ とおくとどうなるか.　$(12)'$ (12) で $h\to 0$ とすると?

(13) (11) で $a=\dfrac{1}{2h}$, $b=d-h$, $c=d+h$ とおくとどうなるか.

$(13)'$ (13) で $h\to 0$ とすると?　$(13)''$ $(13)'$ で $d\to 0$ とすると?

(14) $f_5(t)=\begin{cases} 0 & (0\le t<b) \\ a & (b\le t) \end{cases}$



2.　逆ラプラス変換の基礎問題

問題 2. 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ。

(1) $\dfrac{b}{s+a}$　(2) $\dfrac{1}{s^2+a^2}$　(3) $\dfrac{s-b}{s^2-a^2}$　(4) $\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s^2}+\dfrac{c}{s^3}+\dfrac{d}{s^4}$

(5) $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$　(6) $\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$　$(a\ne b)$　(7) $\dfrac{s-4}{s^2+2s+4}$

3.　導関数の変換（1 次導関数の利用）

問題 3. 導関数のラプラス変換を用いた変換：

$$\mathcal{L}[f(t)](s)=\frac{\mathcal{L}[f'(t)](s)+f(0)}{s}$$

用いて，次の関数のラプラス変換求めよ。

(1) $t+a$　(2) $(t+b)^2$　(3) $(t+c)^3$

4. 導関数の変換（2次導関数の利用）

問題 4. 導関数のラプラス変換を用いた変換：

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\mathcal{L}[f'(t)](s) + f(0)}{s},$$

もしくは，2次導関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0)$$

用いて，次の関数のラプラス変換求めよ。

(1) $\cos^2 t$　(2) $t\sin\omega t$　(3) $t\cos\omega t$　(4) $e^{at}\sin\omega t$　(5) $e^{at}\cos\omega t$　(6) te^{at}

5. 微分方程式を解く

問題 5. 次の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$

(2)　$y''(t) - (\alpha+\beta)y'(t) + \alpha\beta y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0 \quad (\alpha \neq \beta)$

(3)　$y''(t) - 2\alpha y'(t) + \alpha^2 y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$

(4)　$y''(t) - 2\alpha y'(t) + (\alpha^2+\beta^2)y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0 \quad (\beta > 0)$

(5)　$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = e^t, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

6. 変換の微分（ラプラス変換）

問題 6. 次の関数のラプラス変換を求めよ。

(1) $t\sin\omega t$　(2) $t\cos\omega t$　(3) t^n　(4) $t\cosh at$　(5) $t\sinh at$　(6) t^2e^t

7. 変換の微分（逆ラプラス変換）

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ としたとき、$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$ が変換の微分であるが、この逆を考えてみよう。すなわち、与えられた $F(s)$ の逆ラプラス変換を求めるのが困難なとき、その代わりに $-F'(s)$ の逆ラプラス変換を求めるのである。そうして $tf(t) = \mathcal{L}^{-1}[-F'(s)]$ より、$f(t)$ が求まる。

問題 7. (1)(2)(3) については問題 6.(1)(2) の結果を用い、(4)(5) については上の考察から、次の関数の逆ラプラス変換を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$　(2) $\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$　(3) $\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$　(4) $\log\left(1+\dfrac{\omega^2}{s^2}\right)$　(5) $\log\dfrac{s}{s-1}$

8. s 軸上の移動（ラプラス変換）

問題 8. 次の関数のラプラス変換を求めよ。

$$(1)\ t^m e^{at} \quad (2)\ e^{at}\sin\omega t \quad (3)\ e^{at}\cos\omega t \quad (4)\ te^{at}\sin\omega t$$

9. s 軸上の移動（逆ラプラス変換）

問題 9. 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ。

$$(1)\ \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} \quad (2)\ \frac{2}{(s+1)^2+2^2} \quad (3)\ \frac{2s}{s^2+2s+5} \quad (4)\ \frac{s-4}{s^2+2s+4}$$

10. 積分の変換

問題 10. 次の関数の逆ラプラス変換を (i) 積分の変換による方法，(ii) 部分分数展開を用いる方法の 2 通りによってそれぞれ求めよ。

$$(1)\ \frac{1}{s(s^2+\omega^2)} \quad (2)\ \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$$

11. 合成積の性質

問題 11. 次を示せ。

$$(1)\quad (f*g)(t)=(g*f)(t)$$
$$(2)\quad (f*(g+h))(t)=(f*g)(t)+(f*h)(t)$$
$$(3)\quad ((f*g)*h)(t)=(f*(g*h))(t)$$

12. 合成積（ラプラス変換）

問題 12. 合成積の変換を用いて，次のラプラス変換を求めよ。

$$(1)\ \int_0^t (t-\tau)u(\tau)\,d\tau \quad (2)\ \int_0^t \sin(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$
$$(3)\ \int_0^t \cos(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \quad (4)\ \int_0^t e^{t-\tau}u(\tau)\,d\tau$$

13. 合成積（逆ラプラス変換）

$H(s)=F(s)G(s)$, $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, $G(s)=\mathcal{L}[g(t)]$ としたとき、合成積の性質を用いて、

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]]=\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)*g(t)]]=f(t)*g(t)$$

のようにして $H(s)$ の逆ラプラス変換を算出することができる。

問題 13. 合成積の変換を用いて，次の逆ラプラス変換を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{s^2(s-a)}$ (2) $\dfrac{1}{(s-a)^2}$ (3) $\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$ (4) $\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$

(5) $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$ (6) $\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$ (7) $\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

14. 積分方程式

問題 14. 次の積分方程式をラプラス変換を用いて解け。

$$(1) \quad y(t) = t + 1 + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,d\tau$$

$$(2) \quad y(t) = 1 + 2\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)\,d\tau$$

$$(3) \quad y(t) = 1 + t + \int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)\,d\tau$$

$$(4) \quad y(t) = \sin 2t + \int_0^t \sin 2(t-\tau)y(\tau)\,d\tau$$

$$(5) \quad y(t) = \sin t + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,d\tau$$

