

パズルと数学

? K.Tanahashi
K. Tanahashi
Tanahashi K.
2009-03-26 10:23:27

パズルで学ぶ数学， 数学で解くパズル

小中高のゆとりある教育とかで，数学の時間が大幅に減りました。また，大学の入学定員は増えているのに，18歳人口は減少しており，有名大学さえ望まなければ，誰もが大学へ進学できるようになりました。そのためか，高等学校の数学をすっかり忘れてしまった学生や，数学が嫌いという大学生が少なくありません。

そういった学生に，数学を無理やり教えても，よけいに数学嫌いを増やすだけでしょう。自ら進んで勉強しなければ，なかなか身につけません。文部科学省も，自ら進んで学ぶ態度を養うことを教育目標の一つにあげています。

それにはどうしたらよいか。まずは，数学に興味を抱いてもらうことが第一だろうと思います。

パズルならば，嫌いな人はまずいないでしょう。パズルに取り組んでいるうちに，背後にある数学を勉強できるようにしたいと思い，本書を編集しました。

数学を学ぶのが目的ですから，単にクイズ的なものはここでは取り扱いません。たとえば，マッチ棒6本で正三角形を4個作りなさい。などというのも，一応はパズルでしょうが，ここでは除外しております。

Webへ載せるのには，HTML+gifとすべきかも知れないけれど，元の原稿は $\text{\TeX}$ で書いた関係上，手間を省くため，dvipdfmによりpdf文書にしました。手抜きをお詫びします。^_^;

問題には☆印の数で難易度を表しました。

☆ 易しい問題

☆☆ 標準的と思われる問題

☆☆☆ 難問

です。

なお，☆印のない問題は，たいていその後に解説があり，そこで解答が示されているものです。

その他の問題については，出典が書いてありますので，答を知りたいときは，それらの本を見られるとよいでしょう。

参考文献が既に販売されておらず，図書館でも見つからなかったという人はe-mailにてお問い合わせください。

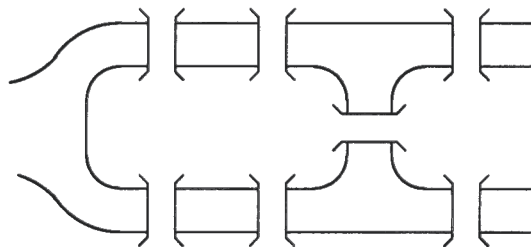
参考文献

- [AU] 秋山 仁, 占部 正承 初等離散数学 森北出版
- [Be] ベレルマン 著 金沢養 訳 イワンの数学パズル 白揚社, 1959
- [Bo] Brian Bolt 著 木村良夫訳 数学パズル・パンドラの箱 講談社, 1994
- [De] H.Dörrie 著 根上生也訳 数学 100 の勝利 Vol.1 数と関数の問題
シュプリンガーフェアラーク東京, 1996
- [DSI] ドミトリ・フォミーン, セルゲイ・ゲンキン, イリヤ・イテンベルク
著 志賀浩二, 田中紀子訳 数学のひろば , 岩波書店, 1998
- [FT] 藤村幸三郎, 田村三郎 数学歴史パズル 講談社, 1985
- [Hi] 一松信 石とりゲームの数理 森北出版, 1968
- [Ki] 木村良夫 数学パズルで遊ぼう 日本評論社, 1997
- [Ko] 小島寛之 数学オリンピック問題にみる現代数学 講談社
- [La] Loren C. Larson 著 秋山仁, 飯田博和訳
数学発想ゼミナール 1, 2 Springer Verlag 東京
- [Na] 中村義作 数学パズル・20 の解法 講談社 BLUE BACKS, 1991
- [Ne] Donald J. Newman 著 一松 信 訳
数学問題ゼミナール Springer Verlag 東京
- [Oo] 大村 平 数理パズルのはなし 日科技連, 1998
- [Po] G.Polya 著 柴垣 和三雄訳
帰納と類比 第3版 丸善, 1970
- [Ue] 上野富美夫 数学パズル事典 東京堂出版, 2000

第1章 グラフ

1.1 ケーニヒスベルクの橋渡し

ケーニヒスベルクは、現在はロシア領で、カリーニングラードと呼ばれています。ドイツの哲学者カントが住んでいた所として有名です。18世紀の初め頃、ケーニヒスベルクの町を1本の川が流れており、その川には2つの島の島がありました。

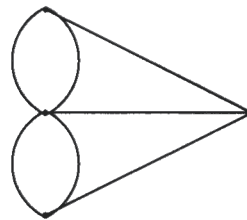


そして図のように、7つの橋がかかっていました。この7つの橋をどれも、ちょうど1回ずつ渡って、出発点へ戻ってくるような散歩のコースがあるか？というのが、町の話題になっていました。

この面白い問題に多くの人が挑戦したのですが、誰も成功しませんでした。もちろん、実際に散歩を試みなくとも、地図の上で線を引いてみればよいので、何回でも試みることはできます。

1736年に、オイラー (L.Euler) が、この問題に明快な解答を与えました。彼はこの問題を 一筆書き の問題としてとらえました。

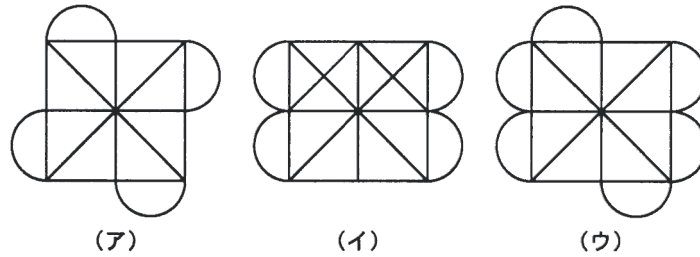
この問題は、川や橋などは問題の本質ではなく、すべての端を線で示し、陸地を点で示せば、右図のような図形ができますが、橋を1回ずつ渡って、もとの場所へ戻ってくるという問題は、右図が一筆で書け、しかも始点と終点が一致しているということに他ならないというわけです。



一筆で書けるグラフを オイラー経路、それが閉路となっていたとき オイラー閉路 といいます。

実際に試してみれば分かるように、右図の一筆書きは不可能です。では、どこかにもう1本線をたせば(橋をかければ)一筆書きは可能でしょうか？

問 1 下図の(ア),(イ),(ウ)のグラフはそれぞれ一筆で描けるでしょうか? (☆)



問 2 一般に, どのようなグラフが一筆で書けるのでしょうか. (☆☆)

問 3 一般に, グラフの点(の数)と線(の数)の間にはどんな関係がありますか? (☆☆☆)

1.2 ハミルトン閉路

ナイトの周遊 チェスのナイトは, 将棋の桂馬の動きを四方へ拡張した動きをします. この動きを利用したパズルが数多くあります.

問 4 ナイトを図の B のマスに置き, すべてのマスを一度ずつ通って, K のマスまで動かしてください. ([Na] 問題 41 ☆☆)

A	D	G	J
B	E	H	K
C	F	I	L

この問題のように, すべての点を一度ずつ通るグラフを ハミルトン経路 といい, これが閉路となっていたとき, ハミルトン閉路 といいます.

ハミルトン (W.R.Hamilton) が正 12 面体の各頂点を一度ずつ通るような閉路があるかどうかを聞いたのが, 名前の由来です.

Euler 経路と違って, グラフがハミルトン経路かどうかを判定する一般的な定理はまだ見つかっておりません.

ナイトの周遊に関しては, n が奇数のときの $n \times n$ の盤や, $4 \times n$ の盤では, ナイトがすべてのマスを一度ずつ通って, 出発点へ戻ってくることは不可能であることが証明できます. (パリティの項参照)

問 5 チェス盤 (8×8 の盤) および 6×6 の盤でのナイトがすべてのマスを通って, 出発点に戻る周遊を考えなさい. ([Ue] パズル 114,117 ☆☆)

問 6 7×7 および 9×9 の盤で, ナイトがすべてのマスを通る (出発点には戻れなくてもよい) 周遊を考えなさい. ([Ue] パズル 116,118 ☆☆)

問 7 下図の A のマスから, すべてのマスを一度ずつ通って, X のマスまで動かすにはどうすればよいでしょう. (K.T. ☆☆)

A	D	G	J	M	P	S	V
B	E	H	K	N	Q	T	W
C	F	I	L	O	R	U	X

ヒント 上の問題の応用です。まず、A から L まで行く道筋を考えましょう。

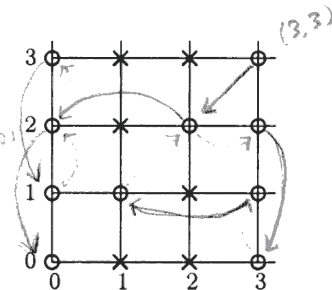
1.3 川渡し

グラフの問題に帰着すると、考えやすいパズルが多くあります。たとえば、次ののは、不適当な表現があって、マズイのですが、有名な問題です。

宣教師と人食い人種 3 人の宣教師と 3 人の人食い人種がある川を渡ろうとしている。2 人乗りのボートが 1 艘使用可能である。そのボートは一人または二人の人間（宣教師だけでも、人食い人種だけでも、またその組み合わせでもよい）によって操作される。もし川のどちらかの岸で、また川を渡る途中で、人食い人種の数が増え、宣教師の数を上回った場合には、宣教師は人食い人種によって食べられてしまう。この条件のもとで、宣教師と人食い人種の全員が無事に川を渡るためにはどのようにしたらよいでしょうか。（☆☆）

