John Napier の対数 - 忘れラレない数学

M Yasuda

Chiba University

2009/Nov

数学の悪夢　そしてその目覚め

生活様式は計算の発展とともに：
★現代は comupter の時代であろう。日常生活、また研究の遂行など欠くことのできない数学道具である。すべての環境がデジタル化、コンピュータ処理に依存してきている。インターネットの普及にも欠くことのできない支えとなった。
量子コンピュータ は、量子力学的な重ね合わせを用いて並列性を実現する次世代のコンピュータ。2009 年現在、実用的なレベルでのハードウェアの実現には至っていない。
★ 1970 年代：理学部、教養部の計算機
電卓（ＹＨＰ３５）、パソコン（ＡｐｐｌｅＩＩ）、デジタル計算機（ＯＫＩＴＡＣ、ＨＩＴＡＣ）、

なつかしい計算器、計算機

Primeval

★アナログ計算器：
指折り計算、数表 (バーローの本)、そろばん (二一天作の五)、計算尺（逸見ヘンミ）、機械式計算器 (タイガー)、
★古代の数学：
中国、インド、エジプト、バビロニアの数学計算；天文学、地理学、経済学

バビロニアの計算

古代バビロニア（４０００年前、チグリス・ユーフラテス川の流域）では
積の計算（arithmetic）に対して、より簡単な 2 乗数の数表をもちいた和の計算 (geometric) から算出した。

$$ab = \frac{1}{4}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\}$$

60 進数 (sexagesimal fraction) による計算

- 三角表（正弦の値、12 桁）
- 1 から 59 までの 2 乗の数表: "[2, 27] squared is [6, 0, 9]" つまり

$(147 = [2, 27] \qquad 21609 = [6, 0, 9])$

- 逆数の計算表、たとえば

$$\frac{1}{27} = [0; 2, 13, 20] = \frac{2}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{20}{60^3}$$

- ３次方程式の解法

$$ax^3 + bx^2 = c$$

- ピタゴラスの定理 (Yale tablet 刻板)

$$\sqrt{2} = 1.414213562 \approx [1; 24, 51, 10] = 1.14212963$$

などが有名。「なぜ 60 進か？　60 という数はわれわれの手、足には表れているのだろうか」

球面三角法や航海術

- 三角法における積の計算を和で求める：Francois Vièta(1540-1603)

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}$$

- 指数の計算：ab は geomeric, 一方 $\alpha + \beta$ は arithmetic。

$$a = r^{\alpha}, b = r^{\beta} \quad \Rightarrow \quad ab = r^{\alpha+\beta}$$

エヴァリスト・ガロア（Èvariste Galois, 1811 年 10 月 25 日 - 1832 年 5 月 31 日）がポリテクニックの入試で怒って投げ出したとも言われている。
明らかに一見するだけでは、実用的にはならないが、後で考えるネイピア対数の計算にはこの geomeric の計算を arithmetic にするところが対数計算の本質と考えられる。

Logarithmic Cradle

The use of this book is quite large, my dear friend,
No matter how modest it looks,
You study it carefully and find that it gives
As much as a thousand big books.

John Napier(1550-1617)

Jurian Havil, "Gamma — exploring euler's constant"(2003, Princeton UP) by Freeman Dyson(forward)

ジョン・ネイピアは

ジョン・ネイピア（John Napier, 1550 年 - 1617 年 4 月 4 日）はスコットランドのバロン（首都エディンバラの南西に位置）生れ。ここは、現在のネイピア大学の敷地内である。
数学者、物理学者、天文学者、占星術師としても知られ、熱心なプロテスタントである。幅広い事に興味を持って研究した人物で、特に、対数の発見者として知られる。（Wikipedia からの参照、以下同様）

ジョン・ネイピアの肖像画

（John Napier, 1550 年 - 1617 年 4 月 4 日）

ジョン・ネイピアの生涯

1563 年 (13 歳) にネイピアが聖アンドリューズ大学に入学した直後、母親のジャネットが亡くなった。この後、大学を中退したネイピアは、フランスをはじめ、諸外国を遍歴したらしいが詳しいことは分かっていない。
1571 年頃 (21 歳) にネイピアは故郷に戻り、父のアーチボルド再婚。翌年、エリザベス・スターリング (Elizabeth Stirling) と結婚、2 人の子供ができる。1579 年 (29 歳) にエリザベスは亡くなり、アグネス・チザムと再婚する。アグネスとの間には 10 人の子供を得る。
1593 年 (43 歳) に『A Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John』（ヨハネの黙示録の真相）を出版し、カトリック教会を激しく批判した。

