2 次計画問題における交互フィボナッチ双対性
(Alternately Fibonacci Duality in Quadratic Programming)

九州大学名誉教授　　岩本　誠一 (Seiichi IWAMOTO)
秋田県立大学　　木村　寛　(Yutaka KIMURA)

OR 学会研究部会「確率最適化モデルとその応用」研究会・第 2 回
June 11, 2011
(千葉大学西千葉キャンパス理学部 1 号館)

Contents

- 多段分割問題
- 交互フィボナッチ（**4 : 6** 型）
- 交互フィボナッチ相補双対性
- 交互フィボナッチ（**6 : 4** 型）
- 交互フィボナッチ・シフト双対性
- 交互ダ・ヴィンチ・コード

Contents

- 多段分割問題
- 交互フィボナッチ（**4 : 6** 型）
- 交互フィボナッチ相補双対性
- 交互フィボナッチ（**6 : 4** 型）
- 交互フィボナッチ・シフト双対性
- 交互ダ・ヴィンチ・コード

Contents

- 多段分割問題
- 交互フィボナッチ（**4 : 6** 型）
- 交互フィボナッチ相補双対性
- 交互フィボナッチ（**6 : 4** 型）
- 交互フィボナッチ・シフト双対性
- 交互ダ・ヴィンチ・コード

Contents

- 多段分割問題
- 交互フィボナッチ（**4 : 6** 型）
- 交互フィボナッチ相補双対性
- 交互フィボナッチ（**6 : 4** 型）
- 交互フィボナッチ・シフト双対性
- 交互ダ・ヴィンチ・コード

Contents

- 多段分割問題
- 交互フィボナッチ（**4 : 6** 型）
- 交互フィボナッチ相補双対性
- 交互フィボナッチ（**6 : 4** 型）
- 交互フィボナッチ・シフト双対性
- 交互ダ・ヴィンチ・コード

Contents

- 多段分割問題
- 交互フィボナッチ（**4 : 6** 型）
- 交互フィボナッチ相補双対性
- 交互フィボナッチ（**6 : 4** 型）
- 交互フィボナッチ・シフト双対性
- 交互ダ・ヴィンチ・コード

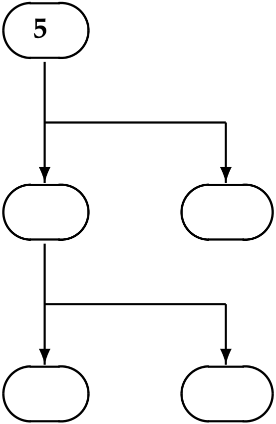
Contents

- 多段分割問題
- 交互フィボナッチ（**4 : 6** 型）
- 交互フィボナッチ相補双対性
- 交互フィボナッチ（**6 : 4** 型）
- 交互フィボナッチ・シフト双対性
- 交互ダ・ヴィンチ・コード

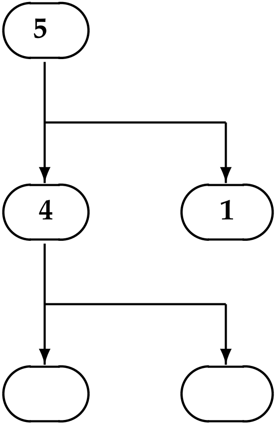
Contents

- 多段分割問題
- 交互フィボナッチ（4 : 6 型）
- 交互フィボナッチ相補双対性
- 交互フィボナッチ（6 : 4 型）
- 交互フィボナッチ・シフト双対性
- 交互ダ・ヴィンチ・コード