右図において、 x 軸に宣教師、 y 軸に人食い人種の数、こちら岸の人数を表します。 $\times$ のある格子点は、宣教師が食べられてしまう状態を示しています。

図中に、舟の行きを実線で、帰りを点線で表すと答えがすぐに見つかります。



さて、この種の問題は、いくつかあります。次の問題は、アルクイン（Alcuin）の「青年の心をきたえる問題集」に出ているそうです。これが、川渡しパズルの原型のようです。（[FT] 25, [Ue] パズル 161）

問 8 1 匹の狼と 1 匹の山羊とキャベツを持った旅人がいた。あるとき、川にぶつかった。川には 1 艘の舟があったが、その舟は小さいので、舟の中へはこのうちの 1 つしか持ち込めません。ところが、狼はそばに人がいないと山羊を食べてしまいます。また、山羊はそばに人がいないとキャベツを食べてしまいます。旅人が全部を無事に対岸に渡すには、どうしたらよいでしょうか。（☆）

下の問題は、一つの変形で、13 世紀頃のものです。
（[Ue] パズル 162, [FT] 30）

問 9 3 組の夫婦が川を渡りたいが、2 人乗りの小さなボートが 1 艘しかない。

ところで、この3人の夫はだれもが大変な焼きもちやきで、自分がそばにいないとき、妻が他の男と一緒にいるのは許せないのです。どうすればうまく渡ることができるでしょうか。(☆☆)

次は、学生が持ってきた問題の表現を変えたものです。

問 10 Aは犬を、BとCはそれぞれ子供2人ずつを連れている。

条件

Aの犬はAがいないと他を襲う。

BはCがいないとCの子供をいじめる。

CはBがいないとBの子供をいじめる。

舟を漕げるのは、A,B,Cの3人である。

無事に川を渡る方法を考えなさい。(☆☆☆)

1.4 油分け算

同じく、状態遷移グラフを描くと分かりやすい問題に、油分け算があります。

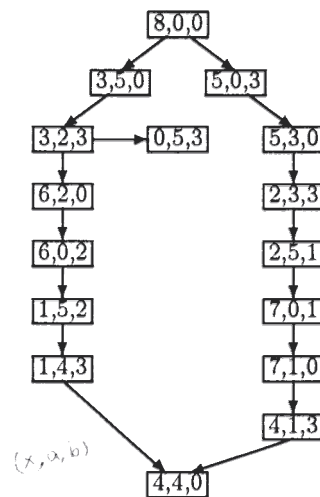
例 1 8ℓビンに、いっぱいのおが入っています。これから4ℓの油を取り出したいのですが、あいにく5ℓと3ℓの空ビンが1本ずつしかありません。4ℓずつに分ける、どんな手順を踏めばよいでしょうか。

これは、13世紀の中頃に発生したものです。
す。(FT] 29, [Ue] パズル 59)

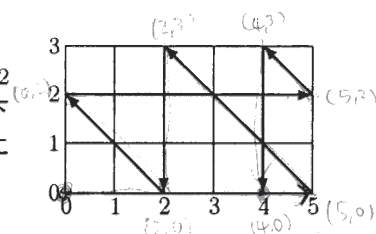
8ℓビン、5ℓビン、3ℓビンのそれぞれに入っている油の状態、そのときの状態を表してみます。

すると、最初は(8,0,0)です。その状態で、8ℓビンから5ℓビンへ油を移すと(3,5,0)となり、8ℓビンから3ℓビンへ油を移すと(5,0,3)となります。

このようにして、ある状態から油を別のビンに移す状態をグラフにすると、右図のようになります。ただし、上に戻る逆の方向の矢印は、書いてありません。グラフより、(8,0,0)から始めて、7回の操作で4ℓずつに分けることができます。



5ℓビンと3ℓビンの状態だけにすれば、2次元格子点で状態を表すことができます。下の図は、上の図の左側の操作のみをグラフにしたものです。



日本では、吉田光由著「塵劫記」に次の問題が載っています。ただし、1斗を10ℓ、1升を1ℓなどと単位を変えています。([Ue] P58)

問 11 10ℓビンに、いっぱいのおが入っています。これから5ℓの油を取り出したいのですが、あいにく3ℓと7ℓの空ビンが1本ずつしかありま

せん. $5l$ の油を $7l$ ビンに取り出すには, どんな手順を踏めばよいでしょうか. (☆☆)

第2章 タイル貼り

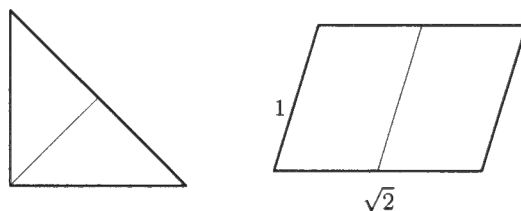
2.1 反復図形

直角二等辺三角形の直角の頂点から斜辺に垂線を下すと、この三角形は合同な 2 つの直角二等辺三角形に分けられます。

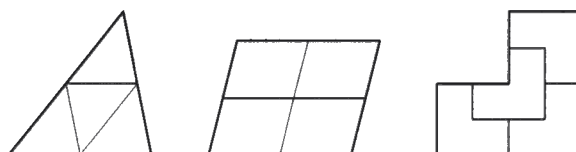
一般に、ある図形が合同な k 個の小図形に分けられ、しかもこの小図形がもとの図形と相似になっているとき、この図形を k 位の反復図形（略してレブ k ）といいます。

レブ k の図形は、分けられた小図形もレブ k ですから、分割を繰り返すことによってレブ k^n となっています。

直角二等辺三角形はレブ 2 です。また、2 辺の比が $\sqrt{2}:1$ である平行四辺形はレブ 2 です。



任意の三角形および平行四辺形はレブ 4 です。正方形から 4 分の 1 を切り取った図形もレブ 4 です。



問 12 レブ 3 の図形および上に挙げた以外のレブ 4 の図形を書きなさい。
([FT] 74 ☆☆)

反復図形は、級数の和を分かりやすく表現するのにも使われます。下左図は、反復図形ではありませんが、一つおきにもとの図と相似になる準反復図形ともいうべきものです。下図はそれぞれ、

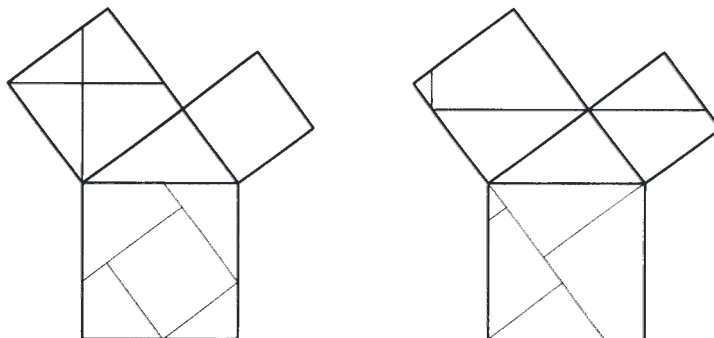
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{2} \quad \text{と} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3}$$

を表しています。

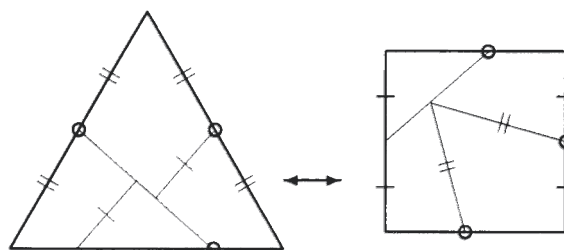


2.2 裁ち合わせ

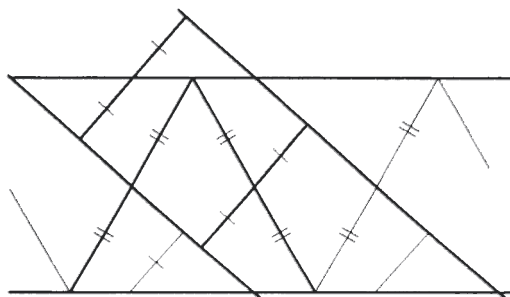
図形を切り貼りして等積変形することは、幾何の証明において、たまに使われます。下図はピタゴラスの定理の証明です。切り貼りによるピタゴラスの定理の証明は、<http://scw.asahi-u.ac.jp/~math> にもいくつか載せてあります。



正三角形 $\leftrightarrow$ 正方形 デュードニー (H.E.Dudeney) の作品に正三角形と正方形の裁ち合わせによる変換があります。これは図の丸印にちょうつがいをつければ、4つの図形をばらばらにすることなく、互いに移りあいます。 ([FT] 第5章)

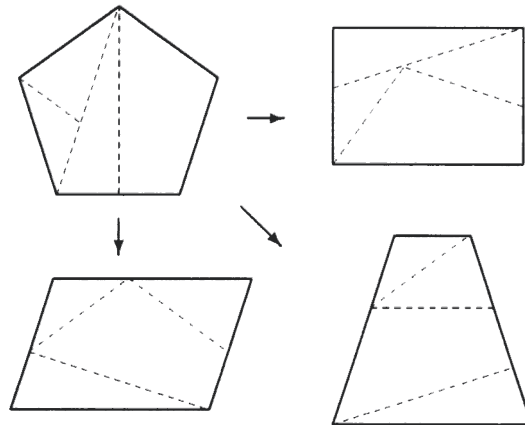


上の裁ち合わせは、次のように考えると、自然なものと理解できます。正三角形は、隙間なく敷き詰めて、平面を埋めつくすことができます。この平面を、今度は同じ面積を持つ正方形で埋めつくすのです。この考え方は、他の問題にも適用できます。