４４歳のとき対数の発見

1594 年 (44 歳) に対数の概念を発見し、以後 20 年に渡り、対数表の作成に従事する。
1608 年 (58 歳)、父のアーチボルドが亡くなったため、マーキストン城の八代目の城主となる。
1614 年 (64 歳)、対数表を完成させ、ラテン語の論文『 Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio 』（素晴らしい対数表の使い方）で発表する。この論文は、1616 年にエドワード・ライト (Edward Wright) による英語訳が出版されている。

対数の確立

1615 年の夏 (65 歳) には、ロンドンのグレシャム大学の幾何学の教授だったヘンリー・ブリッグスがエディンバラまでネイピアを訪ね、一月ほど滞在し、対数について議論を行った。翌年も、ブリッグスはネイピアの元を訪れている、さらにその次の年も、ブリッグスはネイピアに会う予定だったが。
1617 年 67 歳で死去
1617 年 4 月 4 日にジョン・ネイピアが死去、自分の城で息を引き取ったため会うことはできなかった。これまで、二人の間の議論で、対数の用途について様々な角度から検討がなされ、ブリッグスの提案から常用対数や底の概念などが生まれ、対数が現代の用法に近い形で確立されたという。

対数表の作成

1619 年、息子の一人、ロバート・ネイピア (Robert Napier) によって遺稿『Mirifici logarithmorum canonis constructio』（素晴らしい対数表の作成方法）が出版された。ネイピアの対数では、できるだけ小数を避けて、対数表が作成されていたが、この遺稿では、ブリッグスの影響かどうかはわからないが、小数を容認する方向へと進み、小数の表現方法として小数点の使用を提案し、この発明も世界中に広まることになった。

対数の概念など

ネイピアの数ある発明の中で、後世に特に大きな影響を与えたものは、

- 対数、
- ネイピアの骨（2 数の表による簡便的な積の計算法）、
- ネイピア・サークル（球面三角法の辺と角の対応関係式）

である。いずれも科学で必要な計算を少しでも簡単にしようとして生み出された計算のための技術であり、他の人々の手によって形が変えられているものの、現代の科学技術の礎ともなっている。また、小数点の発案者でもある。

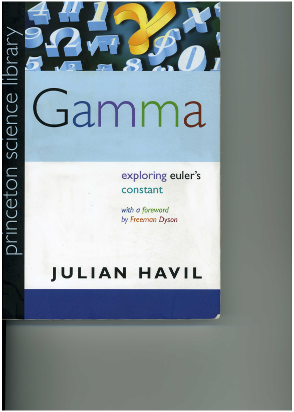
対数の概念は同じく

対数に関する概念は、ジョン・ネイピアとは独立にビュルギも発見した。

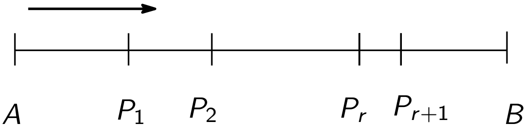
ヨスト・ビュルギ（Jost Bürgi または Joost Bürgi または Jobst Bürgi、1558 年 2 月 28 日 - 1632 年 1 月 31 日）はスイス（ザンクトガーレン）生まれの時計職人、天文機器製作者。

1579 年から 1604 年の間ドイツのカッセルで活躍した。時計や観測機器の製作で評価を得た。天文学の観測に、ゲオルク・プールバッハの三角関数表を用い、1588 年に対数を用いて計算を行った。（対数の発見者はより早く対数について発表したジョン・ネイピアの業績とされる）1604 年から 1630 年の間はルドルフ 2 世にプラハに招かれ、ヨハネス・ケプラー(ドイツの天文学者。天体の運行法則に関する「ケプラーの法則」を唱えた) の計算係を務めた。1631 年にカッセルに戻りカッセルで没した。

Ｈａｖｉｌの本から


princeton science library
Gamma
exploring euler's constant
with a foreword by Freeman Dyson
JULIAN HAVIL

対数を考える (1/5)



仮定 1 :

(1) A を出発して B へ向かう。時間間隔を t とする。

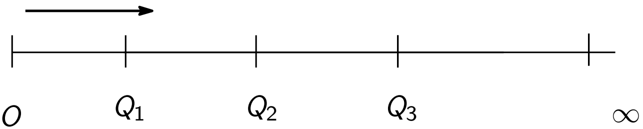
(2) 距離 $BP_r : BP_{r+1} = k$ を一定 (geometric 的に変化)

したがって点 P_r での速度 V_r とするとき、

$V_r : V_{r+1} = BP_r : BP_{r+1}$ を得る。なぜなら $P_r P_{r+1} = V_r \times t$,

$r = 1, 2, \cdots$ より $V_{r+1} = \dfrac{1}{t}(1-k)BP_{r+1}$

対数を考える (2/5)