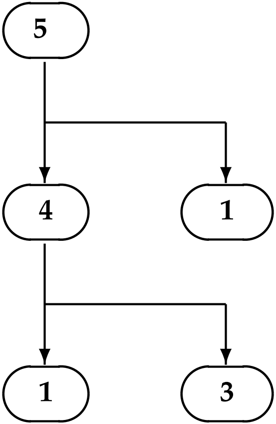
2 段階 2 分割問題



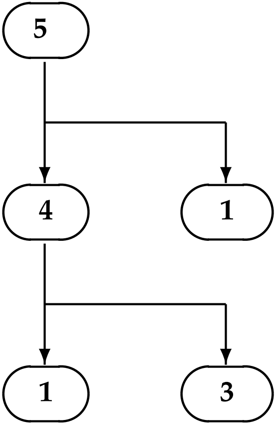
2 段階 2 分割問題



2 段階 2 分割問題

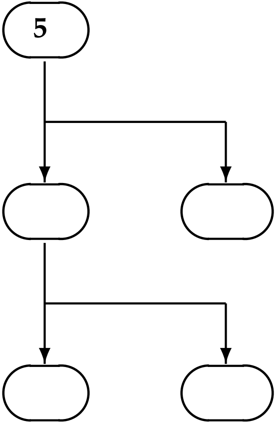


2段階2分割問題

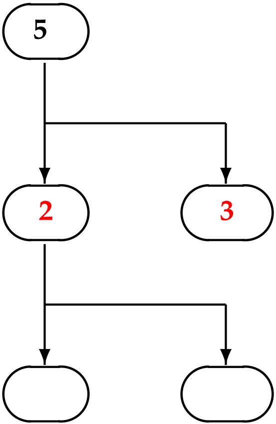


$$1^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2 = 27$$

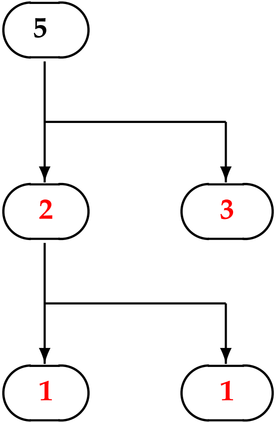
「最適」な分割は、



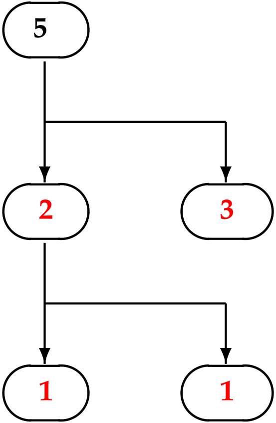
「最適」な分割は、



「最適」な分割は、

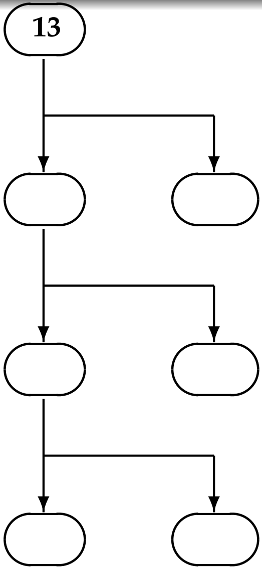


「最適」な分割は、

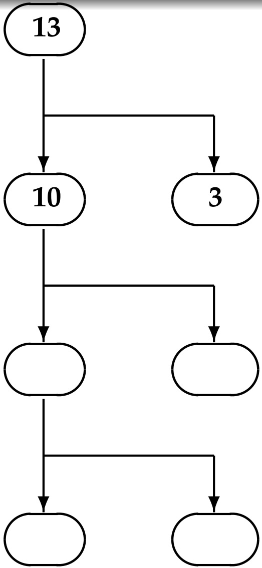


$$3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 15$$（最適分割）

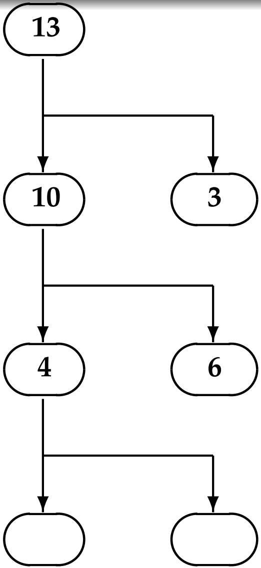
3 段階 2 分割問題



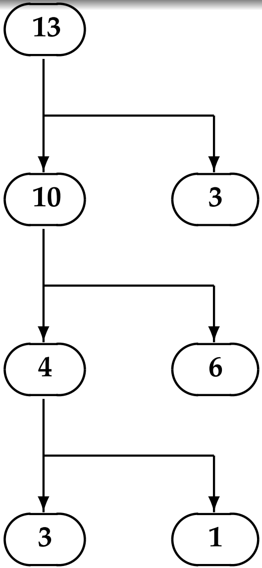
3 段階 2 分割問題



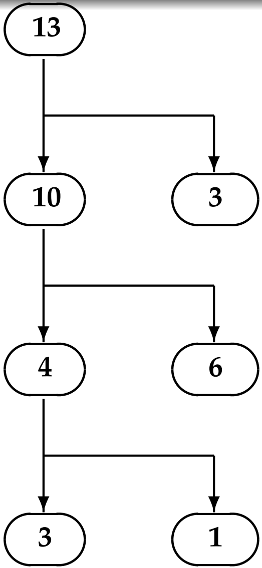
3段階2分割問題



3 段階 2 分割問題

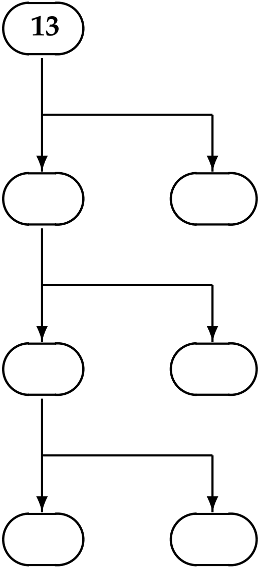


3 段階 2 分割問題

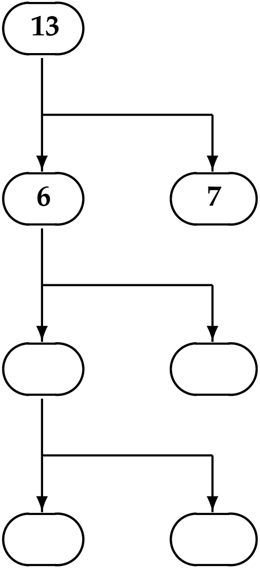


$$3^2 + 10^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 + 3^2 = 171$$

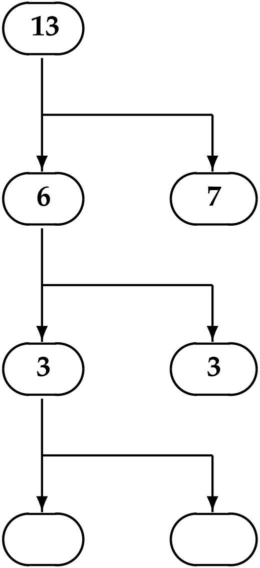
「半々」で考えてみると、



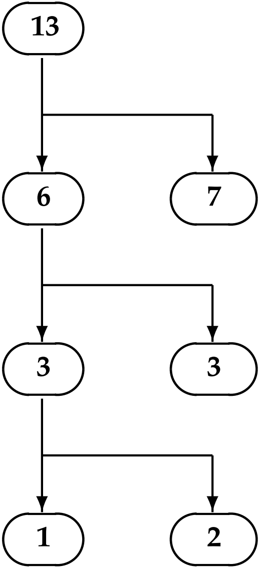
「半々」で考えてみると、



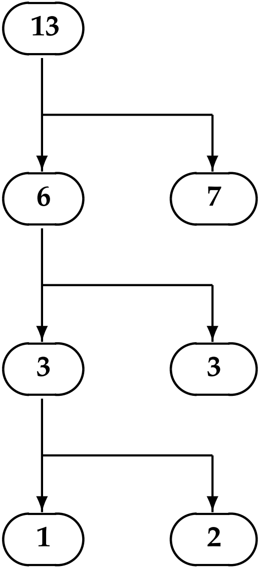
「半々」で考えてみると、



「半々」で考えてみると、

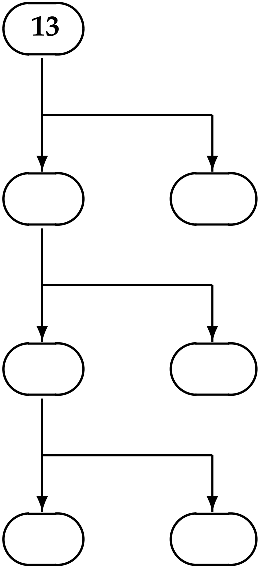


「半々」で考えてみると、

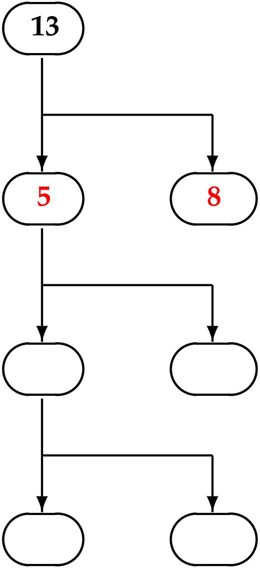


$$7^2 + 6^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 108$$ （半々分割）

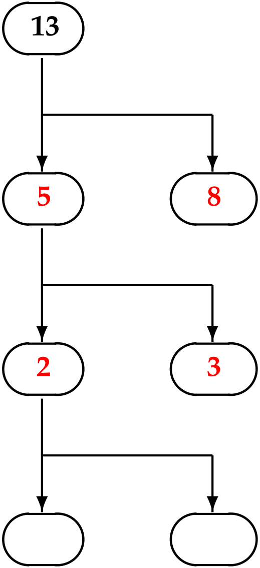
「最適」な分割は、



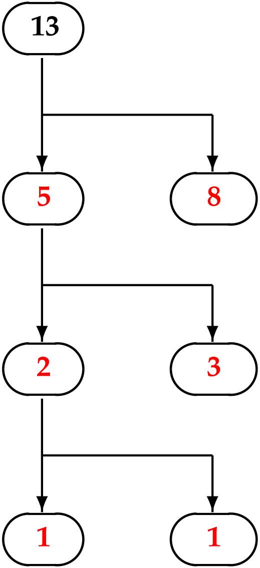
「最適」な分割は、



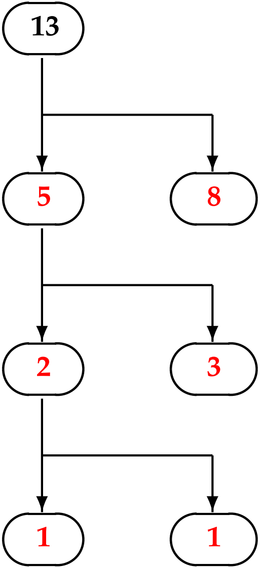
「最適」な分割は、



「最適」な分割は、

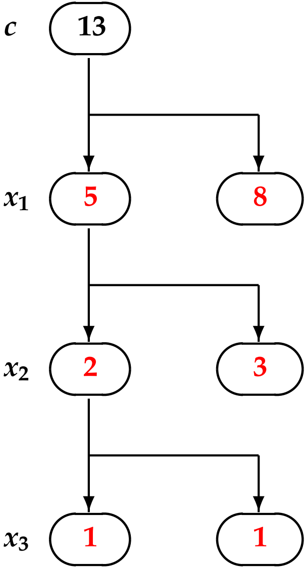


「最適」な分割は、



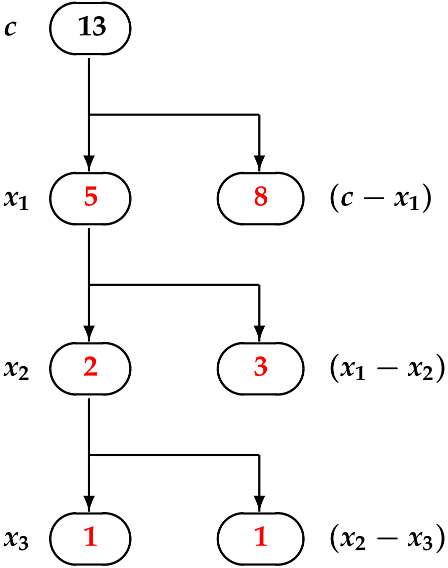
$$8^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 104$$ （最適分割）

「最適」な分割は、

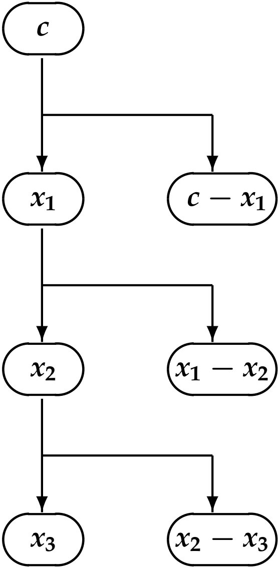


$$8^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 104$$ （最適分割）

「最適」な分割は、

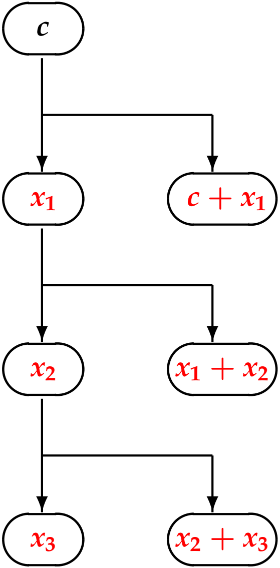


$$8^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 104$$ （最適分割）



minimize $(c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2$

subject to $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$

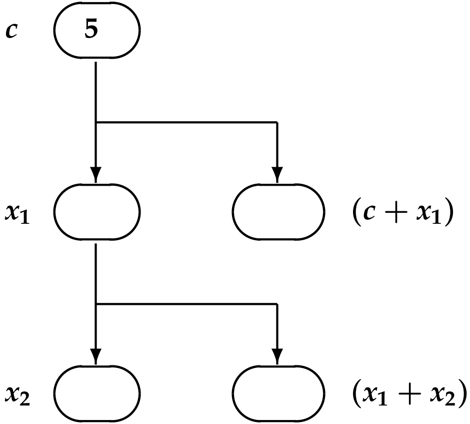


minimize $(c + x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2$

subject to $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$

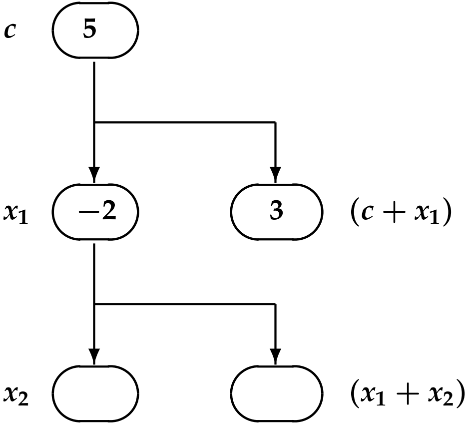
2 段階 2 割当問題

「最適」な割当は、

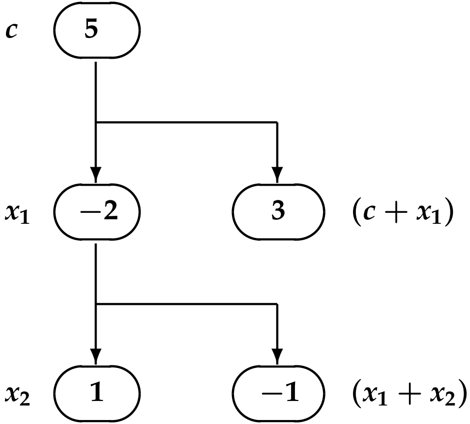


2 段階 2 割当問題

「**最適**」な割当は、

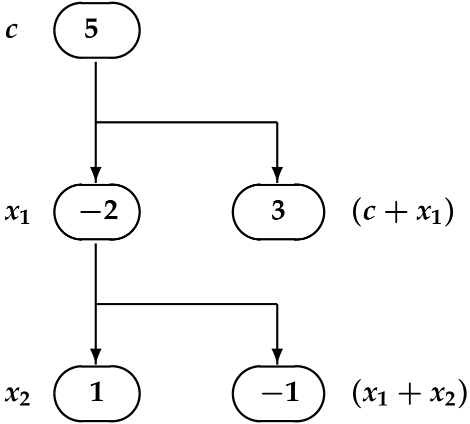


「**最適**」な割当は、

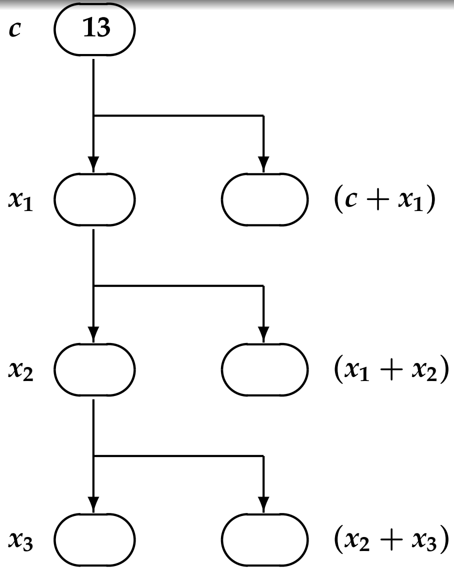


2 段階 2 割当問題

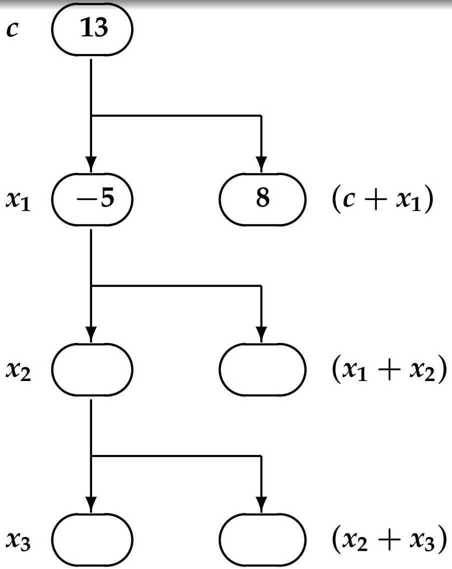
「最適」な割当は、



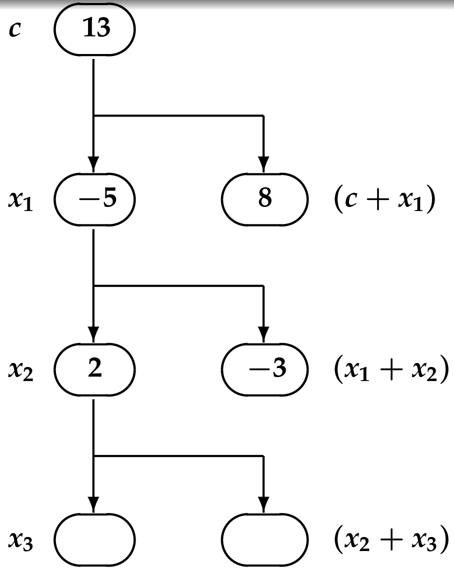
$$3^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 15$$（最適割当）


c
13
x1
(c + x1)
x2
(x1 + x2)
x3
(x2 + x3)