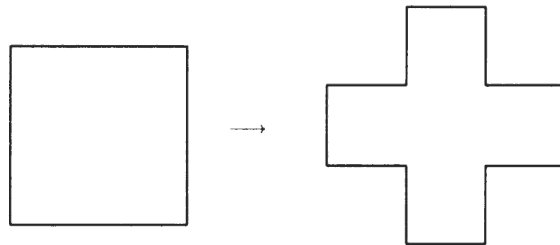


正5角形→長方形，平行四辺形，等脚台形

戦前の「尋常小学算術」に、正5角形を4片に切り離して、並べかえることによって、長方形や平行四辺形、等脚台形を作る問題があります。（[Ue] パズル 104, [Bo] 18）

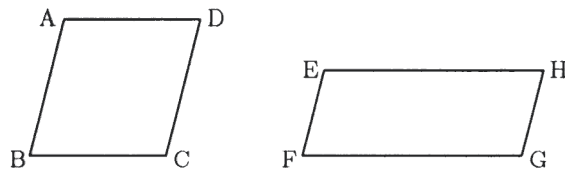


問 13 正方形を4つ（5つ）に切り、並べかえて、十字形にしないで。
（[Bo] 61, [Ue] パズル 142 ☆☆）



問 14 下に示す2つの平行四辺形は、同じ面積です。しかも、傾きは同じで、 $\angle ABC = \angle EFG$ です。

一方の平行四辺形を3片に切り分け、もう一方の平行四辺形に並べかえてください。（[Na] 11 ☆☆）



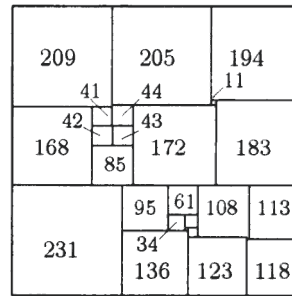
問 15 面積の等しい、平行四辺形と正方形があります。一方を3つに切り、並べかえて、正方形にしないで。ただし、平行四辺形の辺の長さを a, b とし、正方形の一辺の長さを c とするとき、 $c < a < \sqrt{2}c$ であるとして。 （K.T. ☆☆☆）

デュードニー・ルジンの問題 ある正方形を異なる大きさの正方形で埋め尽くすことができるでしょうか。

デュードニー (H.E.Dudeney) が 1907 年に提出し、ルジン (N.N.Luzin) が再提起した問題です。

1938 (1940?) 年にケンブリッジ大学の 4 人の学生たちが共同で、一辺 608 の正方形を、26 個の正方形で埋めることに成功しました。(右図, [FT] 第 4 章)

図中で正方形が小さくて、数字が書き入れられなかったところ (61 の下) は、7, 20, 27 です。

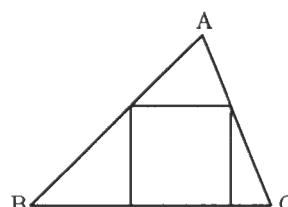


問 16 一辺が、2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 27, 29, 33, 35, 37, 42, 50 の正方形を一つずつ組み合わせて、一つの正方形にきなさい。(☆☆☆)

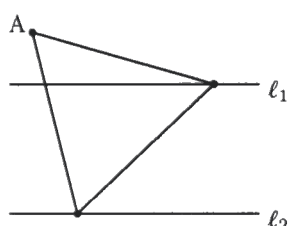
第3章 作図

作図問題は、昔の高等学校の幾何の題材でした。パズルというよりはれっきとした数学の問題です。ここでは、面白そうなものを少しだけ取りあげます。

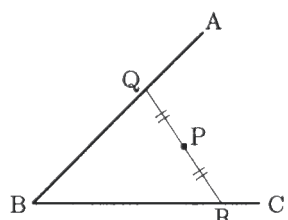
- 問 17 与えられた三角形 ABC に内接し、
辺 BC 上に一辺を持つ正方形を作図し
なさい。 (by K.T. ☆)



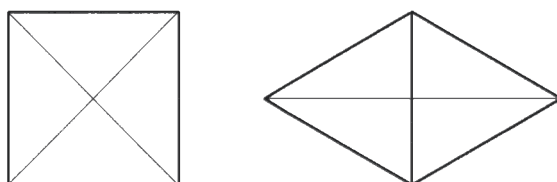
- 問 18 平面上に点 A と 2 本の平行線が
あります。頂点の 1 つが点 A に一致
し、他の 2 つの頂点が平行線の上
にあるような正三角形を描きなさい。
([DSI2] 第 14 章問 26 ☆☆☆)



- 問 19 鋭角 $\angle ABC$ 内に、点 P が与えら
れています。 P を通る線分が直線 BA
と BC と交わる点をそれぞれ Q, R と
する。 $PQ = PR$ となるように P を通
る直線を作図しなさい。
([DSI2] 第 14 章問 21 ☆)



- 問 20 平面上に 4 点を、正方形の頂点になるように配置したとき、各点間
の距離は辺の長さ和对角線の長さの 2 種類しかありません。また、ひ
し形で、一方の対角線を辺と同じ長さにとった図形の頂点に配置したも
のも、各点間の距離は 2 種類しかありません。



このような 4 点の配置は、この他にも 4 種類あります。すべて見つけ
なさい。 ([Ki] 第 1 章 P9 ☆☆☆)

次の問題は、ニュートン (I. Newton) 作です。大物理学者のニュートンが、
パズルを作っていたとは、興味深いではありませんか。

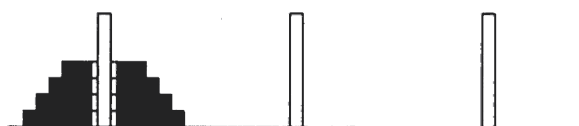
- 問 21 9 本の木が、10 方向のどの直線上にも 3 本ずつ木が並んでいます。ど
のように植えられていますか。 ([FT] 51 ☆)

第4章 数学的帰納法

4.1 ハノイの塔

板の上に3本の心棒が出ていて、そのうちの1本に n 個の輪がはまっています。輪は下から大きい順に積み上げられています。一番上の（一番小さい）輪をほかの2つの棒のどちらかに移すことができますが、小さい輪の上にそれより大きい輪をのせることはできません。

輪を全部、からの棒のうちの1本に移し替える手数は、 $2^n - 1$ であることを証明しなさい。



問 22 1つの平面上に、 n 本の直線があります。そのどれもが平行でなく、3本が同じ1点で交わることもありません。平面はこれら n 本の直線でいくつの部分に分けられるでしょうか。（☆☆）

問 23 1つの円周上に、 n 個の点があります。2つずつを線分でつないだとき、どの3本の線分も同じ点で交わることはないとします。これらの線分で円の内部はいくつの部分に分けられるでしょうか。（☆☆☆）

4.2 間引き

円周上に1から n までの数を連続して（右回りに）並べる。まず最初に2を取り除く、次に残った中から、右回りに1つおきに、残りの数字が1つになるまで数字を間引きます。たとえば、 $n = 5$ のときは、数字は、2, 4, 1, 5の順に取り除かれていき、最後に3が残ります。

$n = 30$ のとき、最後に残る数字は何でしょう。（[La] 2.5.10, 3.4.5）

この問題の原型は、ヨセフスの問題、日本では まま子立て と呼ばれるものです。（[FT] 17）

1世紀ごろのユダヤの歴史家ヨセフス（Josephus）は、敵のローマ人に包囲されたとき、他の40人の同国人とある洞穴に隠れた。彼らは捕虜になるよりも、むしろ互いに斬死しようと決心したが、ヨセフスは彼らを説得してくじを引かせ、彼ともう一人が生き残るように按配した。

この事実、後に姿を変えて次の問題としてヨーロッパの人々に伝わりました。

ヨセフスの問題

15 人のキリスト教徒と、15 人のトルコ人とが、同じ船に乗り合わせたが、海上で大嵐に出会った。船長は乗客の半分の犠牲にしないかぎり、この船は沈んでしまうと宣言した。そこで、30 人の乗客が円陣を作り、1 人の客から始めて 9 人目にあたるものを海へ投げ入れる。その次から数えて、9 人目の人を次に海へ投げ入れる。この方法を繰り返して 15 人が残るまで行うことにした。キリスト教徒は、悪知恵を働かせて、トルコ人だけが犠牲になるように並んだ。どのように並んだのでしょうか。

日本では、これと同様の問題が、室町時代から「まま子立て」と呼ばれて子どもたちの間で遊ばれていました。塵劫記の下巻に次の記述があります。なお、江戸時代の第一の数学者、関孝和もこの問題を研究していたそうです。

まま子立て

子どもが 30 人いて、そのうちの 15 人は先妻の子、残る 30 人は後妻の子である。後妻は、30 人を円陣を作って並ばせ、10 番目ずつに当たる子どもを除いていって最後に残る子どもに家督をゆずることにした。こうして数え始めると、まま子ばかりが次々と抜けていった。あと一人でもま子がいなくなろうとしたとき、最後のまま子が「これではまま子ばかりが抜けて不公平だから、今からは自分から数えてくれ」と言った。仕方なくそうすると、今度は実子ばかり抜けていって、最後にま子が残ってしまった。