15. 積分微分方程式

問題 15. 次の積分微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

(1) $y'(t) = y(t) + 1 + \displaystyle\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)\,d\tau, \quad y(0) = 0.$

(2) $y''(t) = t + \displaystyle\int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

16. 減衰振動

問題 16. 運動方程式

$$Mu''(t) = -Ku(t) - \mu u'(t), \quad t > 0$$

を初期条件

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0$$

の下で解け。ただし，M, μ, K はどれも正の定数とする。

1　ラプラス変換（解答例）

解答 1. いろいろな関数のラプラス変換を求める基礎練習問題。ラプラス変換の線形性を用いよう。

(1) $\mathcal{L}[at+b] = a\mathcal{L}[t] + b\mathcal{L}[1] = \dfrac{a}{s^2} + \dfrac{b}{s}.$

(2) $\mathcal{L}[at^2+bt+c] = a\mathcal{L}[t^2] + b\mathcal{L}[t] + c\mathcal{L}[1] = \dfrac{2a}{s^3} + \dfrac{b}{s^2} + \dfrac{c}{s}.$

(3) $\mathcal{L}[e^{at+b}] = \mathcal{L}[e^b e^{at}] = e^b\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{e^b}{s-a}.$

(4) $\mathcal{L}[\cos(\omega t+\theta)] = \mathcal{L}[\cos\omega t\cos\theta - \sin\omega t\sin\theta] = \cos\theta\mathcal{L}[\cos\omega t] - \sin\theta\mathcal{L}[\sin\omega t] = \dfrac{s\cos\theta - \omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}.$

(5) $\mathcal{L}[\sin(\omega t+\theta)] = \mathcal{L}[\sin\omega t\cos\theta + \cos\omega t\sin\theta] = \cos\theta\mathcal{L}[\sin\omega t] + \sin\theta\mathcal{L}[\cos\omega t] = \dfrac{\omega\cos\theta + s\sin\theta}{s^2+\omega^2}.$

(6) $\mathcal{L}[\cos^2 t] = \mathcal{L}\left[\dfrac{\cos 2t+1}{2}\right] = \dfrac{1}{2}(\mathcal{L}[\cos 2t] + \mathcal{L}[1]) = \dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$

(7) $\mathcal{L}[\sin^2 t] = \mathcal{L}[1-\cos^2 t] = \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[\cos^2 t] = \dfrac{2}{s(s^2+4)}.$

(8) $\mathcal{L}[f_1(t)] = \displaystyle\int_0^b ae^{-st}\,dt = \dfrac{a(1-e^{-bs})}{s}.$

(9) $\mathcal{L}[f_2(t)] = \displaystyle\int_0^b \dfrac{a}{b}te^{-st}\,dt = \dfrac{a(1-(1+bs)e^{-bs})}{bs^2}.$

(10) (8) の $f_1(t)$, (9) の $f_2(t)$ を用いると，$f_3(t) = f_1(t) - f_2(t)$ と書けるので,

$$\mathcal{L}[f_3(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] - \mathcal{L}[f_2(t)] = \dfrac{a(bs-1+e^{-bs})}{bs^2}.$$

(11) $\mathcal{L}[f_4(t)] = \displaystyle\int_b^c ae^{-st}\,dt = \dfrac{a(e^{-bs}-e^{-cs})}{s}.$

(12) $\dfrac{1-e^{-hs}}{hs}.$　　(12)′ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{1-e^{-hs}}{hs} = 1.$

(13) $\dfrac{e^{-ds}}{2s}\dfrac{e^{hs}-e^{-hs}}{h}.$　　(13)′ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{-ds}}{2s}\dfrac{e^{hs}-e^{-hs}}{h} = e^{-ds}.$　　(13)″ $\displaystyle\lim_{d\to 0} e^{-ds} = 1.$

(14) $\mathcal{L}[f_5(t)] = \displaystyle\int_b^\infty ae^{-st}\,dt = \dfrac{ae^{-bs}}{s}.$

注 (4)(5). $\mathcal{L}[e^{i(\omega t+\theta)}] = e^{i\theta}\mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \dfrac{e^{i\theta}}{s-i\omega} = \dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)(s+i\omega)}{s^2+\omega^2}$ の実部と虚部を考えてもできますね.

注 (12)′(13)″. $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ を示したことになる.

注 (13)′. $\mathcal{L}[\delta(t-d)] = e^{-ds}\mathcal{L}[\delta(t)] = e^{-ds}$ を示したことになる.

解答 2. 逆ラプラス変換に慣れる練習問題。

(1) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{b}{s+a}\right] = b\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-(-a)}\right] = be^{-at}.$

(2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+a^2}\right] = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s^2+a^2}\right] = \dfrac{1}{a}\sin at.$

(3) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s-b}{s^2-a^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2-a^2}\right] - b\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-a^2}\right]$

$\quad = \cosh at - \dfrac{b}{a}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s^2-a^2}\right] = \cosh at - \dfrac{b}{a}\sinh at.$

$$
\begin{aligned}
&(4)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s^3}+\frac{d}{s^4}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{s^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c}{s^3}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{s^4}\right]\\
&\qquad =a\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+b\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1!}{s^2}\right]+\frac{c}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2!}{s^3}\right]+\frac{d}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right]=a+bt+\frac{c}{2}t^2+\frac{d}{6}t^3.\\
&(5)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right]=1-\cos t.\\
&(6)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right]=\frac{1}{a-b}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right]=\frac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt}).\\
&(7)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-4}{s^2+2s+4}\right]=\cdots\textbf{注}\cdots=e^{-t}\left(\cos\sqrt{3}t-\frac{5}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right).
\end{aligned}
$$