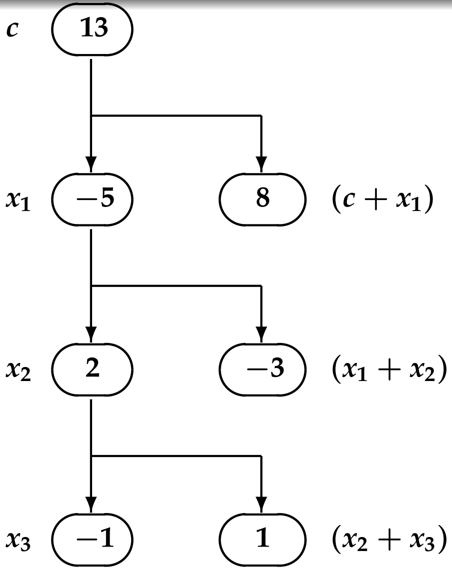
3 段階 2 割当問題



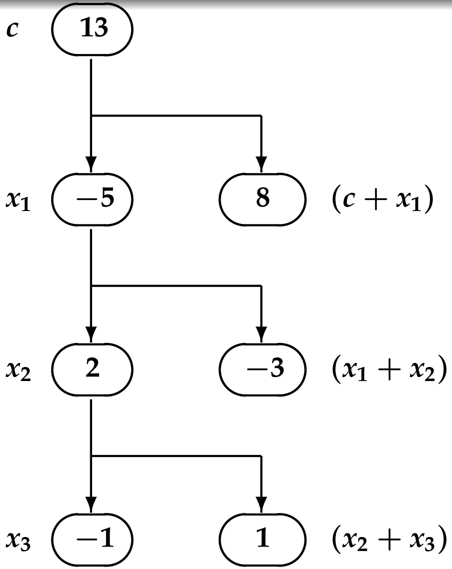
3 段階 2 割当問題



3 段階 2 割当問題



3 段階 2 割当問題



$8^2 + (-5)^2 + (-3)^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 104$ （最適割当）

Primal Problem (P_{c4})

主問題 (primal problem) として次の最小化問題を考える.

$$
(P_{c4}) \qquad \begin{array}{lll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{3} \left[(x_n + x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2 \right] & \\ \text{subject to} & \text{(i)} \;\; -\infty < x_n < \infty \quad n = 1, 2, 3, 4 & \\ & \text{(ii)} \;\; x_0 = c. & \end{array}
$$

Primal Problem (P_{c4})

主問題 (primal problem) として次の最小化問題を考える.

$$
(\mathrm{P}_{c4}) \qquad
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{3} \left[(x_n + x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2 \right] \\
\text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < x_n < \infty \quad n = 1, 2, 3, 4 \\
 & \text{(ii)} \; x_0 = c.
\end{array}
$$

主問題 (P_{c4}) の最小解 $\hat{x}$ と最小値 m_4 は,

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= (x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4) \\
&= \frac{c}{34} \left(\ 34\ ,\ \ -13\ ,\ \ 5\ ,\ \ -2\ ,\ \ 1\ \right) \\
m_4 &= \frac{21}{34} c^2
\end{aligned}
$$

である.

Dual Problem ($\mathrm{D_{c4}}$)

主問題 ($\mathrm{P_{c4}}$) に対する双対問題 (dual problem)($\mathrm{D_{c4}}$) は、次で表される.

$$
(\mathrm{D_{c4}}) \quad
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \sum_{n=0}^{2} \left[(\mu_n + \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2 \right] - \mu_3^2 \\
\text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 0, 1, 2, 3.
\end{array}
$$

Dual Problem ($\mathrm{D_{c4}}$)

主問題 ($\mathrm{P_{c4}}$) に対する双対問題 (dual problem)($\mathrm{D_{c4}}$) は、次で表される.

$$
(\mathrm{D_{c4}}) \quad
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \sum_{n=0}^{2} \left[(\mu_n + \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2 \right] - \mu_3^2 \\
\text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 0, 1, 2, 3.
\end{array}
$$

双対問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) の最大解 μ^* と最大値 M_4 は,

$$
\begin{aligned}
\mu^* &= (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*) \\
&= \frac{c}{34} \left(21,\ \ -8,\ \ 3,\ \ -1 \right)
\end{aligned}
$$

$$
M_4 = \frac{21}{34} c^2
$$

である.

$$
\text{主問題} (\mathrm{P_{c4}}) \begin{cases} \hat{x} &= (x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4) \\ &= \dfrac{c}{\boxed{34}}\left(\boxed{34},\ \boxed{-13},\ \boxed{5},\ \boxed{-2},\ \boxed{1} \right), \\ m_4 &= \dfrac{\boxed{21}}{\boxed{34}} c^2. \end{cases}
$$

$$
\text{双対問題} (\mathrm{D_{c4}}) \begin{cases} \mu^* &= (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*) \\ &= \dfrac{c}{\boxed{34}}\left(\boxed{21},\ \boxed{-8},\ \boxed{3},\ \boxed{-1} \right), \\ M_4 &= \dfrac{\boxed{21}}{\boxed{34}} c^2. \end{cases}
$$

$$
\text{主問題}\,(\mathrm{P_{c4}})
\begin{cases}
\hat{x} &= (x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4) \\
&= \dfrac{c}{\boxed{34}}\left(\boxed{34},\ \boxed{-13},\ \boxed{5},\ \boxed{-2},\ \boxed{1}\right), \\
m_4 &= \dfrac{\boxed{21}}{\boxed{34}}c^2.
\end{cases}
$$

$$
\text{双対問題}\,(\mathrm{D_{c4}})
\begin{cases}
\mu^* &= (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*) \\
&= \dfrac{c}{\boxed{34}}\left(\boxed{21},\ \boxed{-8},\ \boxed{3},\ \boxed{-1}\right), \\
M_4 &= \dfrac{\boxed{21}}{\boxed{34}}c^2.
\end{cases}
$$

主問題 $(\mathrm{P_{c4}})$ の最小解 $\hat{x}$ と、双対問題 $(\mathrm{D_{c4}})$ の最大解 μ^* 及び、最小値 m_4 と最大値 M_4 の間には交互フィボナッチ相補双対性と呼ばれる関係が成り立っている.

Fibonacci sequence

フィボナッチ数列は次の 2 階線形差分方程式（3 項間漸化式）

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \quad F_1 = 1,\ F_0 = 0$$

の解で定まる.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Table 1: Fibonacci sequence $\{F_n\}$

交互フィボナッチ相補双対性 (Alternately Fibonacci Complementary Duality) I

主問題 ($\mathrm{P_{c4}}$) と双対問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) の間には次の 3 の関係が成り立つ. これを交互フィボナッチ相補双対性という.

1. (双対性)

   主問題 ($\mathrm{P_{c4}}$) の最小値 m_4 と双対問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) の最大値 M_4 が等しい. すなわち、

$$
\begin{aligned}
m_4 &= \frac{21}{34}c^2 = \frac{F_8}{F_9}c^2, \\
M_4 &= \frac{21}{34}c^2 = \frac{F_8}{F_9}c^2,
\end{aligned}
$$

   であり、$m_4 = M_4$ が成り立つ.

交互フィボナッチ相補双対性 (Alternately Fibonacci Complementary Duality) II

2. (2 段階フィボナッチ)

主問題の最小解 $\hat{x}$ と双対問題の最大解 μ^* は共に交代フィボナッチ数列の後ろ向き 2 段跳びである.

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= (x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4) \\
&= \frac{c}{34}\left(\boxed{34},\ \boxed{-13},\ \boxed{5},\ \boxed{-2},\ \boxed{1} \right) \\
&= \frac{c}{F_9}\left(\boxed{F_9},\ \boxed{-F_7},\ \boxed{F_5},\ \boxed{-F_3},\ \boxed{F_1} \right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu^* &= (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*) \\
&= \frac{c}{34}\left(\boxed{21},\ \boxed{-8},\ \boxed{3},\ \boxed{-1} \right) \\
&= \frac{c}{F_9}\left(\boxed{F_8},\ \boxed{-F_6},\ \boxed{F_4},\ \boxed{-F_2} \right).
\end{aligned}
$$

交互フィボナッチ相補双対性 (Alternately Fibonacci Complementary Duality) III

3. (相補フィボナッチ)

主問題の最小解 $\hat{x}$ と双対問題の最大解 μ^* を交互に編むと、2 連交代フィボナッチ数列の後ろ向き（1 段跳び）である. すなわち、定数 $\dfrac{c}{F_9}$ を無視すれば、

$$\left(\boxed{x_0}, \quad \boxed{\hat{x}_1}, \quad \boxed{\hat{x}_2}, \quad \boxed{\hat{x}_3}, \quad \boxed{\hat{x}_4} \right)$$

$$\left(\quad \boxed{\mu_0^*}, \quad \boxed{\mu_1^*}, \quad \boxed{\mu_2^*}, \quad \boxed{\mu_3^*} \quad \right)$$

x_0	μ_0^*	$\hat{x}_1$	μ_1^*	$\hat{x}_2$	μ_2^*	$\hat{x}_3$	μ_3^*	$\hat{x}_4$
F_9	F_8	$-F_7$	$-F_6$	F_5	F_4	$-F_3$	$-F_2$	F_1

となる.

交互フィボナッチ条件 (Alternately Fibonacci Condition)

主問題 ($\mathrm{P_{c4}}$) 及び、双対問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) において、それぞれ次の 4 つの等式からなる系 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_c}}$ 及び $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_c}}$ を、それぞれ問題 ($\mathrm{P_{c4}}$)、($\mathrm{D_{c4}}$) に対する交互フィボナッチ条件という.

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_c}} \begin{cases} \dfrac{c+x_1}{F_8} = \dfrac{x_1}{-F_7}, & \dfrac{x_1+x_2}{-F_6} = \dfrac{x_2}{F_5}, \\ \dfrac{x_2+x_3}{F_4} = \dfrac{x_3}{-F_3}, & \dfrac{x_3+x_4}{-F_2} = \dfrac{x_4}{F_1}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_c}} \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{F_7} = \dfrac{\mu_0+\mu_1}{F_7} = \dfrac{\mu_1}{-F_6}, \\ \dfrac{\mu_1+\mu_2}{-F_5} = \dfrac{\mu_2}{F_4}, \quad \dfrac{\mu_2+\mu_3}{F_3} = \dfrac{\mu_3}{-F_2}. \end{cases}$$

交互フィボナッチ条件 (Alternately Fibonacci Condition)

主問題 ($\mathrm{P_{c4}}$) 及び、双対問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) において、それぞれ次の 4 つの等式からなる系 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_c}}$ 及び $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_c}}$ を、それぞれ問題 ($\mathrm{P_{c4}}$)、($\mathrm{D_{c4}}$) に対する交互フィボナッチ条件という.

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_c}} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{c+x_1}{F_8} = \dfrac{x_1}{-F_7}, & \dfrac{x_1+x_2}{-F_6} = \dfrac{x_2}{F_5}, \\[2ex] \dfrac{x_2+x_3}{F_4} = \dfrac{x_3}{-F_3}, & \dfrac{x_3+x_4}{-F_2} = \dfrac{x_4}{F_1}. \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_c}} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{c-\mu_0}{F_7} = \dfrac{\mu_0+\mu_1}{F_7} = \dfrac{\mu_1}{-F_6}, & \\[2ex] \dfrac{\mu_1+\mu_2}{-F_5} = \dfrac{\mu_2}{F_4}, & \dfrac{\mu_2+\mu_3}{F_3} = \dfrac{\mu_3}{-F_2}. \end{array} \right.$$

$(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_c}}$ の同値条件

主問題 (P_{c4}) の目的関数を $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ の 4 変数関数 $f(x)$ で表す.

$$f(x) := \sum_{n=0}^{3} \left[(x_n + x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2 \right].$$

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_c}} \iff \begin{cases} (c + x_1) + x_1 + (x_1 + x_2) & = & 0 \\ (x_1 + x_2) + x_2 + (x_2 + x_3) & = & 0 \\ (x_2 + x_3) + x_3 + (x_3 + x_4) & = & 0 \\ (x_3 + x_4) + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

目的関数 $f(x)$ は x の 2 次の凸関数であることから、問題 (P_{c4}) の最小解 $\hat{x} = (x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4)$ は、最適化の 1 階条件を満たす.