仮定２：

(3) 距離（半径）$AB = 10^7$, 初期速度 $V_0 = 10^7$, 終端では $V_\infty = 0(impossibletoachieve)$

(4) 距離 OQ を一定スピード $V = 10^7$ で一定時間間隔で位置する座標とする。つまり、A を出発して一定時間後 P_1 に到達したとき、もう一つは等しい時間後に Q_1 にいる。同様に減速していく,AP_r に対して、一定（初期）スピードで進む OQ_r を対応させる。

$$OQ_r = \mathrm{NapLog}(\mathrm{BP_r}), \quad \mathrm{r} = 1, 2, 3, \cdots$$

と定める。

対数を考える (3/5)

このように定めれば

i. $BP_1 = 10^7 - AP_1 = 10^7(1-t)$, $OQ_1 = 10^7$
$\therefore \mathrm{NapLog}\{10^7(1-t)\} = 10^7 t$

ii. $BP_2 = 10^7(1-t)^2$
$\because V_1 : V_0 = BP_1 : BA = V_1 : 10^7 = BP_1 : 10^7$,
$V_1 = BP_1 = 10^7(1-t)$,

$$\begin{aligned} BP_2 &= 10^7 - AP_2 = 10^7 - (AP_1 + AP_2) \\ &= 10^7 - 10^7 t - V_1 t \\ &= 10^7 - 10^7 t - 10^7 t(1-t) \\ &= 10^7(1-t)^2 \end{aligned}$$

$OQ_2 = 10^7 \times 2t = 2 \cdot 10^7 t \therefore \mathrm{NapLog}\{10^7(1-t)^2\} = 2 \cdot 10^7 t$

iii. $r = 1, 2, \cdots$ に対し、$\mathrm{NapLog}\{10^7(1-t)^r\} = r \cdot 10^7 t$

対数を考える (4/5)

Theorem 2.1

If $t = \dfrac{1}{10^7}$, *then*

$$NapLog\{10^7(1 - \frac{1}{10^7})^r\} = r, \quad r = 1, 2, \cdots$$

数値例

$$\begin{aligned}
10^7 \times (1 - \frac{1}{10^7})^1 &= 9,999,999.00000 \\
10^7 \times (1 - \frac{1}{10^7})^2 &= 9,999,998.00000 \\
10^7 \times (1 - \frac{1}{10^7})^3 &= 9,999,997.00000 \\
10^7 \times (1 - \frac{1}{10^7})^4 &= 9,999,996.00000
\end{aligned}$$

対数を考える (5/5)

さらに続けていくと、

$$
\begin{array}{lcr}
\cdots & & \cdots \\
10^7 \times (1 - \frac{1}{10^7})^{99} & = & 9,999,901.00049 \\
10^7 \times (1 - \frac{1}{10^7})^{100} & = & 9,999,900.00049 \\
\cdots & & \cdots \\
10^7 \times (1 - \frac{1}{10^7})^{149} & = & 9,999,901.00110 \\
10^7 \times (1 - \frac{1}{10^7})^{150} & = & 9,999,850.00112
\end{array}
$$

対数の性質

性質 もし $N_i = 10^7\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^{L_i}, i=1,2$ とおけば、

(1) $\sqrt{N_1 \times N_2} = 10^7(1-\dfrac{1}{10^7})^{(L_1+L_2)/2}$

$\because \mathrm{NapLog}(\sqrt{N_1 \times N_2}) = (L_1+L_2)/2$

(2) $N_1 : N_2 = N_3 : N_4 \quad \Rightarrow$

$$\mathrm{NapLog}(N_1) - \mathrm{NapLog}(N_2) = \mathrm{NapLog}(N_3) - \mathrm{NapLog}(N_4)$$

(3) $\mathrm{NapLog}(\dfrac{N_1 \times N_2}{10^7}) = \mathrm{NapLog}(N_1) + \mathrm{NapLog}(N_2)$

$$\because N_1 \times N_2 = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{L_1} \times 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{L_2},$$

$$\frac{N_1 \times N_2}{10^7} = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{L_1+L_2}$$

天文学の計算 (ケプラーの法則)

Kepler

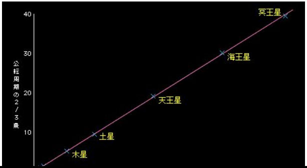
ヨハネス・ケプラー（1571-1630）は、ティコ・ブラーエの下で天体観測にあたり、膨大かつ正確なデータを利用することができ、それらのデータを用いて天体の運動の法則化に向かっていった。ケプラーの第１法則として、「惑星の軌道は楕円」であり、太陽はその焦点のひとつである（楕円軌道則）。次に第２法則として、惑星と太陽とを結ぶ動径によって描かれる扇型の面積は、時間に比例する（面積速度一定則）。