注 (5). 部分分数展開は A, B, C を定数として,

$$\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

のようにする。通常，分母の次数より 1 つ小さい次数の分子を想定する。つまり，分母が 1 次 (今の場合 s) ならば分子は 0 次 (定数 A)，分母が 2 次 (今の場合 s^2+1) ならば分子は 1 次 ($Bs+C$) とおく。設定が終ったら，あとは等号が成立するように定数を定めるだけである。(6) も同じですね。さて，話しついでにもう少し一般的な状況が見える例を考えてみよう。例えば $s^{-3}(s+1)^{-2}$ は，上の説明の通りに変形すれば,

$$\frac{1}{s^3(s+1)^2}=\frac{As^2+Bs+C}{s^3}+\frac{Ds+E}{(s+1)^2}$$

とするのだが，次のようにも整理できる。

$$
\begin{aligned}
\frac{As^2+Bs+C}{s^3}+\frac{Ds+E}{(s+1)^2} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D(s+1)+E-D}{(s+1)^2}\\
&= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s+1}+\frac{E'}{(s+1)^2}.
\end{aligned}
$$

この方がすっきりしますね (ここで，$E'=E-D$ とおいた)。

注 (7). 分母の 2 次式は判別式が負なので，実数の範囲では因数分解できず，部分分数展開ができない。ところが,

$$\frac{s-4}{s^2+2s+4}=\frac{(s+1)-5}{(s+1)^2+3}=\frac{s+1}{(s+1)^2+3}-\frac{5}{(s+1)^2+3}\qquad\cdots(\star)$$

と変形すれば，見通しが良くなりそうな気配がしてくる。つまり,

$$F(s)=\frac{s}{s^2+3}-\frac{5}{s^2+3}\left(=\frac{s}{s^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{5}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right)\qquad\cdots(\diamond)$$

とおけば，上の ($\star$) 式は $F(s+1)$ である。ここで，$F(s)$ の逆変換はわかるので，$F(s+1)$ も似たようなものではなかろうかと想像される。実際、そうであるのだが、詳しくは後で触れるとして (問題 9.(4) を見よ)，ここでは、複素数を使えばいままでの知識で解けることを見てみよう。分母 $s^2+2s+4=0$ の解を $\lambda_\pm=-1\pm\sqrt{3}i$ とおくと,

$$\frac{s-4}{s^2+2s+4}=\frac{1}{s-\lambda_-}-\frac{5-\sqrt{3}i}{(s-\lambda_+)(s-\lambda_-)}$$

と変形できる。よって，前問 (6) の結果を使えば,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-4}{s^2+2s+4}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\lambda_-}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5-\sqrt{3}i}{(s-\lambda_+)(s-\lambda_-)}\right]=e^{\lambda_- t}-\frac{5-\sqrt{3}i}{\lambda_+-\lambda_-}\left(e^{\lambda_+ t}-e^{\lambda_- t}\right)$$

となる。これを整理すると虚数部分が美しく消去され,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-4}{s^2+2s+4}\right]=e^{-t}\left(\cos\sqrt{3}t-\frac{5}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right)$$

を得る。($\diamond$) 式と比較して眺めると，さもありなんという感じですね。詳しくは「s 軸上の移動」(§8. と §9.）を見て下さい。

解答 3. (2) は (1) の，(3) は (2) の結果を使う。

(1) $\mathcal{L}[t+a]=\dfrac{\mathcal{L}[1]+a}{s}=\dfrac{a}{s}+\dfrac{1}{s^2}.$

(2) $\mathcal{L}[(t+b)^2]=\dfrac{\mathcal{L}[2(t+b)]+b^2}{s}=\dfrac{b^2}{s}+\dfrac{2}{s}\mathcal{L}[t+b]=\dfrac{b^2}{s}+\dfrac{2b}{s^2}+\dfrac{2}{s^3}.$

(3) $\mathcal{L}[(t+c)^3]=\dfrac{\mathcal{L}[3(t+c)^2]+c^3}{s}=\dfrac{c^3}{s}+\dfrac{3}{s}\mathcal{L}[(t+c)^2]=\dfrac{c^3}{s}+\dfrac{3c^2}{s^2}+\dfrac{6c}{s^3}+\dfrac{6}{s^4}.$

注. この問題の場合，それぞれ,

$$\mathcal{L}[t+a]=\mathcal{L}[t]+\mathcal{L}[a]$$
$$\mathcal{L}[(t+b)^2]=\mathcal{L}[t^2]+\mathcal{L}[2bt]+\mathcal{L}[b^2]$$
$$\mathcal{L}[(t+c)^3]=\mathcal{L}[t^3]+\mathcal{L}[3ct^2]+\mathcal{L}[3c^2t]+\mathcal{L}[c^3]$$

と展開したあと変換しても同じ手間ですね。

解答 4. いろいろな解き方が考えられるが，ここでは $\mathcal{L}[f'(t)]$ や $\mathcal{L}[f''(t)]$ を駆使して計算しよう。

(1) $\mathcal{L}[\cos^2 t]=\dfrac{\mathcal{L}[-2\cos t\sin t]+1}{s}=\dfrac{\mathcal{L}[-\sin 2t]+1}{s}=\dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$

(2) $\mathcal{L}[(t\sin\omega t)'']=s^2\mathcal{L}[t\sin\omega t]-s\cdot 0-0=2\omega\mathcal{L}[\cos\omega t]-\omega^2\mathcal{L}[t\sin\omega t]$ より、
$\mathcal{L}[t\sin\omega t]=\dfrac{2\omega}{s^2+\omega^2}\mathcal{L}[\cos\omega t]=\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$

(3) (2) より、$\mathcal{L}[(t\cos\omega t)']=\mathcal{L}[\cos\omega t]-\omega\mathcal{L}[t\sin\omega t]=\dfrac{s(s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2}$ なので、
$\mathcal{L}[t\cos\omega t]=\dfrac{\mathcal{L}[(t\cos\omega t)']+0}{s}=\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}.$