問題 (P_{c4}) の交互フィボナッチ分割

$$(\mathbf{AF})_{\mathbf{P}_c} \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \dfrac{c + x_1}{F_8} = \dfrac{x_1}{-F_7}, & \dfrac{x_1 + x_2}{-F_6} = \dfrac{x_2}{F_5}, \\[2ex] \dfrac{x_2 + x_3}{F_4} = \dfrac{x_3}{-F_3}, & \dfrac{x_3 + x_4}{-F_2} = \dfrac{x_4}{F_1}, \end{cases}$$

問題 (P_{c4}) の交互フィボナッチ分割

$$(\mathbf{AF})_{\mathbf{P}_c} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \dfrac{c+x_1}{F_8} = \dfrac{x_1}{-F_7}, & \dfrac{x_1+x_2}{-F_6} = \dfrac{x_2}{F_5}, \\ \dfrac{x_2+x_3}{F_4} = \dfrac{x_3}{-F_3}, & \dfrac{x_3+x_4}{-F_2} = \dfrac{x_4}{F_1}, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{c-(-x_1)}{F_8} = \dfrac{-x_1}{F_7}, & \dfrac{-x_1-x_2}{F_6} = \dfrac{x_2}{F_5}, \\ \dfrac{x_2-(-x_3)}{F_4} = \dfrac{-x_3}{F_3}, & \dfrac{-x_3-x_4}{F_2} = \dfrac{x_4}{F_1}, \end{cases}$$

問題 (P_{c4}) の交互フィボナッチ分割

$$
(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}_c} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \dfrac{c+x_1}{F_8} = \dfrac{x_1}{-F_7}, & \dfrac{x_1+x_2}{-F_6} = \dfrac{x_2}{F_5}, \\[2ex] \dfrac{x_2+x_3}{F_4} = \dfrac{x_3}{-F_3}, & \dfrac{x_3+x_4}{-F_2} = \dfrac{x_4}{F_1}, \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} \dfrac{c-(-x_1)}{F_8} = \dfrac{-x_1}{F_7}, & \dfrac{-x_1-x_2}{F_6} = \dfrac{x_2}{F_5}, \\[2ex] \dfrac{x_2-(-x_3)}{F_4} = \dfrac{-x_3}{F_3}, & \dfrac{-x_3-x_4}{F_2} = \dfrac{x_4}{F_1}, \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} \dfrac{c-(-x_1)}{21} = \dfrac{-x_1}{13}, & \dfrac{-x_1-x_2}{8} = \dfrac{x_2}{5}, \\[2ex] \dfrac{x_2-(-x_3)}{3} = \dfrac{-x_3}{2}, & \dfrac{-x_3-x_4}{1} = \dfrac{x_4}{1}. \end{cases}
$$

問題 (P_{c4}) の交互フィボナッチ分割による最適解の解法

$x_0 = c\ (>0)$

$$\frac{c-(-x_1)}{21} = \frac{-x_1}{13}, \qquad \frac{-x_1 - x_2}{8} = \frac{x_2}{5},$$

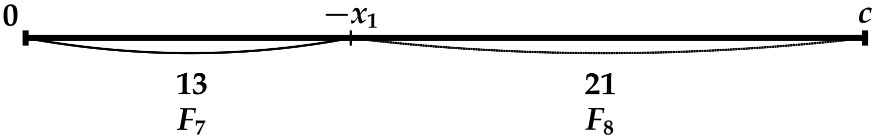
$$\frac{x_2-(-x_3)}{3} = \frac{-x_3}{2}, \qquad \frac{-x_3 - x_4}{1} = \frac{x_4}{1}.$$

問題 (P_{c4}) の交互フィボナッチ分割による最適解の解法

$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c-(-x_1)}{21} = \frac{-x_1}{13}, \qquad \frac{-x_1-x_2}{8} = \frac{x_2}{5},$$

$$\frac{x_2-(-x_3)}{3} = \frac{-x_3}{2}, \qquad \frac{-x_3-x_4}{1} = \frac{x_4}{1}.$$

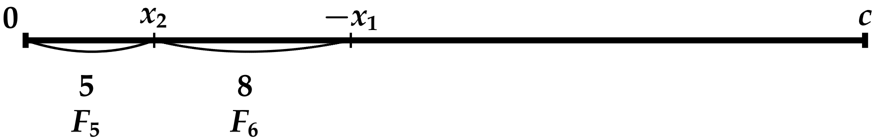


問題 (P_{c4}) の交互フィボナッチ分割による最適解の解法

$x_0 = c \ (> 0)$

$$\frac{c-(-x_1)}{21} = \frac{-x_1}{13}, \qquad \frac{-x_1 - x_2}{8} = \frac{x_2}{5},$$

$$\frac{x_2-(-x_3)}{3} = \frac{-x_3}{2}, \qquad \frac{-x_3 - x_4}{1} = \frac{x_4}{1}.$$

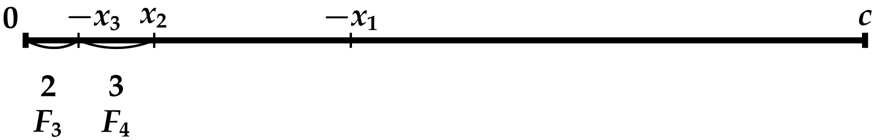


問題 ($\mathrm{P_{c4}}$) の交互フィボナッチ分割による最適解の解法

$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c-(-x_1)}{21} = \frac{-x_1}{13}, \qquad \frac{-x_1 - x_2}{8} = \frac{x_2}{5},$$

$$\frac{x_2-(-x_3)}{3} = \frac{-x_3}{2}, \qquad \frac{-x_3 - x_4}{1} = \frac{x_4}{1}.$$

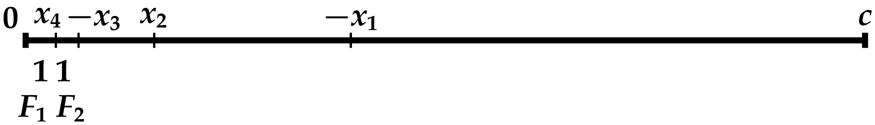


問題 (P$_{c4}$) の交互フィボナッチ分割による最適解の解法

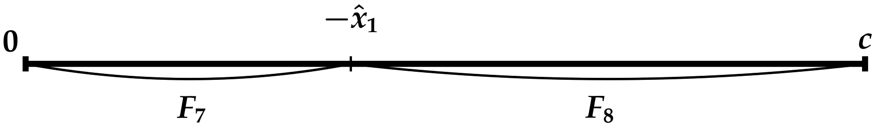
$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c - (-x_1)}{21} = \frac{-x_1}{13}, \qquad \frac{-x_1 - x_2}{8} = \frac{x_2}{5},$$

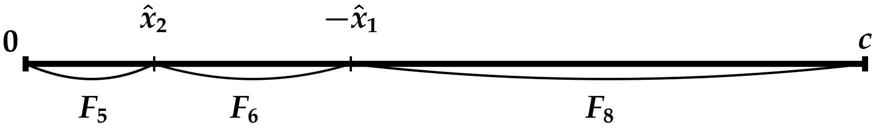
$$\frac{x_2 - (-x_3)}{3} = \frac{-x_3}{2}, \qquad \frac{-x_3 - x_4}{1} = \frac{x_4}{1}.$$



$(\mathbf{P_{c4}})$ の最適解

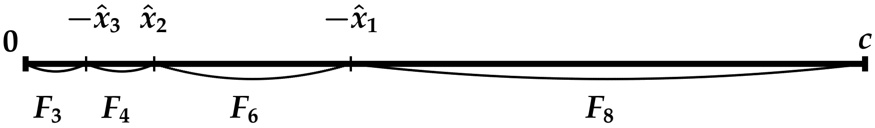


$$(\mathrm{P_{c4}})\text{ の最適解 }\left\{\begin{array}{l} -\hat{x}_1 = \dfrac{F_7}{F_7+F_8}\,c \end{array}\right.$$

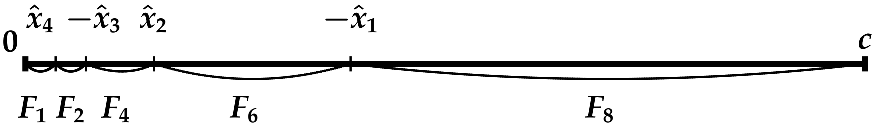


$(\mathrm{P_{c4}})$ の最適解

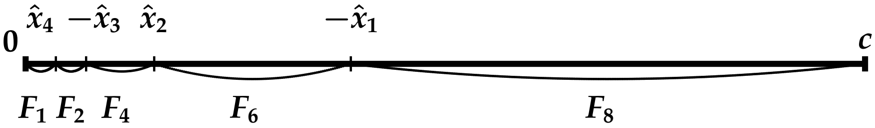
$$\begin{cases} -\hat{x}_1 = \dfrac{F_7}{F_7 + F_8}\, c \\ \hat{x}_2 = \dfrac{F_5}{F_5 + F_6}\, (-\hat{x}_1) \end{cases}$$



$(\mathrm{P_{c4}})$ の最適解
$$\left\{\begin{array}{rcl} -\hat{x}_1 &=& \dfrac{F_7}{F_7+F_8}\,c \\ \hat{x}_2 &=& \dfrac{F_5}{F_5+F_6}\,(-\hat{x}_1) \\ -\hat{x}_3 &=& \dfrac{F_3}{F_3+F_4}\,\hat{x}_2 \end{array}\right.$$



$(\mathrm{P_{c4}})$ の最適解
$$\begin{cases} -\hat{x}_1 &= \dfrac{F_7}{F_7+F_8}\,c \\ \hat{x}_2 &= \dfrac{F_5}{F_5+F_6}\,(-\hat{x}_1) \\ -\hat{x}_3 &= \dfrac{F_3}{F_3+F_4}\,\hat{x}_2 \\ \hat{x}_4 &= \dfrac{F_1}{F_1+F_2}\,(-\hat{x}_3) \end{cases}$$



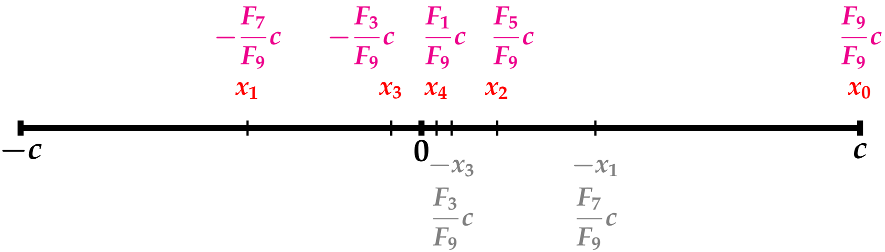
(P_{c4}) の最適解

$$
\begin{cases}
-\hat{x}_1 = \dfrac{F_7}{F_7+F_8}\,c = \dfrac{F_7}{F_9}\,c\,, \\[2ex]
\hat{x}_2 = \dfrac{F_5}{F_5+F_6}\,(-\hat{x}_1) = \dfrac{F_5}{F_7}\cdot\dfrac{F_7}{F_9}\,c\,, \\[2ex]
-\hat{x}_3 = \dfrac{F_3}{F_3+F_4}\,\hat{x}_2 = \dfrac{F_3}{F_5}\cdot\dfrac{F_5}{F_7}\cdot\dfrac{F_7}{F_9}\,c\,, \\[2ex]
\hat{x}_4 = \dfrac{F_1}{F_1+F_2}\,(-\hat{x}_3) = \dfrac{F_1}{F_3}\cdot\dfrac{F_3}{F_5}\cdot\dfrac{F_5}{F_7}\cdot\dfrac{F_7}{F_9}\,c\,.
\end{cases}
$$