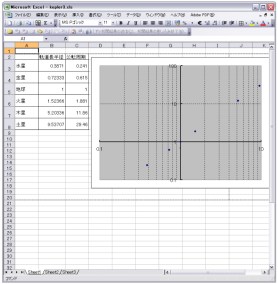
ケプラー (続き)

『世界の調和論』は 1619 年に出版され、その中で、第３法則として、惑星の周期の２乗は、その楕円軌道の長半径の３乗に比例する。
これら３法則は、それぞれ単独に天体における「経験則」として発見された。ケプラーの成果を簡潔に表現すれば、３法則の発見、 自然の諸運動の数式化であるといえよう。惑星の運動は円ではなく、楕円であるということを発見するには、凄まじいほどの計算をやったと言われている。これらはやがて、ニュートンに大きな影響を与えることになった。

対数目盛り（惑星の軌道)

左の図はＷＥＢから引用した（第３法則の視覚化）。表計算ソフトでデータを入力してプロットすると、各惑星の軌道（楕円）長半径と公転周期と両対数グラフ目盛りの図。





オイラー登場

Euler

レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler, 1707 年 4 月 15 日 - 1783 年 9 月 18 日）は数学者・物理学者であり、天文学者（天体物理学者）である。18 世紀最大・最高の数学者である。スイスのバーゼルに生まれ、現在のロシアのサンクトペテルブルクにて死去した。スイスの第 6 次紙幣の 10 フラン紙幣（1980 年〜2000 年）にある肖像。

オイラー (続き)

名前付けられた命題等：
オイラー図、オイラー数、オイラー積分、オイラー線、オイラーの公式、オイラーの等式、オイラーの五角数定理、オイラーの定数、オイラーの定理 (数論)、オイラーのφ関数、オイラー標数、オイラーの分割恒等式、オイラー法、オイラー予想及びオイラー路の発見など。
数列の極限：

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1),$$

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

(文献：Introductio in Analysin Infinitorum(1748))

オイラー(続き)

名前付けられた命題等：
オイラー図、オイラー数、オイラー積分、オイラー線、オイラーの公式、オイラーの等式、オイラーの五角数定理、オイラーの定数、オイラーの定理 (数論)、オイラーの ϕ 関数、オイラー標数、オイラーの分割恒等式、オイラー法、オイラー予想及びオイラー路の発見など。
数列の極限：

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1),$$

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

(文献：Introductio in Analysin Infinitorum(1748))

オイラー(続き)

解析学（無限小解析）においては膨大な業績があり、微分積分の創始以来もっとものこの分野の技法的な完成に寄与した。整数論において、ラグランジュの出現まではほとんど一人で研究し続け、二次形式や原始根、フェルマーの小定理の拡張など、広大な結果を残した。幾何学においては、位相幾何学の嚆矢となったオイラーの多面体定理（ただしオイラーは証明を与えていない）や「ケーニヒスベルクの橋の問題」が有名である。物理学では、ニュートン力学の幾何学的表現を解析学的に修正して、現代的なスタイルに表現した。歴史上最も多産な数学者のひとり。

ネピアの対数を自然対数で書くと

最初に挙げた動点の移動において、$PB = x, OQ = y$ とすれば、移動速度が一定の値で減速するから、

$$\frac{dx}{dt} = -x, \frac{dy}{dt} = 10^7$$

で与えられている。
初期条件 $t = 0, x = 10^7, y = 0$ となっているから、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{10^7}{x}$$

を解いて、$y = -10^7 \ln x + c$. 初期条件を代入して $0 = -10^7 \ln + c$ より、

$$y = -10^7 \ln x + 10^7 \ln 10^7 = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}, \frac{y}{10^7} = \ln \frac{10^7}{x}$$

ネピアの対数を自然対数で書くと

Theorem 5.1

結論は

$$\frac{y}{10^7} = ln\frac{10^7}{x},$$

いいかえると

$$\frac{y}{10^7} = \log_{1/e} \frac{x}{10^7}$$

あるいは

$$NapLogx = \log_{1/e} x$$

という関係を定める。

ネピアの対数を自然対数で書くと

Theorem 5.1

結論は

$$\frac{y}{10^7} = ln\frac{10^7}{x},$$

いいかえると

$$\frac{y}{10^7} = \log_{1/e} \frac{x}{10^7}$$

あるいは

$$NapLogx = \log_{1/e} x$$

という関係を定める。