最後に残る数を $f(n)$ とします。10 までの n について、調べると右表が得られます。

したがって、 e を $2^m \leq n$ をみたす m の最大数とすると、

$$2n - f(n) = 2^{e+1} - 1$$

が予想されます。これを証明しましょう。

$f(n)$ は次の性質をもちます。

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 1$$

$$f(2n) = 2f(n) - 1$$

$$f(2n+1) = 2f(n) + 1$$

n	$f(n)$	$2n - f(n)$
1	1	1
2	1	3
3	3	3
4	1	7
5	3	7
6	5	7
7	7	7
8	1	15
9	3	15
10	5	15

最初の行の式は明らかです。 $2n, 2n+1$ の場合については、最初の一巡で $2, 4, \dots, 2n$ が取り除かれます。そのとき、 $2n$ の場合については、 $1, 3, \dots, 2n-1$ の n 個が始めに与えられたのと同じ状態になるので、2 行目の式が得られます。 $2n+1$ の場合については、 $1, 3, \dots, 2n+1$ が残り、2 巡目は 1 から取り除かれていきます。すなわち、1 を取り除いた後、初めに $3, 5, \dots, 2n+1$ の n 個が与えられたのと同じ状態になりますから、3 行目の式が得られます。

さて、 $g(n) = 2n - 2^{e+1} + 1$ とおくと、 $g(1) = 1, g(2) = 1$ であり

$$g(2n) = 2(2n) - 2^{e+2} + 1 = 2(2n - 2^{e+1} + 1) - 1 = 2g(n) - 1$$

$$g(2n+1) = 2(2n+1) - 2^{e+2} + 1 = 2(2n - 2^{e+1} + 1) + 1 = 2g(n) + 1$$

したがって、 $g = f$ となります。 ■

$g = f$ の厳密な証明は、次の形の数学的帰納法です。

- (i) $n = 1$ に対して命題は正しい.
- (ii) $n - 1$ までのすべての自然数に対して命題が正しいければ, n に対しても正しい.

補足 ([La] 2.5.10, 3.4.5)

$$n = a_e 2^e + a_{e-1} 2^{e-1} + \cdots + a_1 2 + a_0, \quad (a_i = 0 \text{ or } 1, a_e = 1)$$

とすると

$$\begin{aligned} f(n) &= 2n - 2^{e+1} + 1 \\ &= 2n - (2^e + 2^{e-1} + \cdots + 2 + 1) \end{aligned}$$

だから

$$f(n) = b_e 2^e + b_{e-1} 2^{e-1} + \cdots + b_1 2 + b_0$$

とおくと b_i ($i = 0, 1, 2, \dots, e$) は

$$b_i = 2a_i - 1 = \begin{cases} 1 & a_i = 1 \\ -1 & a_i = 0 \end{cases}$$

で与えられます. たとえば $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$ だから

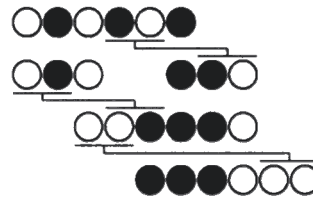
$$f(100) = 2^6 + 2^5 - 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2 - 1 = 73 (= 2 \cdot 100 - 2^7 + 1)$$

です.

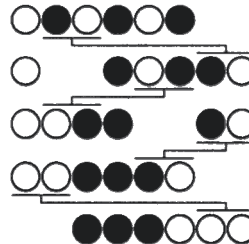
4.3 碁石のペア移動

江戸時代の中根彦循著「勤者御伽草子」(1743 年)に出ている問題です. ヨーロッパでは, 物理学者テート (P.G.Tait) が 1884 年に物理の雑誌に発表しております. ([FT] 43)

白石と黒石が 3 個ずつ, 右図のように交互に並んでいます. いま, 隣り合ったどれかの 2 個をそのままの向きで空いた場所に移動し, さらに隣り合った別の 2 個をいま空いた場所に移動します. 右図のようにすれば, 3 回の移動で, 右半分には 3 個の白石, 左半分には 3 個の黒石が並ぶようにできます.

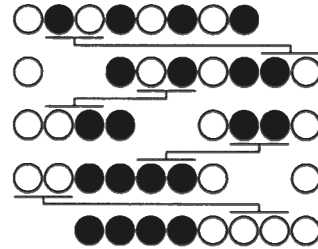


碁石は 2 個のペアで動かすので, どこかに 2 つ以上の空席が必要です. そこで, 空席が 2 つだけしか与えられていない場合について, 並べ替えをしようとする, 4 回の移動が必要となります.

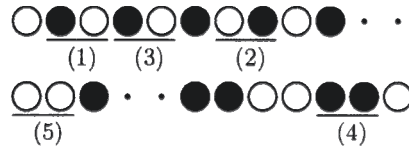


白石と黒石が 4 個ずつ、交互に並んでいる状態から右半分には 4 個の白石、左半分には 4 個の黒石が並ぶようにするには、4 回の移動が必要となります。

([Oo] 6., [Ue] パズル 154)



さて、碁石の移動を上のように表すのは、スペースをたくさん取りすぎるので、白石と黒石が 5 個ずつ、交互に並んでいる状態から 5 回の移動で右半分には 5 個の白石、左半分には 5 個の黒石が並ぶようする方法を下図のように表すことにします。



これで、白石と黒石が 5 個ずつ交互に並んでいる状態から、5 回の移動で白石、黒石が 5 個ずつ並ぶようにできました。

この調子で行くと、白石と黒石が n 個ずつ、交互に並んでいる状態から n 回の移動で右半分には n 個の白石、左半分には n 個の黒石が並ぶようにできるような気がしてきます。

6 個ずつ、7 個ずつの場合をとばして、8 個ずつの場合を取り上げてみます。



によって



のようになります。下線の部分に注目すると、これは白石と黒石が 4 個ずつの場合です。したがって、この部分は 4 回の移動で次図のようになります。



この図から (7),(8) の移動を行えば、目的の移動が 8 回で完成です。



n が 9 以上の場合には、上と同じようにすれば、 $n - 4$ 個ずつの場合に帰着できます。

したがって、後は 6 個ずつ、7 個ずつの場合にそれぞれ 6 回、7 回の移動で左半分には黒石、右半分には白石が並ぶようにできることを示すことができ、 n が 4 以上の場合に n 回の移動で右半分には n 個の白石、左半分には n 個の黒石が並ぶようにできることが証明されたことになります。すなわち、4 つとびの帰納法 です！

問 24 白石と黒石が 6 個 (7 個) ずつ交互に並んでいる場合に, それぞれ
6 回 (7 回) の移動で白石, 黒石がまとまるように並べかえなさい.
(☆☆☆)

第5章 n 進法

5.1 3 山崩し

パズルゲームの代表的なものに、「3 山崩し」があります。

碁石を何個かずつまとめて 3 つの山を作ります。2 人が交互に任意に選んだ 1 つの山からだけ好きなだけ碁石を取り除いていきます。全部を取り去ってしまっても構いません。しかし、2 つ以上の山にまたがって取ることは許されません。2 人が交互に碁石を取っていくと碁石はだんだん少なくなります。勝負は最後の 1 個を取った方が勝ちとします。 ([Hi] 1 章, [Ki] 第 9 章)

最後の 1 個を取った方が負けとするルールもあります。また、山の数を変えたり、3 つの山から同数個ずつなら取り除いてもよいとするなど、1 回に取ることのできる石の数に条件をつけたりして、各種の拡張や変形されたゲームがあります。一般にこの種のゲームを ニム といいます。ニム (nim) とは、元来「とる」という意味の語だそうです。

ここでは、最初に述べた「最後の 1 個を取った方が勝ち」の場合を考えましょう。

では、勝つ形を調べてみましょう。自分が取ったあとの 3 つの山の状態 (a, b, c) が右表のようになっていれば、勝ちます。この形を「良形」ということにします。すなわち、自分がその形を作って、次を相手の手番にすれば、必ず勝てる形を良形といいます。良形とは次のような性質を持つものと考えてよいでしょう。

- (1) 最終の形 $(0, 0, 0)$ は良形である。
- (2) 良形からは どう取っても、結果は良形ではない。
- (3) 良形でない形からは、うまく取れば 良形になる。

一松信「石とりゲームの数理」([Hi]) では、良形となるための条件を理論的に導いていますが、ここでは結論のみを拝借します。 $(2, 5, 7)$, $(3, 5, 6)$, $(3, 9, 10)$ を取りあげてみますと

a	b	c
1	2	3
1	4	5
1	6	7
2	4	6
2	5	7
3	4	7
3	5	6
3	9	10
0	n	n

奇数個

$$\begin{aligned} (1)_2 \oplus (1)_2 &= (0)_2 \\ (1)_2 \oplus (1)_2 &= (10)_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2, 5, 7) \quad 2=2, \quad 5=1+4, \quad 7=1+2+4 \\ (3, 5, 6) \quad 3=1+2, \quad 5=1+4, \quad 6=2+4 \\ (3, 9, 10) \quad 3=1+2, \quad 9=1+8, \quad 10=2+8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10)_2 \oplus (101)_2 \oplus (111)_2 &= 0 \\ (11)_2 \oplus (101)_2 \oplus (110)_2 &= 0 \\ (11)_2 \oplus (1001)_2 \oplus (1010)_2 &= 0 \end{aligned}$$