すなわち、主問題 $(\mathrm{P_{c4}})$ の最小解 $\hat{x}$ は、

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= (x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4) \\
&= \frac{c}{F_9}\left(F_9\,,\quad -F_7\,,\quad F_5\,,\quad -F_3\,,\quad F_1 \right)
\end{aligned}
$$

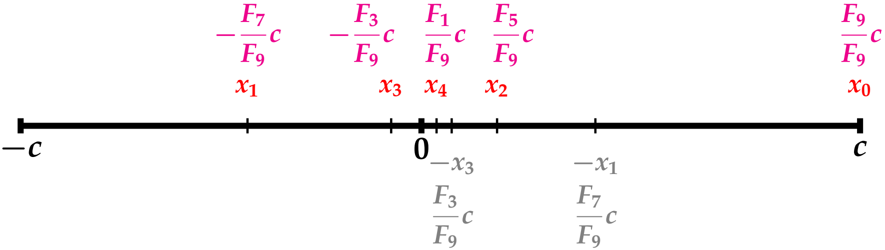
となる.



すなわち、主問題 $(\mathrm{P_{c4}})$ の最小解 $\hat{x}$ は、

$$\begin{aligned}\hat{x} &= (x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4) \\ &= \frac{c}{F_9}\left(\ F_9\,,\quad -F_7\,,\quad F_5\,,\quad -F_3\,,\quad F_1\ \right)\end{aligned}$$

となる.



この列、$(x_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$ を交互フィボナッチ経路という.

問題 ($\mathrm{P_{c4}}$) の最適値の導出

主問題 ($\mathrm{P_{c4}}$) の目的関数は、

$$f(x) := \sum_{n=0}^{3} \left[(x_n + x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2 \right]$$

であり、最小解 $\hat{x}$ は、

$$\hat{x} = \frac{c}{F_9} \left(F_9 , \quad -F_7 , \quad F_5 , \quad -F_3 , \quad F_1 \right)$$

なので、

問題 (P_{c4}) の最適値の導出

主問題 (P_{c4}) の目的関数は、

$$f(x) := \sum_{n=0}^{3} \left[(x_n + x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2 \right]$$

であり、最小解 $\hat{x}$ は、

$$\hat{x} = \frac{c}{F_9} \left(F_9 , \quad -F_7 , \quad F_5 , \quad -F_3 , \quad F_1 \right)$$

なので、

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) = \frac{c^2}{F_9^2} \Big\{ & \left[(F_9 - F_7)^2 + (-F_7)^2 \right] + \left[(-F_7 + F_5)^2 + F_5^2 \right] \\ & + \left[(F_5 - F_3)^2 + (-F_3)^2 \right] + \left[(-F_3 + F_1)^2 + F_1^2 \right] \Big\} \end{aligned}$$

となる。

Lucas Formula

リュカの公式（Lucas formula）

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Table 1: Fibonacci sequence $\{F_n\}$

Lucas Formula

リュカの公式（Lucas formula）

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Table 1: Fibonacci sequence $\{F_n\}$

例えば、$n = 5$ では、

$$\begin{aligned} & F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 \\ = & \ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 \\ = & \ 40 \\ = & \ F_5 F_6 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(\hat{x}) \;=\; \frac{c^2}{F_9^2}\Bigg\{ & \left[(F_9 - F_7)^2 + (-F_7)^2\right] + \left[(-F_7 + F_5)^2 + F_5^2\right] \\
& + \left[(F_5 - F_3)^2 + (-F_3)^2\right] + \left[(-F_3 + F_1)^2 + F_1^2\right] \Bigg\}
\end{aligned}
$$

より、

$$f(\hat{x}) = \frac{c^2}{F_9^2}\Big\{\left[(F_9 - F_7)^2 + (-F_7)^2\right] + \left[(-F_7 + F_5)^2 + F_5^2\right]$$
$$+ \left[(F_5 - F_3)^2 + (-F_3)^2\right] + \left[(-F_3 + F_1)^2 + F_1^2\right]\Big\}$$

より、

$$\begin{aligned}
F_9^2 \frac{f(\hat{x})}{c^2} &= \left[(F_9 - F_7)^2 + (-F_7)^2\right] + \left[(-F_7 + F_5)^2 + F_5^2\right] \\
&\quad + \left[(F_5 - F_3)^2 + (-F_3)^2\right] + \left[(-F_3 + F_1)^2 + F_1^2\right] \\
&= F_8^2 + F_7^2 + F_6^2 + F_5^2 + F_4^2 + F_3^2 + F_2^2 + F_1^2 \\
&= F_8 \cdot F_9.
\end{aligned}$$

すなわち、最小値は $f(\hat{x}) = \dfrac{F_8}{F_9} c^2 = \dfrac{21}{34}\, c^2$ である.

交互フィボナッチ条件 (Alternately Fibonacci Condition)

主問題 $(\mathrm{P_{c4}})$ 及び、双対問題 $(\mathrm{D_{c4}})$ において、それぞれ次の 4 つの等式からなる系 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_c}}$ 及び $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_c}}$ を、それぞれ問題 $(\mathrm{P_{c4}})$、$(\mathrm{D_{c4}})$ に対する交互フィボナッチ条件という.

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_c}} \begin{cases} \dfrac{c+x_1}{F_8} = \dfrac{x_1}{-F_7}, \quad \dfrac{x_1+x_2}{-F_6} = \dfrac{x_2}{F_5}, \\[2ex] \dfrac{x_2+x_3}{F_4} = \dfrac{x_3}{-F_3}, \quad \dfrac{x_3+x_4}{-F_2} = \dfrac{x_4}{F_1}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_c}} \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{F_7} = \dfrac{\mu_0+\mu_1}{F_7} = \dfrac{\mu_1}{-F_6}, \\[2ex] \dfrac{\mu_1+\mu_2}{-F_5} = \dfrac{\mu_2}{F_4}, \quad \dfrac{\mu_2+\mu_3}{F_3} = \dfrac{\mu_3}{-F_2}. \end{cases}$$

交互フィボナッチ条件 (Alternately Fibonacci Condition)

主問題 $(\mathrm{P_{c4}})$ 及び、双対問題 $(\mathrm{D_{c4}})$ において、それぞれ次の 4 つの等式からなる系 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_c}}$ 及び $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_c}}$ を、それぞれ問題 $(\mathrm{P_{c4}})$、$(\mathrm{D_{c4}})$ に対する**交互フィボナッチ条件**という.

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_c}} \begin{cases} \dfrac{c+x_1}{F_8} = \dfrac{x_1}{-F_7}, & \dfrac{x_1+x_2}{-F_6} = \dfrac{x_2}{F_5}, \\[2ex] \dfrac{x_2+x_3}{F_4} = \dfrac{x_3}{-F_3}, & \dfrac{x_3+x_4}{-F_2} = \dfrac{x_4}{F_1}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_c}} \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{F_7} = \dfrac{\mu_0+\mu_1}{F_7} = \dfrac{\mu_1}{-F_6}, \\[2ex] \dfrac{\mu_1+\mu_2}{-F_5} = \dfrac{\mu_2}{F_4}, \quad \dfrac{\mu_2+\mu_3}{F_3} = \dfrac{\mu_3}{-F_2}. \end{cases}$$

$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_c}}$ の同値条件

双対問題 $(\mathrm{D_{c4}})$ の目的関数を $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ の 4 変数関数 $g(\mu)$ で表す.

$$g(\mu) := 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \sum_{n=0}^{2} \left[(\mu_n + \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2 \right] - \mu_3^2.$$

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_c}} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -(c - \mu_0) + (\mu_0 + \mu_1) & = & 0 \\ (\mu_0 + \mu_1) + \mu_1 + (\mu_1 + \mu_2) & = & 0 \\ (\mu_1 + \mu_2) + \mu_2 + (\mu_2 + \mu_3) & = & 0 \\ (\mu_2 + \mu_3) + 2\mu_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \frac{\partial g}{\partial \mu_n} = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

目的関数 $g(\mu)$ は μ の 2 次の凹関数であることから、問題 $(\mathrm{D_{c4}})$ の最大解 $\mu^* = (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*)$ は、最適化の 1 階条件を満たす。

問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) の交互フィボナッチ分割

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_c}} \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{F_7} = \dfrac{\mu_0+\mu_1}{F_7} = \dfrac{\mu_1}{-F_6}, \\ \dfrac{\mu_1+\mu_2}{-F_5} = \dfrac{\mu_2}{F_4}, \quad \dfrac{\mu_2+\mu_3}{F_3} = \dfrac{\mu_3}{-F_2}, \end{cases}$$

問題 $(\mathrm{D_{c4}})$ の交互フィボナッチ分割

$$
(\mathbf{AF})_{\mathrm{D_c}} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{F_7} = \dfrac{\mu_0+\mu_1}{F_7} = \dfrac{\mu_1}{-F_6}, \\ \dfrac{\mu_1+\mu_2}{-F_5} = \dfrac{\mu_2}{F_4}, \quad \dfrac{\mu_2+\mu_3}{F_3} = \dfrac{\mu_3}{-F_2}, \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{F_7} = \dfrac{\mu_0-(-\mu_1)}{F_7} = \dfrac{-\mu_1}{F_6}, \\ \dfrac{-\mu_1-\mu_2}{F_5} = \dfrac{\mu_2}{F_4}, \quad \dfrac{\mu_2-(-\mu_3)}{F_3} = \dfrac{-\mu_3}{F_2}, \end{cases}
$$

問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) の交互フィボナッチ分割

$$(\mathbf{AF})_{\mathrm{D_c}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{F_7} = \dfrac{\mu_0+\mu_1}{F_7} = \dfrac{\mu_1}{-F_6}, \\ \dfrac{\mu_1+\mu_2}{-F_5} = \dfrac{\mu_2}{F_4}, \quad \dfrac{\mu_2+\mu_3}{F_3} = \dfrac{\mu_3}{-F_2}, \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{F_7} = \dfrac{\mu_0-(-\mu_1)}{F_7} = \dfrac{-\mu_1}{F_6}, \\ \dfrac{-\mu_1-\mu_2}{F_5} = \dfrac{\mu_2}{F_4}, \quad \dfrac{\mu_2-(-\mu_3)}{F_3} = \dfrac{-\mu_3}{F_2}, \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{13} = \dfrac{\mu_0-(-\mu_1)}{13} = \dfrac{-\mu_1}{8}, \\ \dfrac{-\mu_1-\mu_2}{5} = \dfrac{\mu_2}{3}, \quad \dfrac{\mu_2-(-\mu_3)}{2} = \dfrac{-\mu_3}{1}. \end{cases}$$