(4) $F_4(s)=\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t]$, $F_5(s)=\mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t]$ とおくと、
$\mathcal{L}[(e^{at}\sin\omega t)']=aF_4(s)+\omega F_5(s)=sF_4(s)-0.\ \therefore\ (s-a)F_4-\omega F_5=0.$

(5) (4) の F_4, F_5 を使うと、$\mathcal{L}[(e^{at}\cos\omega t)']=aF_5(s)-\omega F_4(s)=sF_4(s)-1.$
よって、$\omega F_4+(s-a)F_5(s)=1.$

(4)(5) F_4, F_5 は一緒に解くことができる：

$$\begin{pmatrix} s-a & -\omega \\ \omega & s-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_4 \\ F_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ を解いて、$$\begin{pmatrix} F_4 \\ F_5 \end{pmatrix}=\frac{1}{(s-a)^2+\omega^2}\begin{pmatrix} \omega \\ s-a \end{pmatrix}.$$

(6) $F_6(s)=\mathcal{L}[te^{at}]$ とおくと、$\mathcal{L}[(te^{at})']=\mathcal{L}[e^{at}+ate^{at}]=\dfrac{1}{s-a}+aF_6(s).$
よって、$F_6(s)=\dfrac{\mathcal{L}[(te^{at})']+0}{s}=\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{1}{s-a}+aF_6(s)\right)$ を解いて、$F_6(s)=\dfrac{1}{(s-a)^2}.$

注 (1). 以下のようにも解くことが出来る。
別解 1) $\mathcal{L}[\cos^2 t] = \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[\sin^2 t]$ と変形し，$\mathcal{L}[\sin^2 t]$ の結果（解答 1.(7)）を用いて解く。
別解 2) $\cos^2 t = (\cos 2t + 1)/2$ を用いる（解答 1.(6) 参照)。
注 (2)(3). 実は,

$$\mathcal{L}[t \sin \omega t] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin \omega t], \quad \mathcal{L}[t \cos \omega t] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos \omega t]$$

となっている。問題 6.(1)(2) 参照。
注 (4)(5). 以下の解き方の方が効率的かな。
別解 1) $\mathcal{L}[e^{at}e^{i\omega t}] = \mathcal{L}[e^{(a+i\omega)t}]$ の実部と虚部を考える。こちらの方が断然早い。
別解 2) 実は,

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t](s) = \mathcal{L}[\sin \omega t](s-a), \quad \mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t](s) = \mathcal{L}[\cos \omega t](s-a)$$

が成り立つ（問題 2.(7) と同類)。問題 8.(2)(3) 参照。

解答 5. 与えられた微分方程式の両辺をラプラス変換する。簡単のため，$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおく。

(1) $\mathcal{L}[y''(t)] + \omega^2 \mathcal{L}[y(t)]$
$= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + \omega^2 Y(s) = (s^2+\omega^2)Y(s) - y_0 s - v_0 = 0.$
$\therefore Y(s) = \dfrac{y_0 s + v_0}{s^2+\omega^2} = y_0 \dfrac{s}{s^2+\omega^2} + \dfrac{v_0}{\omega}\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}.$
$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y_0 \cos \omega t + \dfrac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$

(2) $\mathcal{L}[y''(t)] - (\alpha+\beta)\mathcal{L}[y'(t)] + \alpha\beta \mathcal{L}[y(t)]$
$= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - (\alpha+\beta)sY(s) + (\alpha+\beta)y(0) + \alpha\beta Y(s)$
$= (s^2 - (\alpha+\beta)s + \alpha\beta)Y(s) - y_0 s - v_0 + (\alpha+\beta)y_0 = 0.$
$\therefore Y(s) = \dfrac{y_0 s + v_0 - (\alpha+\beta)y_0}{(s-\alpha)(s-\beta)} = \dfrac{c_1}{s-\alpha} + \dfrac{c_2}{s-\beta}.$
ここで、$c_1 = \dfrac{v_0 - \beta y_0}{\alpha - \beta}$, $c_2 = \dfrac{\alpha y_0 - v_0}{\alpha-\beta}$.
$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t}.$

(3) $\mathcal{L}[y''(t)] - 2\alpha \mathcal{L}[y'(t)] + \alpha^2 \mathcal{L}[y(t)]$
$= (s^2 - 2\alpha s + \alpha^2)Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\alpha y(0)$
$= (s-\alpha)^2 Y(s) - sy_0 + 2\alpha y_0 - v_0 = 0.$
$\therefore Y(s) = \dfrac{y_0 s - 2\alpha y_0 + v_0}{(s-\alpha)^2} = \dfrac{c_1}{s-\alpha} + \dfrac{c_2}{(s-\alpha)^2}.$
ここで、$c_1 = y_0$, $c_2 = v_0 - \alpha y_0$.
$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = (c_1 + c_2 t)e^{\alpha t}.$

(4) $\mathcal{L}[y''(t)] - 2\alpha \mathcal{L}[y'(t)] + (\alpha^2+\beta^2)\mathcal{L}[y(t)]$
$= (s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2)Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\alpha y(0)$
$= ((s-\alpha)^2 + \beta^2)Y(s) - sy_0 + 2\alpha y_0 - v_0 = 0.$
$\therefore Y(s) = \dfrac{y_0 s - 2\alpha y_0 + v_0}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \dfrac{c_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \dfrac{c_2 \beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}.$
ここで、$c_1 = y_0$, $c_2 = \dfrac{v_0 - \alpha y_0}{\beta}$.
$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t).$

(5) $\mathcal{L}[y'''(t)] - 3\mathcal{L}[y''(t)] + 3\mathcal{L}[y'(t)] - \mathcal{L}[y(t)]$

$= (s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0) + 3(sy(0) + y'(0)) - 3y(0)$

$= (s-1)^3 Y(s) = \mathcal{L}[e^t] = \dfrac{1}{s-1}.$

$\therefore Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^4} = \dfrac{1}{3!}\dfrac{3!}{(s-1)^4}.$