のように、良形においては 3 つの山の数をも 2 進法で表したとき、2 の各べきが 2 個ずつとなっています。

例 2 $(4, 8, 12)$ は良形です。これから相手がどのように取っても、良形でなくなります。たとえば、相手が 12 個の山から 3 個取って $(4, 8, 9)$ とす

ると、今度は 4 個の山から 3 個をとって、ふたたび良形 (1,8,9) とします。

問 25 3 山崩しで、最後の石を取った方を負けとするルールにおいて、良形を考えなさい。(☆☆☆)

5.2 メジリアクの問題

天秤を使って物体の重さを量るとき、 $1, 2, 2^2, \dots, 2^n$ g の分銅が 1 つずつあると、1g から $2^{n+1}-1$ g までを 1g おきにすべて量ることができます。これは、その重さを 2 進法で表すことで、たとえば、50g だと $50 = 2^5 + 2^4 + 2$ だから、物体と反対側の皿に 2^5 g, 2^4 g, 2 g の分銅をおくことによって釣り合います。

分銅を物体の側へものせてよいとすると、もっと少ない分銅ですむはずで。たとえば、2g, 3g, 7g の分銅があれば、2g の分銅を物体と同じ側へのせることによって 1g のものが測定できますから、1g, 2g, 3g, 4g, 5g, 7g, 9g, 10g, 12g のものが量れます。

次の問題は、フランスの数学者バシエ (C.G. Bachet de Méziriac) によるもので、1624 年に出版された著書の中で解かれています。

([FT] 48, [De] 2, [Oo] 7)

問題 4 個の分銅で、1g から 40g までの間を g 単位で測定するには、何 g の分銅を用意すればよいでしょうか。

すでに分銅 $a_1, a_2, \dots, a_n$ があって、それらを組み合わせれば $1, 2, \dots, w$ g の重さが量れるものとします。そうすると、これらの分銅の重さの合計は w g です。全部の分銅を一方の皿にのせたときが、測定できる重さの最大値だからです。

次に、 w g よりもさらに $(w+1)$ g だけ重い分銅 a_{n+1} を用意します。つまり、 a_{n+1} の重さは $w+(w+1) = (2w+1)$ g です。そうすると、 $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ による組み合わせで、 $1, 2, \dots, w$ g に加えて、 $(2w+1) \pm 1, \dots, (2w+1) \pm w$ g を量ることができます。すなわち、 $1, 2, \dots, (3w+1)$ g の重さを量ることができます。

さて、最初に 1g の分銅を用意したとすると、次は $2 \cdot 1 + 1 = 3$ g の分銅を用意すれば、1, 2, 3, 4g が測定でき、3 番目の分銅として $2 \cdot 4 + 1 = 9$ g とすれば 1, 2, $\dots$, 13g が測定できます。そして、4 番目の分銅は $2 \cdot 13 + 1 = 27$ g です。

(7/8) 結局、分銅は 1, 3, 9, 27, $\dots$ g となりました。ここまで来ると、 n 番目の分銅として 3^{n-1} g のものを用意するとよいことが予想されます。

実際、 $n = 1, 2, 3$ については、正しいことが分かっていますから、 n について正しい、すなわち $1, 3, \dots, 3^{n-1}$ g の分銅で 1g から $1 + 3 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$ g までのすべての重さを測定できると仮定します。

先ほどの議論により、 $n+1$ 番目の分銅として $2 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1 = 3^n$ g のものを用意すれば、 $3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ g までの重さを量ることができます。

これで、数学的帰納法により、 $n = 1, 3, \dots, 3^{n-1}$ g の分銅で 1g から

$$\begin{aligned}
 ① &= 1 \\
 ② &= 1+3 \\
 ③ &= 1+3 \\
 ④ &= 1+3 \\
 ⑤ &= 1+3+9 \\
 ⑥ &= 1+3+9 \\
 ⑦ &= 1+3+9 \\
 ⑧ &= 1+3+9 \\
 ⑨ &= 1+3+9 \\
 ⑩ &= 1+3+9 \\
 ⑪ &= 1+3+9 \\
 ⑫ &= 1+3+9 \\
 ⑬ &= 1+3+9
 \end{aligned}$$

170

$\frac{3^n - 1}{2} g$ までのすべての重さを測定できるとが証明されました。

$1, 3, 3^2, \dots, g$ の分銅を物体の側へものせることによって、重さを量ることはすべての自然数が 3 進法で表されることと同じ原理によります。

$1, 1+3, 1+3+3^2, 1+3+3^2+3^3, \dots$ の中で初めて物体の重さ w 以上となるものを見つけて (それを m とします), w へ加えます。

$$1+3+3^2+\dots+3^{n-1}+1 \leq w \leq 1+3+3^2+\dots+3^{n-1}+3^n (=m)$$

$$\therefore 2 \cdot 3^n \leq w+m \leq 2 \cdot 1+2 \cdot 3+2 \cdot 3^2+\dots+2 \cdot 3^{n-1}+2 \cdot 3^n$$

だから $w+m$ を 3 進法で表すと最高次の係数は 2 となります。

$$w+m=2 \cdot 3^n+a_{n-1}3^{n-1}+\dots+a_13+a_0 \quad (a_{n-1}, \dots, a_0 \text{ は } 0, 1, 2)$$

したがって, $b_i = a_i - 1 \ (i = 0, 1, \dots, n)$ とおくと w は

$$w=1 \cdot 3^k+b_{n-1}3^{n-1}+\dots+b_13+b_0 \quad (b_{n-1}, \dots, b_0 \text{ は } 0, \pm 1)$$

の形に表されます。これは $b_i = 1$ に対応して $3^i g$ の分銅を物体と反対側へ, $b_j = -1$ に対応して $3^j g$ の分銅を物体の皿へおくことを意味しています。

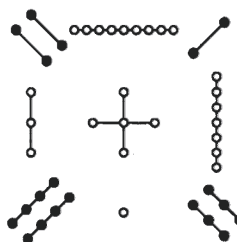
問 26 100g の重さのものを量るとすると, $1g, 3g, 3^2g, \dots$ の分銅をどのように乗せればよいでしょうか。 (☆)

第6章 魔方陣

6.1 3次魔方陣

中国では、禹という人（伝説上の夏王朝の始祖）が、洛という川の治水工事をしていたとき、右図のような図（洛図または洛書と言われる）が甲羅に書かれた亀が現れたという話が伝わっています。

図中の丸の個数を数字で書くと、3行3列の行列において各行、各列、対角線の数字の和がすべて15になっています。



一般に、1から n^2 までの数字から成る $n \times n$ の正方行列において、各行、各列および対角線の和が等しいとき、この行列を n 次魔方陣といいます。

n 次魔方陣においては

$$1 + 2 + \cdots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$$

だから、各行の和は $\frac{n(n^2 + 1)}{2}$ です。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

3次の魔方陣は、回転と裏返しで同じ配列になるものを同一視すると、ただ一通りしかありません。それを証明しましょう。

成分を、図のように1行1列から順に $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ とすると

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$(a + e + i) + (c + e + g) + (b + e + h) = 45$$

$$(a + b + c) + (g + h + i) = 30$$

両辺の引き算をして $3e = 15$ 。これより $e = 5$ となります。

さて、もし1が隅にくるならば1を含んだ3数の組み合わせで15になる組が3組必要です。ところが、対角線となる $(1, 5, 9)$ の他には $(1, 6, 8)$ しかありません。

したがって、1は隅には来ることができません。回転と裏返しで同じ配列になるものを同一視すれば、 $h = 1$ としてよしい。すると、3行目が $(8, 1, 6)$ か $(6, 1, 8)$ のどちらかに決まります。

残りのマス目は、必然的に決まってくるから、洛図かその裏返しということになります。■

6.2 4次魔方陣

ドイツの画家デューラー (Dürer) の木版面に「メランコリア」と名づけられたものがあります。その右上半部に4次の魔方陣が描かれています。図はその魔方陣です。魔方陣の下中央2マスの1514は、この木版面が描かれた1514年を示しています。

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

回転と裏返しで同じ配列になるものを同一視すれば、異なる4次魔方陣は880種類あります。

このことの簡単な証明はないようです。平山諦、安部素方著の「方陣の研究」(大阪教育図書株式会社 1983年)には、浦田繁松の作として、そのすべてが載せてあります。

4次の正方行列を $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) として

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4} = 34 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + a_{4j} = 34 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 34$$

$$a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41} = 34$$

の連立1次方程式を考えます。

この連立1次方程式の階数(ランク)は9ですから、適当な7個の a_{ij} を定めると、残りが自動的に決まってきます。

最近では、コンピュータの発達で、計算は楽になりましたが、それでも工夫をしないと莫大な時間がかかってしまいます。レーマー (Lehmer) は、第1列と第4行を、和がそれぞれ34になるように決めておいて残りの9個の数の組を数え上げております。

6.3 奇数次魔方陣

作り方 その1

- (1) 一番上段の中央に1を書く。
- (2) 順次、斜め右上へと進む。
- (3) もし区画外へ出た場合は、反対側(上に出た場合は下、右に出た場合は左)のいちばん外側に移動する。
- (4) 斜め右上隅へきたときか、斜め右上に既に数字が書き込まれている場合は真下に進む。

$$\begin{array}{ccccc}
 & 18 & 25 & 2 & 9 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ \hline 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ \hline 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ \hline 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ \hline 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \\ \hline \end{array} & = & 5 & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} + & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} + E
 \end{array}$$