問題 (D$_{c4}$) の交互フィボナッチ分割による最適解の解法

$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c-\mu_0}{13} = \frac{\mu_0 - (-\mu_1)}{13} = \frac{-\mu_1}{8},$$

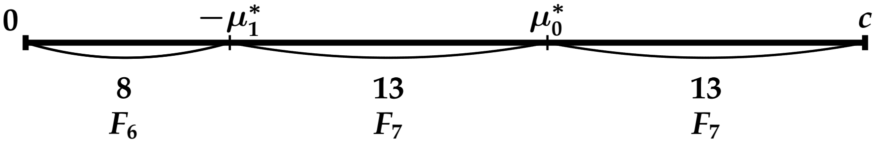
$$\frac{-\mu_1 - \mu_2}{5} = \frac{\mu_2}{3}, \quad \frac{\mu_2 - (-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{1}.$$

問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) の交互フィボナッチ分割による最適解の解法

$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c - \mu_0}{13} = \frac{\mu_0 - (-\mu_1)}{13} = \frac{-\mu_1}{8},$$

$$\frac{-\mu_1 - \mu_2}{5} = \frac{\mu_2}{3}, \quad \frac{\mu_2 - (-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{1}.$$

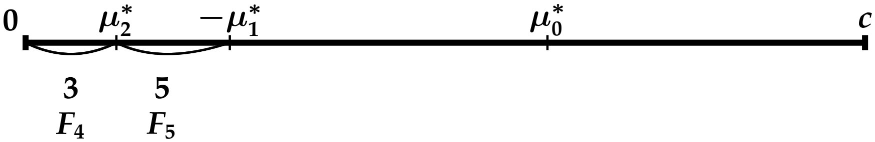


問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) の交互フィボナッチ分割による最適解の解法

$x_0 = c \ (> 0)$

$$\frac{c - \mu_0}{13} = \frac{\mu_0 - (-\mu_1)}{13} = \frac{-\mu_1}{8},$$

$$\frac{-\mu_1 - \mu_2}{5} = \frac{\mu_2}{3}, \quad \frac{\mu_2 - (-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{1}.$$

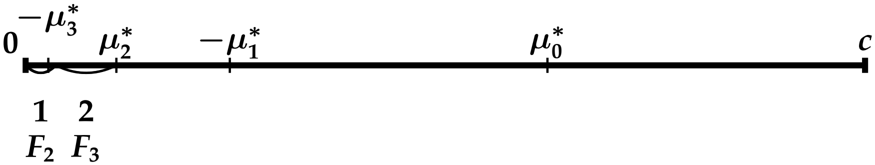


問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) の交互フィボナッチ分割による最適解の解法

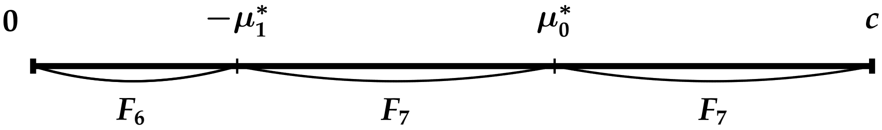
$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c - \mu_0}{13} = \frac{\mu_0 - (-\mu_1)}{13} = \frac{-\mu_1}{8},$$

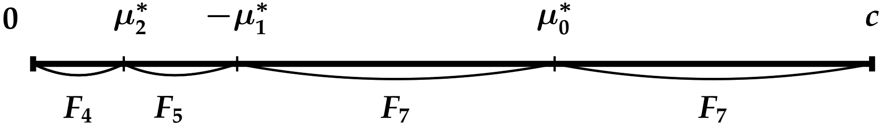
$$\frac{-\mu_1 - \mu_2}{5} = \frac{\mu_2}{3}, \quad \frac{\mu_2 - (-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{1}.$$



($\mathbf{D_{c4}}$) の最適解

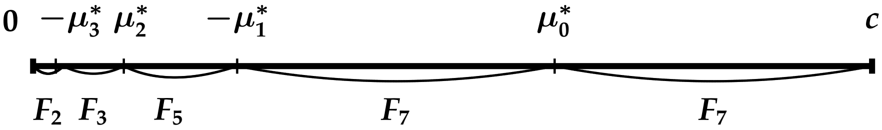


$$
(\mathrm{D}_{c4})\text{ の最適解}\quad
\left\{
\begin{array}{rcccl}
\mu_0^* & = & \dfrac{F_6 + F_7}{F_6 + F_7 + F_7}\, c & = & \dfrac{F_8}{F_9}\, c\,, \\[2ex]
-\,\mu_1^* & = & \dfrac{F_6}{F_6 + F_7 + F_7}\, c & = & \dfrac{F_6}{F_9}\, c\,,
\end{array}
\right.
$$



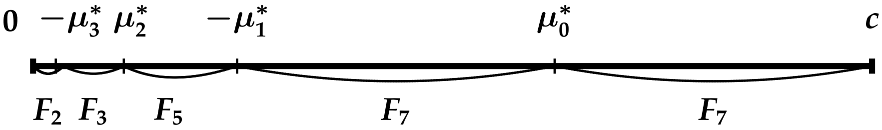
$(\mathrm{D_{c4}})$ の最適解

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu_0^* &=& \dfrac{F_6+F_7}{F_6+F_7+F_7}\,c \;=\; \dfrac{F_8}{F_9}\,c\,, \\ -\,\mu_1^* &=& \dfrac{F_6}{F_6+F_7+F_7}\,c \;=\; \dfrac{F_6}{F_9}\,c\,, \\ \mu_2^* &=& \dfrac{F_4}{F_4+F_5}\,(-\mu_1^*) \end{array}\right.$$



(D_{c4}) の最適解

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
\mu_0^* & = & \dfrac{F_6 + F_7}{F_6 + F_7 + F_7}\, c & = \dfrac{F_8}{F_9}\, c\,, \\[2ex]
-\,\mu_1^* & = & \dfrac{F_6}{F_6 + F_7 + F_7}\, c & = \dfrac{F_6}{F_9}\, c\,, \\[2ex]
\mu_2^* & = & \dfrac{F_4}{F_4 + F_5}\, (-\mu_1^*) & \\[2ex]
-\,\mu_3^* & = & \dfrac{F_2}{F_2 + F_3}\, \mu_2^* &
\end{array}
\right.
$$

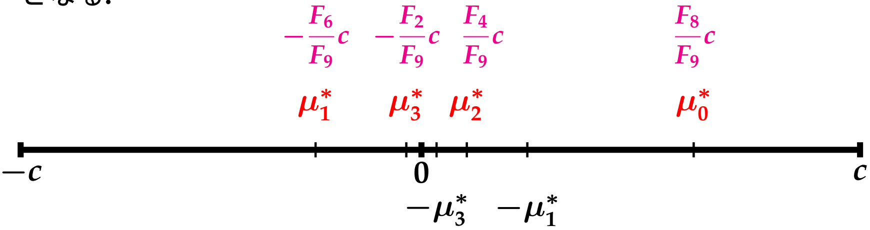


$$
(\mathrm{D_{c4}})\ \text{の最適解}\quad
\left\{
\begin{array}{rcccl}
\mu_0^* & = & \dfrac{F_6+F_7}{F_6+F_7+F_7}\,c & = & \dfrac{F_8}{F_9}\,c\,, \\[2ex]
-\,\mu_1^* & = & \dfrac{F_6}{F_6+F_7+F_7}\,c & = & \dfrac{F_6}{F_9}\,c\,, \\[2ex]
\mu_2^* & = & \dfrac{F_4}{F_4+F_5}\,(-\mu_1^*) & = & \dfrac{F_4}{F_6}\cdot\dfrac{F_6}{F_9}\,c\,, \\[2ex]
-\,\mu_3^* & = & \dfrac{F_2}{F_2+F_3}\,\mu_2^* & = & \dfrac{F_2}{F_4}\cdot\dfrac{F_4}{F_6}\cdot\dfrac{F_6}{F_9}\,c\,.
\end{array}
\right.
$$

すなわち、双対問題 $(\mathrm{D_{c4}})$ の最大解 μ^* は、

$$
\begin{aligned}
\mu^* &= (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*) \\
&= \frac{c}{F_9}\left(F_8\,,\quad -F_6\,,\quad F_4\,,\quad -F_2 \right)
\end{aligned}
$$

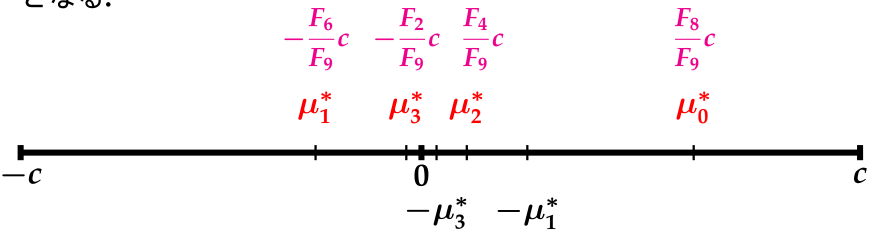
となる.



すなわち、双対問題 $(\mathrm{D_{c4}})$ の最大解 μ^* は、

$$\begin{aligned}\mu^* &= (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*)\\ &= \frac{c}{F_9}\left(\ F_8\,,\quad -F_6\,,\quad F_4\,,\quad -F_2\ \right)\end{aligned}$$

となる.



列 $(\mu_0^*, \mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*)$ は交互フィボナッチ経路を構成している.

問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) の最適値の導出

双対問題 ($\mathrm{D_{c4}}$) の目的関数は、

$$g(\mu) := 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \sum_{n=0}^{2}\left[(\mu_n + \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2\right] - \mu_3^2$$

であり、最大解 μ^* は、

$$\mu^* \quad = \quad \frac{c}{F_9}\left(\; F_8\,, \quad -F_6\,, \quad F_4\,, \quad -F_2 \;\right)$$

なので、

問題 $(\mathrm{D_{c4}})$ の最適値の導出

双対問題 $(\mathrm{D_{c4}})$ の目的関数は、

$$g(\mu) := 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \sum_{n=0}^{2}\left[(\mu_n + \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2\right] - \mu_3^2$$

であり、最大解 μ^* は、

$$\mu^* = \frac{c}{F_9}\left(F_8\,,\quad -F_6\,,\quad F_4\,,\quad -F_2 \right)$$

なので、

$$\begin{aligned} g(\mu^*) = \frac{c^2}{F_9^2}\Big\{ & 2F_8F_9 - F_8^2 - \left[(F_8 - F_6)^2 + (-F_6)^2\right] \\ & - \left[(-F_6 + F_4)^2 + F_4^2\right] \\ & - \left[(F_4 - F_2)^2 + (-F_2)^2\right] - (-F_2)^2 \Big\}. \end{aligned}$$

リュカの公式より、

$$\begin{aligned} g(\mu^*)F_9^2/c^2 &= 2F_8F_9 - F_8^2 - \left[(F_8 - F_6)^2 + (-F_6)^2\right] \\ &\qquad - \left[(-F_6 + F_4)^2 + F_4^2\right] \\ &\qquad - \left[(F_4 - F_2)^2 + (-F_2)^2\right] - (-F_2)^2 \\ &= 2F_8F_9 - \left[F_8^2 + F_7^2 + F_6^2 + F_5^2 + F_4^2 + F_3^2 + F_2^2 + F_1^2\right] \\ &= 2F_8F_9 - F_8F_9 \\ &= F_8F_9 \end{aligned}$$

となり、すなわち、最大値は $g(\mu^*) = \frac{F_8}{F_9}c^2 = \frac{21}{34}c^2$ である.