$\therefore y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \dfrac{1}{6}e^t t^3.$

注 (3). 問題 4.(6) の結果を使いました。

注 (4). 解答 2.(7) の解説と問題 9. を参照。

注 (5). 最後の逆変換のところは問題として少し勇み足でした。問題 8.(1) をみて下さい。スッキリします。

注. 例えば、微分方程式

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) \qquad \cdots\cdots (*)$$

に対するラプラス変換は，$\dfrac{d^m}{dt^m}$ を s^m に機械的に置き換えて，それを $Y(s)$ でまとめ，

$$(s^2 + as + b)Y(s) + (\text{初期データ}) = \mathcal{L}[f(t)](s) \qquad \cdots\cdots (**)$$

という構造をなしている。

注 (演算子法との比較). 演算子法で $(*)$ を解く場合は，通常，次の 3 段階の手順を踏む。

（第 1 段）微分演算子を $D = \dfrac{d}{dt}$ とおいて，斉次方程式

$$(D^2 + aD + b)y(t) = 0$$

の一般解 $y_0(t)$ を求める。

（第 2 段）何らかの方法で $(*)$ の特殊解 $y_*(t)$ を求める。

（第 3 段）これより $(*)$ の一般解は $y_0(t) + y_*(t)$ であるから，あとは初期データを満たす様に $y_0(t) + y_*(t)$ の係数を決定する。

注 (ラプラス変換法の利点). ラプラス変換法の作業過程は演算子法と比べると随分と異なる。例えば $(*)$ を解く場合，次の 3 段階の手順を踏む。

（第 1 段）ラプラス変換して変数 s の方程式 $(**)$ を導く。

（第 2 段）$(**)$ 式を解いて，解 $Y(s)$ を求める。

（第 3 段）$Y(s)$ を逆変換する。

大部ちがいますね。演算子法はすぐ上の注で見たように，はじめに y_0，次に y_* と解が順次構成されていく様子が見てとれるが、ラプラス変換法では、逆変換を完了するまで解の形が見えにくい。これはラプラス変換法の特徴である。しかし、微分方程式の一般解を導出する際に必要な一般的な予備知識は必要なく、機械的な操作のみで解を導くことができるのは利点といえるだろう。そして、$(**)$ 式の解 $Y(s)$ に初期データを満たす解の情報が全て含まれていて、逆変換という蓋を開けると、一挙にその解が出現する仕組みになっている。

解答 6. 変換の微分を用いる練習問題。

(1) $\mathcal{L}[t\sin\omega t] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin\omega t] = -\dfrac{d}{ds}\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} = \dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$

(2) $\mathcal{L}[t\cos\omega t] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos\omega t] = -\dfrac{d}{ds}\dfrac{s}{s^2+\omega^2} = \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}.$

(3) $\mathcal{L}[t^n] = \left(-\dfrac{d}{ds}\right)^n \mathcal{L}[1] = (-1)^n\left(\dfrac{d}{ds}\right)^n \dfrac{1}{s} = (-1)^n(-1)^n\dfrac{n!}{s^{n+1}} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}.$

(4) $\mathcal{L}[t\cosh at] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[\cosh at] = -\dfrac{d}{ds}\dfrac{s}{s^2-a^2} = \dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}.$

(5) $\mathcal{L}[t\sinh at] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[\sinh at] = -\dfrac{d}{ds}\dfrac{a}{s^2-a^2} = \dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}.$

(6) $\mathcal{L}[t^2e^t] = \left(-\dfrac{d}{ds}\right)^2 \mathcal{L}[e^t] = \left(\dfrac{d}{ds}\right)^2 \dfrac{1}{s-1} = \dfrac{2}{(s-1)^3}.$

注 (1)(2). 解答 4.(2)(3) と比較せよ。

注 (6). 後述の問題 8.(1) を参照してほしい。

解答 7. (1) は式変形と問題 6.(2) の、(2) は問題 6.(1) の、(3) は (1) と問題 6.(2) の結果をそれぞれ用いて計算する。(4)(5) は、$-\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[tf(t)]$, すなわち、

$$f(t) = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]\right]$$

を用いる。

(1) $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2} = \dfrac{s^2+\omega^2-(s^2-\omega^2)}{2\omega^2(s^2+\omega^2)^2} = \dfrac{1}{2\omega^2}\left(\dfrac{1}{s^2+\omega^2} - \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right)$

と式変形して，問題 6.(2) の結果を用いて、以下のように算出する。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right]\right)$$
$$= \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega} - t\cos\omega t\right) = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t).$$

(2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \dfrac{1}{2\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \dfrac{t}{2\omega}\sin\omega t.$

(3) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right] + \omega^2\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right]$

$$= t\cos\omega t + \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t) = \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t).$$

(4) $-\dfrac{d}{ds}\log\left(1+\dfrac{\omega^2}{s^2}\right) = \dfrac{2}{s} - \dfrac{2s}{s^2+\omega^2}$ より、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\log\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\right] = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{2}{t}(1-\cos\omega t).$$

(5) $-\dfrac{d}{ds}\log\dfrac{s}{s-1} = \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{s}$ より、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\log\frac{s}{s-1}\right] = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{t}(e^t-1).$$

解答 8. s 軸上の移動の技法をたっぷりと用いる。

(1) $\mathcal{L}[t^m e^{at}](s) = \mathcal{L}[t^m](s-a) = \dfrac{m!}{(s-a)^{m+1}}.$

(2) $\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t](s) = \mathcal{L}[\sin\omega t](s-a) = \dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}.$

(3) $\mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t](s) = \mathcal{L}[\cos\omega t](s-a) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}.$

(4) $\mathcal{L}[te^{at}\sin\omega t](s) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t](s) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin\omega t](s-a)$

$$= -\frac{d}{ds}\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} = \frac{2\omega(s-a)}{((s-a)^2+\omega^2)^2}.$$

注 (1). 問題 4.(6)、解答 5.(5)、問題 6.(6) を再確認して下さい。

注 (4). 問題 6.(1) の結果を使えば

$$\mathcal{L}[te^{at}\sin\omega t](s) = \mathcal{L}[t\sin\omega t](s-a) = \frac{2\omega(s-a)}{((s-a)^2+\omega^2)^2}.$$

解答 9. s 軸上の移動の技法を鑑み考察する。

(1) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+2^2}$ とおくと，与式は $F(s+1)$.