作り方 その 2

- (1) 上から 2 行目の中央に 1 を書く。
- (2) 順次、斜め右上へと進む。
- (3) もし区画外へ出た場合は、反対側（上に出た場合は下、右に出た場合は左）のいちばん外側に移動する。
- (4) 斜め右上隅へきたときか、斜め右上に既に数字が書き込まれている場合は 2 行真上に進む。

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3

 $= 5$

4	1	3	0	2
1	3	0	2	4
3	0	2	4	1
0	2	4	1	3
2	4	1	3	0

 $+$

2	0	3	1	4
4	2	0	3	1
1	4	2	0	3
3	1	4	2	0
0	3	1	4	2

 $+E$

この作り方は、下図のようにするのと同じです。

					25											
					24		20									
					23	6	19	2	15							
					10	18	1	14	22	10						
21						17	5	13	21	9	5					
16						4	12	25	8	16	4					
					11	24	7	20	3							
					6		2									
					1											

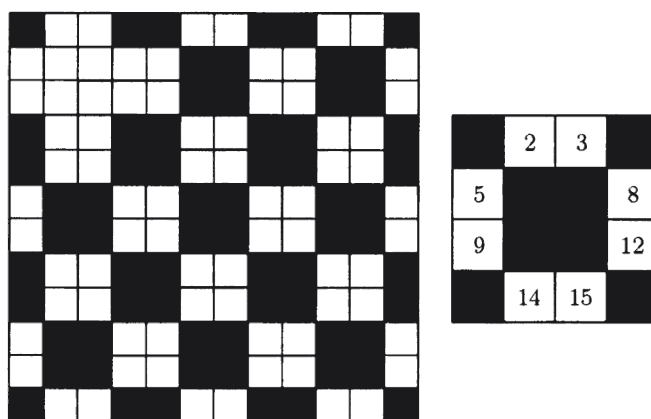
問 27 上記の方法以外で、5 魔方陣を作りなさい。（☆☆☆）

6.4 偶数次魔方陣

4m 次魔方陣
形の

中央の 4 個から始めて、4 個ずつの市松模様を作る。正方

$(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow \cdots \rightarrow (1, n) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow \cdots (2, n) \rightarrow (3, 1) \rightarrow \cdots \rightarrow (n, n)$
と進むのであるが、斜線部は中央に関して対称な位置に数字を書き込む。



問 28 8 魔方陣を作りなさい. (☆☆☆)

$4m+2$ 次魔方陣 $n = 2m+1$ とし, 正方形を (n, n) 型の正方向列 4 個に分割し, 左上を A, 右上を B, 左下を C, 右下を D とする.
 1 から n^2 までの数でつくる魔方陣を A, n^2+1 から $2n^2$ までの数でつくる魔方陣を D, $2n^2+1$ から $3n^2$ までの数でつくる魔方陣を B, $3n^2+1$ から $4n^2$ までの数でつくる魔方陣を C とする.
 作り方から各列の数字の和は $n(n^2+1)+3n^3$ になっている.
 各行と対角線の数字の和を揃えるために, 次のように数字を入れ換える.

- (1) A と C の真中の行 ($m+1$ 行) の $2, \dots, m+1$ 列を入れ換える. A と C のそれ以外の行について, $1, \dots, m$ 列を入れ換える.
- (2) B と D の $m+3, \dots, n$ 列の $m-1$ 列を入れ換える.

これで, 各列の和は不変で, 各行の数字の和も 2 つの対角線の数字の和もそれぞれ $n(n^2+1)+3n^3$ になる.

例 10 次 ($n = 5$) 魔方陣

	1	8	15	67	74	51	58
	7	14	16	73	55	57	64
4		20	22	54	56	63	70
	19	21	3	60	62	69	71
	25	2	9	61	68	75	52
	76	83	90	42	49	26	33
	82	89	91	48	30	32	39
79		95	97	29	31	38	45
	94	96	78	35	37	44	46
	100	77	84	36	43	50	27

 $\Rightarrow$

	1	8	15	67	74	51	58
	7	14	16	73	55	57	64
4		20	22	54	56	63	70
	19	21	3	60	62	69	71
	25	2	9	61	68	75	52
	76	83	90	42	49	26	33
	82	89	91	48	30	32	39
79		95	97	29	31	38	45
	94	96	78	35	37	44	46
	100	77	84	36	43	50	27

問 29 6 魔方陣を作りなさい. (☆☆☆)

6.5 拡張魔方陣

n 次正方行列の成分が, $1, 2, \dots, n^2$ ではなくても 各行, 各列, 対角線の和が等しい行列を拡張した魔方陣と呼びましょう.

下図は, 中央がそれぞれ 3 次, 5 次 (拡張) 魔方陣になっている例です.

([Ue] パズル 52)

16	33	18	31	20	29	28
39	7	42	9	40	27	11
12	46	2	47	26	4	38
37	5	49	25	1	45	13
14	44	24	3	48	6	36
35	23	8	41	10	43	15
22	17	32	19	30	21	34

成分が素数ばかりからなる 3, 4, 5 次 (拡張) 魔方陣の例です. ([Ue] パズル 47,50)

401	11	263	149	431
419	461	23	269	83
311	59	251	443	191
53	233	479	41	449
71	491	239	353	101

7	47	97	89
103	83	13	41
23	31	113	73
107	79	17	37

立体方陣 平面の魔方陣を拡張して、立方体の各面（外にある面だけでなく、それに平行な平面で切った切り口の平面も含めて）の各行、各列の和が等しいという、立体魔方陣も考えられています。

立体魔方陣において、各面の対角線の成分の和も同じにすることはできませんが、右図のものは、立方体の中心を通る、対角線上の成分の和も 42 になっています。

$$23 + 14 + 5 = 18 + 14 + 10 = 42$$

$$17 + 14 + 11 = 22 + 14 + 6 = 42$$

$$13 + 14 + 15 = 26 + 14 + 2 = 42$$

$$12 + 14 + 16 = 4 + 14 + 24$$

$$= 8 + 14 + 20 = 21 + 14 + 7 = 42$$

12	26	4
22	3	17
8	13	21

23	1	18
9	14	19
10	27	5

7	15	20
11	25	6
24	2	16

3 次の立体方陣は、回転や反転で重なるものは同じとみなして、4 種類に限るということを安部元章が 1939 年に発表しています。（[Ue] パズル 53）

4 次の立体方陣は、各行各列の和が 130 になります。[Ue] パズル 54 にひとつの例が載っています。この辺りになると、パズルといってもコンピュータを使わなければなりません。

問 30 上の例と違う 3 次の立体方陣を作りなさい。（☆☆☆）

第7章 不定方程式

7.1 ピタゴラスの三角形

ピタゴラスの定理は、中学校の数学で学ぶ、もっとも有名な定理です。それは、三角形の直角を挟む2辺を a, b 、斜辺を c とするとき、

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

が成り立つというものです。この定理は逆も成り立ちます。すなわち、三角形の三辺 a, b, c の間に (1) が成り立つならば、それは c を斜辺とする直角三角形になります。(1) の成り立つ整数の組 (a, b, c) を3辺とする直角三角形をピタゴラスの三角形といいます。(3, 4, 5) がピタゴラスの三角形を作ること紀元前から知られていました。その他の組があることも知っているでしょうか？ もちろん、(6, 8, 10) や (9, 12, 15) は除きます。

一組の (a, b, c) が (1) をみたすならば、その整数倍 (da, db, dc) も (1) をみたすことは明かです。この逆に a, b, c が公約数 d を持つならば、 $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d})$ もまた解になります。だから、 (a, b, c) としては、(1) をみたすもので、 a, b, c が公約数を1以外に持たないものを見つければよいことが分かります。

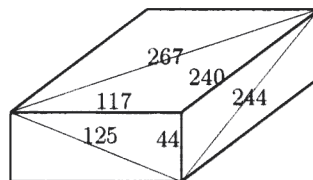
そのときは、 a, b, c の各2つは互いに素になっていることが分かります。なぜならば、もし a, b, c の2つ、たとえば a と b がともに d で割り切れるならば、 $a = da_1, b = db_1$ とおいて

$$c^2 = a^2 + b^2 = (da_1)^2 + (db_1)^2 = d^2(a_1^2 + b_1^2)$$

となって、 c も d で割り切れることになるからです。

さて、(5, 12, 13) が、(1) の解で、(3, 4, 5) に次いで小さい数の組であることが分かります。

オイラーは、直方体の3つの稜線、各面の対角線の長さが整数であるもののうち最小なものとして右図を挙げています。

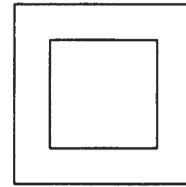


問 31 上にあげた以外のピタゴラス三角形を見つけなさい。このような組は無限にあるでしょうか？ あるとすれば、一般解を求める公式はあるのでしょうか？ (☆☆)

問 32 次の各項を証明しなさい。パズルとは言えませんが、関連問題です。

- (1) a または b のどちらかは 3 で割り切れる。 (☆☆)
- (2) a または b のどちらかは 4 で割り切れる。 (☆☆)
- (3) a, b, c の少なくとも一つは 5 で割り切れる。 (☆☆)

問 33 正方形が図のように、中心を揃え、辺は平行にして 2 つ重ねて置いてあります。この 2 つの正方形の面積の和を 1 回の測定のみで、算出するにはどこを測ればよいでしょうか。(☆)



ピタゴラスの三角形の求め方

ピタゴラスの三角形となる整数の組を求める方法は、いろいろ知られていますが、次のようにするのがもっとも簡単だと思われます。

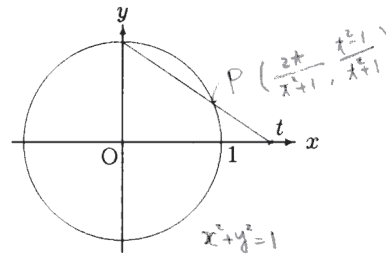
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = -\frac{1}{t}x + 1$$

より

$$(1 + \frac{1}{t^2})x^2 - \frac{2}{t}x = 0$$

$$x = 0 \text{ または } x = \frac{2t}{t^2 + 1}$$



したがって点 P の座標は $(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1})$.