Primal Problem (P_{s8})

主問題 (primal problem) として次の最小化問題を考える。

$$
(\mathrm{P_{s8}}) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{7}\left[F_{8-n}(x_n + x_{n+1})^2 + \frac{F_{7-n}^2}{F_{8-n}}x_{n+1}^2\right] + \frac{F_0F_1}{F_2}x_8^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < x_n < \infty \quad n = 1, 2, \cdots, 8 \\ & \text{(ii)} \quad x_0 = c. \end{array}
$$

Primal Problem (P_{s8})

主問題 (primal problem) として次の最小化問題を考える。

$$
(\mathrm{P}_{s8}) \quad \begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{7}\left[F_{8-n}(x_n + x_{n+1})^2 + \frac{F_{7-n}^2}{F_{8-n}}x_{n+1}^2\right] + \frac{F_0F_1}{F_2}x_8^2 \\
\text{subject to} & \text{(i)} \ -\infty < x_n < \infty \quad n = 1, 2, \cdots, 8 \\
 & \text{(ii)} \ x_0 = c.
\end{array}
$$

主問題 (P_{s8}) の最小解 $\hat{x}$ と最小値 m_8 は、

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_8) \\
&= \frac{c}{34}\left(-21, \ 13, \ -8, \ 5, \ -3, \ 2, \ -1, \ 1 \right) \\
m_8 &= \frac{13 \cdot 21}{34}c^2
\end{aligned}
$$

である。

Dual Problem ($\mathrm{D_{s8}}$)

主問題 ($\mathrm{P_{s8}}$) に対する双対問題 (dual problem)($\mathrm{D_{s8}}$) は、次で表される。

$$
(\mathrm{D_{s8}}) \quad
\begin{array}{lll}
\text{Maximize} & \multicolumn{2}{l}{2cF_8\mu_0 - \displaystyle\sum_{n=0}^{6} F_{8-n}\left[\mu_n^2 + \left(\frac{F_{8-n}}{F_{7-n}}\mu_n + \mu_{n+1}\right)^2\right] - F_1\mu_7^2} \\
\text{subject to} & \text{(i)} & -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 0, 1, \cdots, 6 \\
 & \text{(ii)} & \mu_7 = 0.
\end{array}
$$

Dual Problem (D_{s8})

主問題 (P_{s8}) に対する双対問題 (dual problem)(D_{s8}) は、次で表される。

$$
(\mathrm{D}_{s8}) \quad
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & 2cF_8\mu_0 - \sum_{n=0}^{6} F_{8-n}\left[\mu_n^2 + \left(\frac{F_{8-n}}{F_{7-n}}\mu_n + \mu_{n+1}\right)^2\right] - F_1\mu_7^2 \\
\text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 0, 1, \cdots, 6 \\
 & \text{(ii)} \quad \mu_7 = 0.
\end{array}
$$

双対問題 (D_{s8}) の最大解 μ^* と最大値 M_8 は、

$$
\begin{aligned}
\mu^* &= (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \cdots,\ \mu_6^*,\ \mu_7) \\
&= \frac{c}{34}\left(\ 13,\ \ -8,\ \ 5,\ \ -3,\ \ 2,\ \ -1,\ \ 1,\ \ 0\ \right)
\end{aligned}
$$

$$
M_8 = \frac{13 \cdot 21}{34} c^2
$$

である。

$(\mathbf{P_{s8}})$ において、

$$\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4,\ \hat{x}_5,\ \hat{x}_6,\ \hat{x}_7,\ \hat{x}_8)$$

$$= \frac{c}{\boxed{34}}\left(\boxed{-21},\ \boxed{13},\ \boxed{-8},\ \boxed{5},\ \boxed{-3},\ \boxed{2},\ \boxed{-1},\ \boxed{1}\right)$$

$$m_4 = \frac{\boxed{13}\,.\,\boxed{21}}{\boxed{34}}c^2.$$

$(\mathbf{D_{s8}})$ において、

$$\mu^* = (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*,\ \mu_4^*,\ \mu_5^*,\ \mu_6^*,\ \mu_7)$$

$$= \frac{c}{\boxed{34}}\left(\boxed{13},\ \boxed{-8},\ \boxed{5},\ \boxed{-3},\ \boxed{2},\ \boxed{-1},\ \boxed{1},\ \boxed{0}\right)$$

$$M_8 = \frac{\boxed{13}\,.\,\boxed{21}}{\boxed{34}}c^2.$$

(P_{s8}) において、

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5, \hat{x}_6, \hat{x}_7, \hat{x}_8) \\
&= \frac{c}{\boxed{34}} \left(\boxed{-21}, \boxed{13}, \boxed{-8}, \boxed{5}, \boxed{-3}, \boxed{2}, \boxed{-1}, \boxed{1} \right) \\
m_4 &= \frac{\boxed{13}\,.\,\boxed{21}}{\boxed{34}} c^2.
\end{aligned}$$

(D_{s8}) において、

$$\begin{aligned}
\mu^* &= (\mu_0^*, \mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*, \mu_5^*, \mu_6^*, \mu_7) \\
&= \frac{c}{\boxed{34}} \left(\boxed{13}, \boxed{-8}, \boxed{5}, \boxed{-3}, \boxed{2}, \boxed{-1}, \boxed{1}, \boxed{0} \right) \\
M_8 &= \frac{\boxed{13}\,.\,\boxed{21}}{\boxed{34}} c^2.
\end{aligned}$$

主問題 (P_{s8}) の最小解 $\hat{x}$ と、双対問題 (D_{s8}) の最大解 μ^* 及び、最小値 m_8 と最大値 M_8 の間には交互フィボナッチ・シフト双対性と呼ばれる関係が成り立っている。

交互フィボナッチ・シフト双対性 (Alternately Fibonacci Shift Duality) I

主問題 ($\mathrm{P_{s8}}$) と双対問題 ($\mathrm{D_{s8}}$) の間には次の 3 の関係が成り立つ。これを交互フィボナッチ・シフト双対性という。

1. (双対性)

   主問題 ($\mathrm{P_{s8}}$) の最小値 m_8 と双対問題 ($\mathrm{D_{s8}}$) の最大値 M_8 が等しい。すなわち、

$$
\begin{aligned}
m_8 &= \frac{13 \cdot 21}{34} c^2 = \frac{F_7 F_8}{F_9} c^2, \\
M_8 &= \frac{13 \cdot 21}{34} c^2 = \frac{F_7 F_8}{F_9} c^2,
\end{aligned}
$$

   であり、$m_8 = M_8$ が成り立つ。

交互フィボナッチ・シフト双対性 (Alternately Fibonacci Shift Duality) II

2. (交互フィボナッチ)

主問題の最小解 $\hat{x}$ と双対問題の最大解 μ^* は共に交代フィボナッチ数列の後ろ向きである。

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \cdots,\ \hat{x}_8) \\
&= \frac{c}{34}\left(\ -21,\ \ 13,\ \ -8,\ \ 5,\ \ -3,\ \ 2,\ \ -1,\ \ 1\ \right) \\
&= \frac{c}{F_9}\left(\ -F_8,\ \ F_7,\ \ -F_6,\ \ F_5,\ \ -F_4,\ \ F_3,\ \ -F_2,\ \ F_1\ \right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu^* &= (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \cdots,\ \mu_6^*,\ \mu_7) \\
&= \frac{c}{34}\left(\ 13,\ \ -8,\ \ 5,\ \ -3,\ \ 2,\ \ -1,\ \ 1,\ \ 0\ \right) \\
&= \frac{c}{F_9}\left(\ F_7,\ \ -F_6,\ \ F_5,\ \ -F_4,\ \ F_3,\ \ -F_2,\ \ F_1,\ \ -F_0\ \right).
\end{aligned}
$$

交互フィボナッチ・シフト双対性 (Alternately Fibonacci Shift Duality) III

3. (シフト)

主問題の最小解 $\hat{x}$ と双対問題の最大解 μ^* はお互いを 1 段シフトさせたものである。

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(& \hat{x}_1, & \hat{x}_2, & \hat{x}_3, & \hat{x}_4, & \hat{x}_5, & \hat{x}_6, & \hat{x}_7, & \hat{x}_8 &) \\
(& -F_8, & F_7, & -F_6, & F_5, & -F_4, & F_3, & -F_2, & F_1 &)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(& \mu_0^*, & \mu_1^*, & \mu_2^*, & \mu_3^*, & \mu_4^*, & \mu_5^*, & \mu_6^*, & \mu_7 &) \\
(& F_7, & -F_6, & F_5, & -F_4, & F_3, & -F_2, & F_1, & \boxed{-F_0} &)
\end{array}
$$

交互フィボナッチ条件 (Alternately Fibonacci Condition) I

主問題 (P_{s8}) において、次の等式からなる系 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}_s}$ を、問題 (P_{s8}) に対する交互フィボナッチ条件という。

$$
(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}_s}
\begin{cases}
\dfrac{c + x_1}{F_7} = \dfrac{x_1}{-F_8}, & \dfrac{x_1 + x_2}{-F_6} = \dfrac{x_2}{F_7}, \\[2ex]
\dfrac{x_2 + x_3}{F_5} = \dfrac{x_3}{-F_6}, & \dfrac{x_3 + x_4}{-F_4} = \dfrac{x_4}{F_5}, \\[2ex]
\dfrac{x_4 + x_5}{F_3} = \dfrac{x_5}{-F_4}, & \dfrac{x_5 + x_6}{-F_2} = \dfrac{x_6}{F_3}, \\[2ex]
\dfrac{x_6 + x_7}{F_1} = \dfrac{x_7}{-F_2}, & x_7 = -x_8.
\end{cases}
$$

交互フィボナッチ条件 (Alternately Fibonacci Condition) II

また、問題 (D_{s8}) に対する交互フィボナッチ条件は次の等式からなる系 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_s}}$ で与えられる。

$$
(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_s}}
\begin{cases}
\dfrac{c-\mu_0}{F_8} = \dfrac{\dfrac{F_8}{F_7}\mu_0+\mu_1}{F_7} = \dfrac{\mu_1}{-F_6}, \\[2ex]
\dfrac{\dfrac{F_7}{F_6}\mu_1+\mu_2}{-F_6} = \dfrac{\mu_2}{F_5}, \quad \dfrac{\dfrac{F_6}{F_5}\mu_2+\mu_3}{F_5} = \dfrac{\mu_3}{-F_4}, \\[2ex]
\dfrac{\dfrac{F_5}{F_4}\mu_3+\mu_4}{-F_4} = \dfrac{\mu_4}{F_3}, \quad \dfrac{\dfrac{F_4}{F_3}\mu_4+\mu_5}{F_3} = \dfrac{\mu_5}{-F_2}, \\[2ex]
\dfrac{\dfrac{F_3}{F_2}\mu_5+\mu_6}{-F_2} = \dfrac{\mu_6}{F_1}, \quad \mu_7 = 0.
\end{cases}
$$

主問題 $(\mathrm{P_{s8}})$ の目的関数を $x = (x_1, x_2, \cdots, x_8)$ の 8 変数関数 $f(x)$ で表す。

$$f(x) := \sum_{n=0}^{7} \left[F_{8-n}(x_n + x_{n+1})^2 + \frac{F_{7-n}^2}{F_{8-n}} x_{n+1}^2 \right] + \frac{F_0 F_1}{F_2} x_8^2$$