$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \cos 2t$ より、$\mathcal{L}^{-1}[F(s+1)] = e^{-t}\cos 2t.$

(2) $F(s) = \dfrac{2}{s^2+2^2}$ とおくと，与式は $F(s+1)$.

$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sin 2t$ より、$\mathcal{L}^{-1}[F(s+1)] = e^{-t}\sin 2t.$

(3) $\dfrac{2s}{s^2+2s+5} = \dfrac{2(s+1)-2}{(s+1)^2+2^2}$ と式変形する。

$F(s) = \dfrac{2s}{s^2+2^2} - \dfrac{2}{s^2+2^2}$ とおくと，与式は $F(s+1)$.

$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\cos 2t - \sin 2t$ より、$\mathcal{L}^{-1}[F(s+1)] = e^{-t}(2\cos 2t - \sin 2t).$

(4) $\dfrac{s-4}{s^2+2s+4} = \dfrac{(s+1)-5}{(s+1)^2+3}$ と式変形する。

$F(s) = \dfrac{s}{s^2+3} - \dfrac{5}{s^2+3}$ とおくと，与式は $F(s+1)$.

$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \cos\sqrt{3}t - \dfrac{5}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$ より、$\mathcal{L}^{-1}[F(s+1)] = e^{-t}\left(\cos\sqrt{3}t - \dfrac{5}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right).$

注 (4). 問題 2.(7) がすっきりと解けましたね。

解答 10. (i) と (ii) のどちらが簡単かは問題による。

(1)(i) $\dfrac{1}{\omega}\mathcal{L}[\sin\omega t] = \dfrac{1}{s^2+\omega^2}$ より、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right] = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}[\sin\omega t]\right] = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau\, d\tau = -\frac{1}{\omega^2}(\cos\omega t - 1).$$

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right] = \dfrac{1}{\omega^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t).$

(2)(i) (1) より、$\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)\right] = \dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$ なので、

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)\right]\right]$$
$$= \frac{1}{\omega^2}\int_0^t (1-\cos\omega\tau)\, d\tau = \frac{1}{\omega^2}(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t) = \frac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin\omega t).$$

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{\omega^2}\left(\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right] = \dfrac{1}{\omega^2}(t - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t) = \dfrac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin\omega t).$

注 (2)(ii). 部分分数展開は以下のように行なっている。

$$\frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+\omega^2}.$$

(ii) の方が (i) より一見楽に見えるが，部分分数展開という（見えない）手間はかかっている。

解答 11. 合成積の定義通りに左辺から右辺を導出すれば良い。

$$
\begin{aligned}
(1)\ (f*g)(t) &= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \\
&\overset{(\star)}{=} \int_t^0 f(r)g(t-r)\,(-dr) \\
&= \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = (g*f)(t).
\end{aligned}
$$

$(\star)$：$r = t-\tau$ $(dr = -d\tau)$ と変数変換

$$
\begin{aligned}
(2)\ (f*(g+h))(t) &= \int_0^t f(t-\tau)(g(\tau)+h(\tau))\,d\tau \\
&= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = (f*g)(t)+(f*h)(t).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\ ((f*g)*h)(t) &= \int_0^t (f*g)(t-\tau)h(\tau)\,d\tau \\
&= \int_0^t \int_0^{t-\tau} f(t-\tau-r)g(r)\,dr\,h(\tau)\,d\tau \qquad \cdots\cdots \text{(i)}
\end{aligned}
$$

一方，$(f*(g*h))(t) = \int_0^t f(t-\tau)(g*h)(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\int_0^\tau g(\tau-r)h(r)\,dr\,d\tau$

$$
= \int_0^t \int_0^\tau f(t-\tau)g(\tau-r)h(r)\,dr\,d\tau \qquad \cdots\cdots \text{(ii)}
$$

である。以下，式 (i) を変形して式 (ii) を導くことを考える。

$$
\begin{aligned}
\text{(i)} &= \int_0^t \left\{ \int_0^{t-\tau} f(t-\tau-r)g(r)\,dr \right\} h(\tau)\,d\tau \\
&\overset{(\bullet)}{=} \int_0^t \int_\tau^t f(t-\rho)g(\rho-\tau)\,d\rho\,h(\tau)\,d\tau \\
&= \int_0^t \int_\tau^t f(t-\rho)g(\rho-\tau)h(\tau)\,d\rho\,d\tau \\
&\overset{(\diamond)}{=} \int_0^t \int_0^\rho f(t-\rho)g(\rho-\tau)h(\tau)\,d\tau\,d\rho \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^t \int_0^{\tau'} f(t-\tau')g(\tau'-r')h(r')\,dr'\,d\tau' \\
&\overset{(\triangleright)}{=} \text{(ii)}
\end{aligned}
$$

$(\bullet)$：$\rho = \tau + r$ $(d\rho = dr)$ と変数変換

$(\diamond)$：ρ の積分と τ の積分の順序交換（ここがミソ！）

$(*)$：$\tau = r', \rho = \tau'$ と変数変換

$(\triangleright)$：$r' = r, \tau' = \tau$ と変数変換

注. $(*)$ $(\triangleright)$ と 2 段階踏んだのはウッカリを避けるため。混乱しない人は $(*)$ の変換で $\tau = r, \rho = \tau$ として良い。