$t = \frac{m}{n}$ ここで m, n は互いに素な自然数 とおいて

$$x = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, y = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

すなわち

$$a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2$$

7.2 覆面算

覆面算では、同一文字は同一数字を、異なる文字は異なる数字を表すことと約束されています。先頭の文字が 0 にならないことなどは、一般の数字の表記と同じです。

覆面算と次の節の虫食い算は、算数パズルといってもよいでしょう。これらは、見た目の「美しさ」が重要とされているようです。

デュードニー作といわれる右のものは有名で、多くの本で引用されています。

これを解くには、まず M に注目します。4 桁の 2 数を足して 5 桁へ繰り上がる数は 1 しかないから、 $M = 1$ となります。すると、

$$\text{MONEY} < 9900 + 2000 = 11900$$

から $O = 0$ となり、 $S = 9$ となります。

残りの関係は右図の下ようになりますから、

$N = E + 1$ 以下、2 から 8 までの数字で上と同様の考察を繰り返します。答えは、 $9567 + 1085 = 10652$ です。

$$\begin{array}{r} \text{SEND} \\ + \text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \\ \\ \text{END} \\ + \text{RE} \\ \hline \text{NEY} \end{array}$$

問 34 次の覆面算を解いてみましょう。 ([Ue] パズル 90 ☆☆☆)

(1) (森本清吾)

$$\begin{array}{r} \text{KYOTO} \\ + \text{OSAKA} \\ \hline \text{TOKYO} \end{array}$$

(2) (フィッチェジュニア)

$$\begin{array}{r} \text{NEWTON} \\ + \text{KLEIN} \\ \hline \text{KEPLER} \end{array}$$

(3) (森本清吾, プレイシュ)

$$\begin{array}{r} \text{ZERO} \\ \text{ONE} \\ + \text{TWO} \\ \hline \text{THREE} \end{array}$$

(4) (高木茂男, ハンター)

$$\begin{array}{r} \text{SEVEN} \\ \text{SEVEN} \\ + \text{SIX} \\ \hline \text{TWENTY} \end{array}$$

(5) (森本清吾)

$$\text{HE} \times \text{WAS} = \text{HERE}$$

7.3 虫食い算

虫食い算は、江戸時代の和算の本にも見られます。現代ではコンピュータの使用によって、作る方も解く方もずいぶん楽になりました。

問 35 次の虫食い算を解いてみましょう。 ([Ue] パズル 89 ☆☆☆)

(1)

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ \times \quad \quad 8\square \\ \hline \square\square\square\square \\ \square\square\square\square \\ \hline \square\square\square\square \end{array}$$

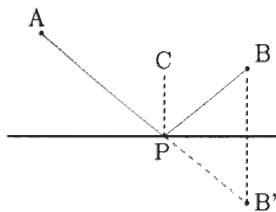
(2) (高木茂男)

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ \square\square\square \overline{) 5\square\square\square\square} \\ \underline{\square 5\square} \\ \square 5\square \\ \underline{\square\square 5} \\ \square\square\square 5 \\ \underline{\square\square\square\square} \\ 0 \end{array}$$

第8章 最大・最小

8.1 図形の問題

直線 ℓ と、その上にない 2 点 A, B が与えられているとき、 ℓ 上の点 P を経由して A から B に至る最短線を求める問題は、有名です。 A と B が直線 ℓ に関して同じ側にあるときは、点 B の ℓ に関する対称な点 B' をとり、線分 AB' と ℓ との交点を P とすれば $AP+PB$ が最小になります。 APB は光の通る経路です。別の表現をすれば、点 P において ℓ に垂線 PC を立てたとき、 $\angle APC = \angle BPC$ となる点で、いわゆる入射角と反射角が等しい点です。

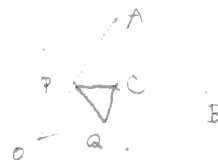


A と B が直線 ℓ に関して反対側にあるときは、線分 AB と ℓ との交点を P とすれば APB が直線となり、 $AP+PB$ が最小になります。

問 36 与えられた直線の上に次の条件をみたす点 M を見つけなさい。

- (a) 点 M から与えられた 2 つの点までの距離の差が最小である。 (☆)
- (b) これら 2 つの距離の差が最大である。 (☆☆)

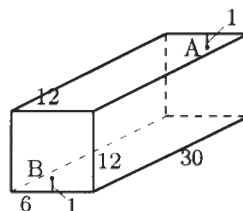
問 37 $\angle AOB < 90^\circ$ とする。角 AOB 内に点 C が与えられたとき、 AO 上の点 P と BO 上の点 Q を取り、 $CP+PQ+QC$ が最短になるようにしなさい。 (☆☆)



問 38 三角形 ABC が与えられている。 $PA+PB+PC$ を最短にするような点 P を見つけなさい。 (☆☆)

問 39 四角形 $ABCD$ が与えられている。 $PA+PB+PC+PD$ を最短にするような点 P を見つけなさい。 (☆☆)

問 40 長さ 30 フィート、幅と高さがそれぞれ 12 フィートの直方体の部屋で、一方の横壁の中央、天井から 1 フィートの位置 (図中の点 A) に、1 匹の蜘蛛がおります。その対壁の中央、床から 1 フィートの位置 (図中の点 B) に、1 匹の蠅がとまっています。



蜘蛛が這って行って、蠅のところへ達する最短距離は何フィートでしょうか。ただし、蜘蛛は糸を使ったり、飛び降りたりはしないこととします。 (デュードニー、1905 ☆☆☆)

問 41 両岸が平行になっている 1 本の川の両側にそれぞれ村があります。両岸に川に垂直に細い橋をかけることになりました。村から村へ最短距離で行けるようにするには、どこに橋をかければよいでしょうか。 ([DS11] 第 6 章 問 23 ☆)



8.2 数の問題

問 42 5324 と 89716 のように、1 から 9 までの数字を一度ずつ用いて 4 桁と 5 桁の数をつくる方法はたくさんあります。しかし、2 つの数の積を最大にする方法はただ一つです。それを見つけてください。 ([Bo] 10 ☆)

問 43 1 から 9 までの数字を一度ずつ用いて 4 つの数を作り、その積を最大にするには 4 つの数をどのように作ればよいでしょうか。 ([Na] 問題 70 ☆☆)

9

自然対数の底 e

パズルには珍しく解析学の登場となります

問 44 和が 19 となるいくつかの正の数を決めて、それらの積が最大になるようにするにはどのような数たちにすればよいでしょうか。

- (1) 整数の範囲で見つけてください。
 - (2) 整数という条件を除いた場合は、どのような数にすればよいでしょうか。
- ([Ne] 15, [La] 1.1.4, [Ue] パズル 45 ☆☆)

より一般に、与えられた正の整数 a に対して、いくつかの正数の和が a のとき、それらの数の積を最大にするにはどうしたらよいか、ということを考えましょう。

1) 固定

正の整数 n を固定したとき、 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$ をみたす正数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の積 $x_1 x_2 \cdots x_n$ が最大になるのは相加相乗平均定理より、 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}$ のときです。(この定理の証明自体も興味深いものですが、パズルとは関係が薄いので、ここでは省略します。)

2) 変化する

したがって、 $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ と $\left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$ の大小を比較すればよいことになります。

$$\left(\frac{a}{n}\right)^n \leq \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \frac{a}{n+1}$$

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ は狭義単調増加で $e = 2.718281828\dots$ に収束しますから、 $e \leq \frac{a}{n+1}$ のとき $\left(\frac{a}{n}\right)^n < \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$ であり、 n が増えるにつれ、 $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ は増加します。 $e > \frac{a}{n+1}$ と不等号の向きが反対になったときから、 $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ は減少に転じます。

したがって、有理数の範囲で積を最大にするには $\frac{a}{n+1}$ が e にもっとも近くなるような n を求めれば、 $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ か $\left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$ のどちらかが最大となります。

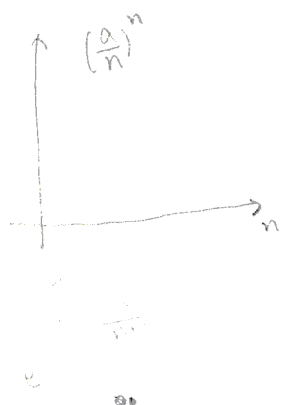
ここまで分かれば、整数の範囲で積を最大にするものを見つけるのは、簡単?

$$x_1 + \cdots + x_n = a$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

$$e \sim \frac{a}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow n = -1 + ae^{-1}$$