注. (1) を交換法則，(2) を分配法則，(3) を結合法則とよぶ。これらの法則に加え，

$$
(f*0)(t) = (0*f)(t) = 0
$$

も成り立つので，合成積は積と銘打つだけあり，数の乗法，いわゆる積と類似の性質をもっていることがわかる。しかし残念? ながら一般に

$$(1*g)(t) = (g*1)(t) \neq g(t), \quad (f*f)(t) \not\gtrsim 0 \qquad \cdots\cdots(\circ)$$

であり，完全に乗法と同じ性質を有しているわけではない。

問. 式 $(\circ)$ を満たすような関数 $g(t)$ や $f(t)$ の例をあげよ。

解. 例えば、$g(t)=t,\ f(t)=\cos t$ とすると、

$$(1*g)(t) = \int_0^t 1\cdot(t-\tau)\,d\tau = \frac{t^2}{2} \neq g(t).$$

また、

$$(f*f)(t) = \int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$$

であるから、例えば、$t=\pi$ のとき $(f*f)(t)<0$.

解答 12. 合成積 (接合積，たたみ込み，convolution) の変換を用いれば一発である。

(1) $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)u(\tau)\,d\tau = t*u(t)$ より、$\displaystyle\mathcal{L}[t*u(t)] = \mathcal{L}[t]\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s^2}U(s).$

(2) $\displaystyle\int_0^t \sin(t-\tau)u(\tau)\,d\tau = \sin t*u(t)$ より、$\displaystyle\mathcal{L}[\sin t*u(t)] = \mathcal{L}[\sin t]\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s^2+1}U(s).$

(3) $\displaystyle\int_0^t \cos(t-\tau)u(\tau)\,d\tau = \cos t*u(t)$ より、$\displaystyle\mathcal{L}[\cos t*u(t)] = \mathcal{L}[\cos t]\mathcal{L}[u(t)] = \frac{s}{s^2+1}U(s).$

(4) $\displaystyle\int_0^t e^{t-\tau}u(\tau)\,d\tau = e^t*u(t)$ より、$\displaystyle\mathcal{L}[e^t*u(t)] = \mathcal{L}[e^t]\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s-1}U(s).$

解答 13. 小解説の通りに計算する。

(1) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-a)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-a}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[t\right]\mathcal{L}\left[e^{at}\right]\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[t*e^{at}\right]\right]$$
$$= \int_0^t (t-\tau)e^{a\tau}\,d\tau = \frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1).$$

(2) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\cdot\frac{1}{s-a}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[e^{at}\right]\mathcal{L}\left[e^{at}\right]\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[e^{at}*e^{at}\right]\right]$$
$$= \int_0^t e^{a(t-\tau)}e^{a\tau}\,d\tau = te^{at}.$$

注. 問題 4.(6), 解答 5.(3) と比較せよ。

(3) 問題 10.(1) と同じ問題である。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[1\right]\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[1*\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\right] = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau\,d\tau = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t).$$

(4) 問題 10.(2) と同じ問題である。前問 (3) の結果を用いる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[1\right]\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}\right]\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[1*\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}\right]\right] = \frac{1}{\omega^2}\int_0^t (1-\cos\omega\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t).$$

(5) 問題 7.(1) と同じ問題である。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}*\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\right] = \frac{1}{\omega^2}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\sin\omega\tau\,d\tau = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t).$$

注. 積分するとき、加法定理 $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$ を用いた。

(6) 問題 7.(2) と同じ問題である。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right]\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega} * \cos\omega t\right]\right] = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{2\omega}t\sin\omega t.$$

注. 積分するとき、加法定理 $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$ を用いた。

(7) 問題 7.(3) と同じ問題である。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right]\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right]\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\cos\omega t * \cos\omega t\right]\right] = \frac{1}{\omega}\int_0^t \cos\omega(t-\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{2\omega}(\omega t\cos\omega t + \sin\omega t).$$

注. 積分するとき、加法定理 $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$ を用いた。

解答 14. $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおく。各積分方程式の両辺をラプラス変換し、$Y(s)$ について整理し、$Y(s)$ を逆ラプラス変換して解 $y(t)$ を求める。

(1) $Y(s) = \mathcal{L}[t+1] + \mathcal{L}[\sin t * y(t)] = \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[\sin t]Y(s) = \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2+1}Y(s)$ より、

$Y(s) = \dfrac{(s+1)(s^2+1)}{s^4} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{2!}\dfrac{2!}{s^3} + \dfrac{1}{3!}\dfrac{3!}{s^4}.$

よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6}.$

(2) $Y(s) = \mathcal{L}[1] + 2\mathcal{L}[\cos t * y(t)] = \mathcal{L}[1] + 2\mathcal{L}[\cos t]Y(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{2s}{s^2+1}Y(s)$ より、

$Y(s) = \dfrac{s^2+1}{s(s-1)^2} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{(s-1)^2} \qquad \cdots\cdots(\star)$

よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 + 2te^t.$

注. $(\star)$ の第 2 項の逆変換には、問題 4.(6) の結果を使った。もちろん、部分分数展開してもよい。

(3) $Y(s) = \mathcal{L}[1+t] + 2\mathcal{L}[e^t * y(t)] = \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[e^t]Y(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s-1}Y(s)$ より、

$Y(s) = \dfrac{s^2-1}{s^2(s-2)} = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{1}{s^2(s-2)} \qquad \cdots\cdots(\spadesuit)$

よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{2t} - \dfrac{1}{4}(e^{2t} - 2t - 1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{4}e^{2t}.$

注. $(\spadesuit)$ の第 2 項の逆変換には、問題 13.(1) の結果を使った。もちろん、部分分数展開してもよい。

(4) $Y(s) = \mathcal{L}[\sin 2t] + \mathcal{L}[\sin 2t * y(t)] = \mathcal{L}[\sin 2t] + \mathcal{L}[\sin 2t]Y(s)$ より、

$Y(s) = \dfrac{\mathcal{L}[\sin 2t]}{1 - \mathcal{L}[\sin 2t]} = \dfrac{2}{s^2+2} = \sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}^2}.$ よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t.$