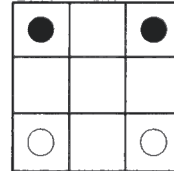
8.3 その他の問題

問 45 チェスのナイトは将棋の桂馬の動きを左右上下方向へも拡大したものです。ナイトの駒が 6×6 の盤の上で

- (a) 同じマス目に 2 回以上入らない。
- (b) 通ったマス目の中心点を結んだ線が交差しない。

という条件を満たすように動くとき、最大何ステップ動くことができますか。 ([Bo] 124 ☆☆☆)

問 46 3 行 3 列のマス目の 4 隅に、白いナイト 2 つと黒いナイト 2 つが図のように置いてあります。空いているマス目を使って、黒と白のナイトを入れ換えてください。



一つのナイトが続けて移動できるときは、何回移動しても 1 手とすると、最小何手で交換できるでしょうか。 ([FT] 47 ☆☆)

第9章 級数

9.1 曾呂利新左衛門

[Be] 6 章 53 にある話を引用します。同書 49,52 も同様の話です。なお, [Ue] では、チェスの創案者の名がシッサ、王の名がシルハムになっております。

伝説によると、チェスはインドから発生したといわれる。

シェラム王は、このゲームで行なうことのできるすぐれた指し手が莫大な数にのぼることに胸を踊らせた。このゲームの創案者セサが自分の臣下の 1 人であることを知った王は、そのすばらしい発明に対して望みどおりのほうびを与えと言った。

セサの望みは、チェス盤の最初のマスメに対して小麦を 1 粒もらいたい。2 番目のマスメに対して 2 粒もらいたい。3 番目のマスメに対して 4 粒もらいたい。4 番目のマスメに対して 8 粒もらいたい。これを繰り返して、チェス盤の 64 個のマスメ全部に対する小麦をいただきたいというものであった。

王は「何と小さな望みよ」と、彼の要望を聞き入れた。ところが、彼の望みをいざ実行しようとしたら、世界中の小麦を合わせても足りないことが分かった。

というものです。実際にどれくらいの粒になるかを、計算してみると

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

です。

この話には、最後に

王はセサに、約束はかなえてやるが、小麦を自分で数えて持って行くようにと言えばよかったのに。

と書いております。

日本では、曾呂利新左衛門が太閤秀吉から褒美に何が欲しいかと聞かれたとき、「広間の畳 1 枚に米 1 粒を置き、次の畳には 2 粒、その次の畳には 4 粒を、というように順に前の畳の 2 倍ずつの米粒を置いて、その全部を頂きたい」と答えたという話があります。

9.2 宛先違いの手紙

ある人が 8 通の手紙を書き、8 人に送ろうとしましたが、すべての手紙を宛先の違う封筒に入れてしまいました。このような間違い方は何通りあるでしょう。

これは、パズルというより、れっきとした数学の問題です。実際、この問題を初めて考えたのは、ヤコブ・ベルヌーイ (Jacob Bernoulli) とニコラス・ベルヌーイ (Nicolas Bernoulli) です。後に、オイラー (Euler) がこの問題に興味を持ち、ベルヌーイとは独立に解きました。 ([De] 6, [FT] 52)

手紙 a を宛先 A , 手紙 b を宛先 B , に出すべきものとします。全部、宛先間違いとなる場合の数を a_n とおきます。 a を B 送る場合を次の 2 つの場合に分けて考えます。

第 1 の場合 a を B に, b を A に入れてしまった場合。

第 2 の場合 a を B に入れたが, b は A には入れなかった場合。

第 1 の場合は, 明らかに a_{n-2} 通りです。

第 2 の場合は, a 以外の送り先 $A, C, \dots$ を $B', C', \dots$ と書いてみれば分かるように, a_{n-1} 通りです。

したがって, a を B に送り, b 以下もすべて宛先間違いで送る場合の数は $a_{n-1} + a_{n-2}$ です。 a を C に送ってしまう場合も, a を D に送ってしまう場合も, その場合の数は同じですから

$$a_n = (n-1)\{a_{n-1} + a_{n-2}\}$$

よって

$$\begin{aligned} a_n - na_{n-1} &= -\{a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}\} \\ &= \dots \\ &= (-1)^{n-2}(a_2 - 2a_1) = (-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n!} &= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} \\ &= \dots \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{(-1)^2}{2!} \\ \therefore a_n &= n! \left\{ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right\} \end{aligned}$$

したがって, $n = 8$ の場合は何と

$$a_7 = 8! \left\{ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^8}{8!} \right\} = 20881$$

通りにもなります。

補足 a_n は, n 次の行列式の展開式において, 主対角成分を含まない項の個数を表しています。

第10章 組み合わせ

10.1 はかり

場合分けをして解くパズルは非常に多い。たとえば、天秤はかりを使って、にせ金を見出す問題だけでも数多くあります。

次の天秤はかりの問題は、1945年の数学雑誌に載ったものだそうです。

にせ金の鑑定 12個のコインがある。外見上は違いが分からないが、偽コイン1個のみ重さが異なっている。これを天秤はかり3回の操作で発見するにはどうしたら良いでしょうか。 ([Ue] パズル 183, [Oo] 1., [Na] 問題 55)

たいていの人は、場合分けをして考えるようです。以下、測定するコインの番号にアンダーラインを引くことにします。

1回目の測定： _____

釣り合う場合：

偽コインは ~ のうちにあります。以下、容易だから省略します。

~ 側が下がる場合 (~ 側が上がる場合も同様です)：

~ の1個が重いか、 ~ の1個が軽い。

2回目の測定： _____ (右側 _____ でもよい)。

釣り合うならば 重い が軽いから、3回目の測定を _ _ とします。

が下がるならば のどちらかが重いか が軽いから、3回目の測定を _ _ とします。

上の測定では、1回目の測定結果に応じて、2回目の測定方法を、2回目の測定結果に応じて、3回目の測定方法を変えていましたが、実は場合分けの必要はないのです。

下表において、R = 右側に乗せる、L = 左側に乗せる、O = 乗せない を表します。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	L,R,O
1回目	L	L	L	L	R	R	R	R	R	O	O	O	O	4,5,4
2回目	L	L	R	R	L	R	O	O	O	L	L	R	O	5,4,4
3回目	L	R	R	O	R	O	L	R	O	L	O	L	R	4,5,4
12枚														
11枚														
10枚														

表は、L,R,O の3回の組み合わせ $3^3 = 27$ 通りから

(1) 一度も乗せない場合 {OOO} を除く。

(2) たとえば {LRR} と {RLL}, {LRO} と {RLO} のように, 天秤の左右の入れ換えただけの 2 つずつから一方ずつ (代表系) を, できれば右と左の数が等しくなるように (左右に乘せるコインは 4 個ずつだから) 選び出す.

(3) できた $(3^3 - 1)/2 = 13$ 通りのままでは, L,R のいずれかが 1 つずつ多くなっているのだから, それ (たとえば上表では 5 の {RLR}) を取り除く.

という方法で作りました. 代表系の取り方は, いろいろあり, 取り方によっては, うまく行かない場合もあります.

コイン 11 枚の中に 1 枚にせ金が入っている場合の測定方法は, 上表から 8 の {ROR} と 11 の {OLO} を除いて, 4,4,3 の組にして測定します.

コイン 10 枚の中に 1 枚にせ金が入っている場合の測定方法は, 同じように上表から 9,11,13 の場合を除いて, 4,4,2 の組にして測定します.

にせ金が高いか低いかの判定をくだす必要がなければ, {OOO} を加えて, 3 回の測定でコイン 13 枚まで判定できます.

この方法で, 4 回の測定で $(3^4 - 1)/2 - 1 = 39$ 枚までのコインの真贋を区別できます. (にせ金が高いか低いかの判定をくだす必要がなければ, {OOO} を加えて, 40 枚まで判定できます.)

問 47 39 個のコインがある. 外見上は違いが分からないが, 偽コイン 1 個のみ重さが異なっている. これを天秤はかり 4 回の操作で発見するにはどうしたら良いでしょうか. (☆☆☆)

問 48 9 枚のコインがあります. 外見上は違いが分からないが, 1 枚のみ軽い. これを天秤はかり 2 回の操作で発見してください. ([DS11] 第 8 章 35 ☆)

問 49 本物のコインは 10 グラムであり, 偽コインは 9 グラムです. 4 個のコインと, (天秤ではない, 重さを比較するものでなく, 目方の数値を示す) はかりがあると, どれが本物でどれが偽物かを 3 回量るだけで決定しなさい. ([Ne] 42 ☆☆)

この問題は, 場合分けをしなくてもすむ測定方法もあります.

問 50 6 枚のコインがあります. 外見上は違いが分からないが, そのうちの 2 枚はにせ物で本物より軽くなっています. 天秤はかり 3 回の操作で 2 個のにせ物を発見してください. ([DS11] 第 8 章 38 ☆☆)

10.2 金庫の鍵

長男, 次男, 三男の 3 人が共同で金庫を管理しています. 彼らは互いに他の 2 人を完全に信用しているわけではないので, 一人がその金庫を開けたいときは, 残りのうちの誰かと一緒にないと金庫が開かないようにしました.

それには, 金庫に A,B,C の 3 種類の鍵をつけ, 長男に A と B, 次男に A と C, 三男に B と C の鍵を渡すようにすれば解決です.

問 51 4 人に何個ずつかの鍵を渡し, 3 人以上でないと開かないようにするには, 何個の鍵で開く金庫を作り, それらの鍵を 4 人にどのように渡せばよいでしょうか. ([Na] 問題 54 ☆☆)

10.3 リーグ戦の組み合わせ