(5) $Y(s) = \mathcal{L}[\sin t] + \mathcal{L}[\sin t * y(t)] = \mathcal{L}[\sin t] + \mathcal{L}[\sin t]Y(s)$ より、$Y(s) = \dfrac{\mathcal{L}[\sin t]}{1 - \mathcal{L}[\sin t]} = \dfrac{1}{s^2}.$

よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = t.$

注. 微分して解くこともできる。例えば (1) の場合は、以下のように解ける。

$$y(t) = t + 1 + \sin t\int_0^t \cos\tau\, y(\tau)\, d\tau - \cos t\int_0^t \sin\tau\, y(\tau)\, d\tau \qquad \cdots\cdots(\spadesuit_0)$$

と変形し、両辺を微分すると、

$$y'(t) = 1 + \cos t \int_0^t \cos\tau\, y(\tau)\, d\tau + \sin t \cos t\, y(t) + \sin t \int_0^t \sin\tau\, y(\tau)\, d\tau - \cos t \sin t\, y(t) \qquad \cdots\cdots (\spadesuit_1)$$

$$\therefore\ y''(t) = -\sin t \int_0^t \cos\tau\, y(\tau)\, d\tau + \cos^2 t\, y(t) + \cos t \int_0^t \sin\tau\, y(\tau)\, d\tau + \sin^2 t\, y(t)$$
$$= t + 1 - y(t) + y(t) = t + 1.$$

ここで、$(\spadesuit_0)$ を用いた。よって、$y'(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + C_1$. $\therefore\ y(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2$.

$(\spadesuit_0)$ より $y(0) = 1$, $(\spadesuit_1)$ より $y'(0) = 1$ なので、$C_1 = C_2 = 1$. $\therefore\ y(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$.

解答 15. $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおき、問題 14. と同じ方法で解く。

(1) $sY(s) - y(0) = \mathcal{L}[y(t)] + \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[e^t * y(t)] = Y(s) + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}Y(s)$ と $y(0) = 0$ より、

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2(s-2)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2(s-2)} \qquad \cdots\cdots (\heartsuit)$$

よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = t + \frac{1}{4}(e^{2t} - 2t - 1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t}$.

注. $(\heartsuit)$ の第 2 項の逆変換には、問題 13.(1) の結果を使った。もちろん、部分分数展開してもよい。

(2) $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[t * y(t)] = \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[t]Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}Y(s)$ と初期条件より、

$Y(s) = \frac{1}{s^4 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2+1}\right)$. よって、$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2}(\sinh t - \sin t)$.

解答 16. $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$, $k = \frac{\mu}{2M}$ とおくと、

$$u''(t) + 2ku'(t) + \omega^2 u(t) = 0.$$

両辺をラプラス変換し、$U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ とおくと、

$$s^2U(s) - su_0 - v_0 + 2k(sU(s) - u_0) + \omega^2 U(s) = (s^2 + 2ks + \omega^2)U(s) - su_0 - v_0 - 2ku_0 = 0.$$

$$\therefore\ U(s) = \frac{su_0 + v_0 + 2ku_0}{s^2 + 2ks + \omega^2} \qquad \cdots\cdots (\heartsuit).$$

よって 分母 $= 0$ の根は、$-k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$ であるので、以下の 3 つの場合に分けられる。

場合 1($k > \omega$). 異なる 2 実根を $\alpha = -(k - \sqrt{k^2 - \omega^2}) > \beta = -(k + \sqrt{k^2 - \omega^2})$ とすれば、問題 5.(2) に相当するので、解は $u(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t}$. ここで、

$$c_1 = \frac{v_0 + (k + \sqrt{k^2 - \omega^2})u_0}{2\sqrt{k^2 - \omega^2}}, \quad c_2 = -\frac{v_0 + (k - \sqrt{k^2 - \omega^2})u_0}{2\sqrt{k^2 - \omega^2}}.$$

よって、$\beta < \alpha < 0$ であるので、摩擦が大きい場合（$\mu^2 > 4KM \ \Leftrightarrow\ k > \omega$）、物体は振動することなく、指数的につりあいの位置（$u = 0$）に近付く。これを**超過減衰**と呼ぶ。

場合 2($k = \omega$). 重根を $\alpha = -k$ とすれば、問題 5.(3) に相当するので、解は $u(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\alpha t}$. ここで、

$$c_1 = u_0, \quad c_2 = v_0 + ku_0.$$

よって、$\alpha < 0$ であるので、摩擦係数 μ の 2 乗がバネ定数 K と比例している場合（$\mu^2 = 4KM \ \Leftrightarrow\ k = \omega$）も、物体は振動することなく、指数的につりあいの位置（$u = 0$）に近付く。また、$c_1c_2 < 0$ のときのみ、運動の途中で高々1 回つりあいの位置を横切る。これを**臨界減衰**と呼ぶ。

場合 2($k < \omega$). 共役複素根を $\alpha \pm i\beta$ ($\alpha = -k, \beta = \sqrt{\omega^2 - k^2}$) とすれば、問題 5.(4) に相当するので、解は $u(t) = (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) e^{\alpha t}$. ここで、

$$c_1 = u_0, \quad c_2 = \frac{v_0 + k u_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}.$$

よって、$\alpha < 0$ であるので、摩擦が小さい場合（$\mu^2 < 4KM \ \Leftrightarrow\ k < \omega$)、物体は振動しつづけるが、振幅は指数的に小さくなり、最終的にはつりあいの位置（$u = 0$）に近付いていく。これを**過少減衰**（**減衰振動**）と呼ぶ。摩擦を小さくしていった場合、すなわち $\mu \to 0$ のとき、$k \to 0$ であるから、$\alpha \to 0,\ \beta \to \omega$ で、物体の運動は単振動（調和振動）の運動（解：$c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$）に近付いていく。