$(\mathbf{AF})_{\mathrm{P_s}}$ の同値条件 II

$$
(\mathbf{AF})_{\mathrm{P_s}} \iff \left\{
\begin{array}{rcl}
F_8(x_0+x_1)+\dfrac{F_7^2}{F_8}x_1+F_7(x_1+x_2) & = & 0 \\
F_7(x_1+x_2)+\dfrac{F_6^2}{F_7}x_2+F_6(x_2+x_3) & = & 0 \\
 & \vdots & \\
F_3(x_5+x_6)+\dfrac{F_2^2}{F_3}x_6+F_2(x_6+x_7) & = & 0 \\
F_2(x_6+x_7)+\dfrac{F_1^2}{F_2}x_7+F_1(x_7+x_8) & = & 0 \\
F_1(x_7+x_8)+\dfrac{F_0^2}{F_1}x_8 & = & 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\iff \frac{\partial f}{\partial x_n}=0 \quad n=1,2,\cdots,8.
$$

$(\mathbf{AF})_{\mathbf{P_s}}$ の同値条件 III

目的関数 $f(x)$ は x の 2 次の凸関数であることから、問題 $(\mathbf{P}_{s8})$ の最小解 $\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \cdots,\ \hat{x}_8)$ は、最適化の 1 階条件を満たす。

交互フィボナッチ条件 $(\mathbf{AF})_{\mathbf{P_s}}$

$$
(\mathbf{AF})_{\mathbf{P_s}} \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad
\begin{cases}
\dfrac{c+x_1}{F_7} = \dfrac{x_1}{-F_8}, & \dfrac{x_1+x_2}{-F_6} = \dfrac{x_2}{F_7}, \\[2ex]
\dfrac{x_2+x_3}{F_5} = \dfrac{x_3}{-F_6}, & \dfrac{x_3+x_4}{-F_4} = \dfrac{x_4}{F_5}, \\[2ex]
\dfrac{x_4+x_5}{F_3} = \dfrac{x_5}{-F_4}, & \dfrac{x_5+x_6}{-F_2} = \dfrac{x_6}{F_3}, \\[2ex]
\dfrac{x_6+x_7}{F_1} = \dfrac{x_7}{-F_2}, & x_7 = -x_8.
\end{cases}
$$

交互フィボナッチ条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_s}}$

$$
(\mathrm{AF})_{\mathrm{P_s}} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \dfrac{c+x_1}{F_7} = \dfrac{x_1}{-F_8}, & \dfrac{x_1+x_2}{-F_6} = \dfrac{x_2}{F_7}, \\ \dfrac{x_2+x_3}{F_5} = \dfrac{x_3}{-F_6}, & \dfrac{x_3+x_4}{-F_4} = \dfrac{x_4}{F_5}, \\ \dfrac{x_4+x_5}{F_3} = \dfrac{x_5}{-F_4}, & \dfrac{x_5+x_6}{-F_2} = \dfrac{x_6}{F_3}, \\ \dfrac{x_6+x_7}{F_1} = \dfrac{x_7}{-F_2}, & x_7 = -x_8. \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} \dfrac{c-(-x_1)}{13} = \dfrac{-x_1}{21}, & \dfrac{-x_1-x_2}{8} = \dfrac{x_2}{13}, \\ \dfrac{x_2-(-x_3)}{5} = \dfrac{-x_3}{8}, & \dfrac{-x_3-x_4}{3} = \dfrac{x_4}{5}, \\ \dfrac{x_4-(-x_5)}{2} = \dfrac{-x_5}{3}, & \dfrac{-x_5-x_6}{1} = \dfrac{x_6}{2}, \\ \dfrac{x_6-(-x_7)}{1} = \dfrac{-x_7}{1}, & -x_7 = x_8. \end{cases}
$$

主問題 (P_{s8}) の交互フィボナッチ分割

$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\begin{aligned}
\frac{c-(-x_1)}{13} &= \frac{-x_1}{21}, & \frac{-x_1-x_2}{8} &= \frac{x_2}{13}, \\
\frac{x_2-(-x_3)}{5} &= \frac{-x_3}{8}, & \frac{-x_3-x_4}{3} &= \frac{x_4}{5}, \\
\frac{x_4-(-x_5)}{2} &= \frac{-x_5}{3}, & \frac{-x_5-x_6}{1} &= \frac{x_6}{2}, \\
\frac{x_6-(-x_7)}{1} &= \frac{-x_7}{1}, & -x_7 &= x_8.
\end{aligned}$$

主問題 (P_{s8}) の交互フィボナッチ分割

$$x_0 = c \ (> 0 \,)$$

$$\frac{c-(-x_1)}{13} = \frac{-x_1}{21}, \qquad \frac{-x_1-x_2}{8} = \frac{x_2}{13},$$

$$\frac{x_2-(-x_3)}{5} = \frac{-x_3}{8}, \qquad \frac{-x_3-x_4}{3} = \frac{x_4}{5},$$

$$\frac{x_4-(-x_5)}{2} = \frac{-x_5}{3}, \qquad \frac{-x_5-x_6}{1} = \frac{x_6}{2},$$

$$\frac{x_6-(-x_7)}{1} = \frac{-x_7}{1}, \qquad -x_7 = x_8.$$

主問題 (P_{s8}) の交互フィボナッチ分割

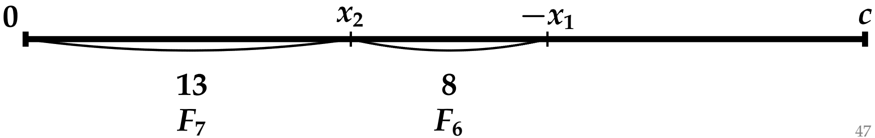
$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c-(-x_1)}{13} = \frac{-x_1}{21}, \quad \frac{-x_1 - x_2}{8} = \frac{x_2}{13},$$

$$\frac{x_2-(-x_3)}{5} = \frac{-x_3}{8}, \quad \frac{-x_3 - x_4}{3} = \frac{x_4}{5},$$

$$\frac{x_4-(-x_5)}{2} = \frac{-x_5}{3}, \quad \frac{-x_5 - x_6}{1} = \frac{x_6}{2},$$

$$\frac{x_6-(-x_7)}{1} = \frac{-x_7}{1}, \quad -x_7 = x_8.$$



主問題 $(\mathrm{P_{s8}})$ の交互フィボナッチ分割

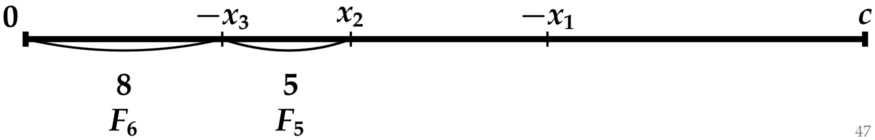
$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c-(-x_1)}{13} = \frac{-x_1}{21}, \quad \frac{-x_1 - x_2}{8} = \frac{x_2}{13},$$

$$\frac{x_2-(-x_3)}{5} = \frac{-x_3}{8}, \quad \frac{-x_3 - x_4}{3} = \frac{x_4}{5},$$

$$\frac{x_4-(-x_5)}{2} = \frac{-x_5}{3}, \quad \frac{-x_5 - x_6}{1} = \frac{x_6}{2},$$

$$\frac{x_6-(-x_7)}{1} = \frac{-x_7}{1}, \quad -x_7 = x_8.$$



主問題 $(\mathrm{P_{s8}})$ の交互フィボナッチ分割

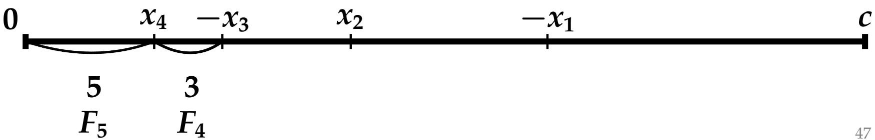
$$x_0 = c \ (>0)$$

$$\frac{c-(-x_1)}{13} = \frac{-x_1}{21}, \quad \frac{-x_1-x_2}{8} = \frac{x_2}{13},$$

$$\frac{x_2-(-x_3)}{5} = \frac{-x_3}{8}, \quad \frac{-x_3-x_4}{3} = \frac{x_4}{5},$$

$$\frac{x_4-(-x_5)}{2} = \frac{-x_5}{3}, \quad \frac{-x_5-x_6}{1} = \frac{x_6}{2},$$

$$\frac{x_6-(-x_7)}{1} = \frac{-x_7}{1}, \quad -x_7 = x_8.$$



主問題 (P_{s8}) の交互フィボナッチ分割

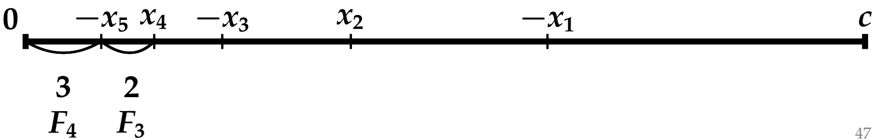
$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c-(-x_1)}{13} = \frac{-x_1}{21}, \quad \frac{-x_1-x_2}{8} = \frac{x_2}{13},$$

$$\frac{x_2-(-x_3)}{5} = \frac{-x_3}{8}, \quad \frac{-x_3-x_4}{3} = \frac{x_4}{5},$$

$$\frac{x_4-(-x_5)}{2} = \frac{-x_5}{3}, \quad \frac{-x_5-x_6}{1} = \frac{x_6}{2},$$

$$\frac{x_6-(-x_7)}{1} = \frac{-x_7}{1}, \quad -x_7 = x_8.$$



主問題 (P_{s8}) の交互フィボナッチ分割

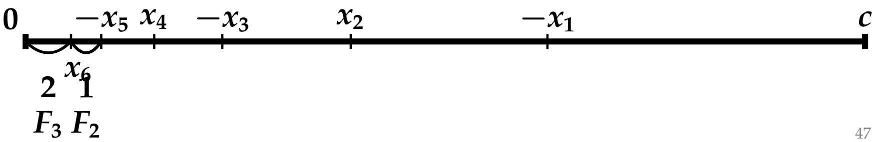
$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c-(-x_1)}{13} = \frac{-x_1}{21}, \quad \frac{-x_1-x_2}{8} = \frac{x_2}{13},$$

$$\frac{x_2-(-x_3)}{5} = \frac{-x_3}{8}, \quad \frac{-x_3-x_4}{3} = \frac{x_4}{5},$$

$$\frac{x_4-(-x_5)}{2} = \frac{-x_5}{3}, \quad \frac{-x_5-x_6}{1} = \frac{x_6}{2},$$

$$\frac{x_6-(-x_7)}{1} = \frac{-x_7}{1}, \quad -x_7 = x_8.$$



主問題 (P_{s8}) の交互フィボナッチ分割

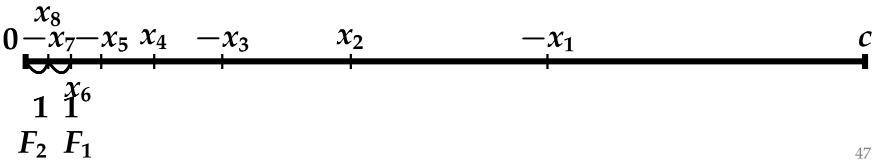
$$x_0 = c \ (>0)$$

$$\frac{c-(-x_1)}{13} = \frac{-x_1}{21}, \quad \frac{-x_1-x_2}{8} = \frac{x_2}{13},$$

$$\frac{x_2-(-x_3)}{5} = \frac{-x_3}{8}, \quad \frac{-x_3-x_4}{3} = \frac{x_4}{5},$$

$$\frac{x_4-(-x_5)}{2} = \frac{-x_5}{3}, \quad \frac{-x_5-x_6}{1} = \frac{x_6}{2},$$

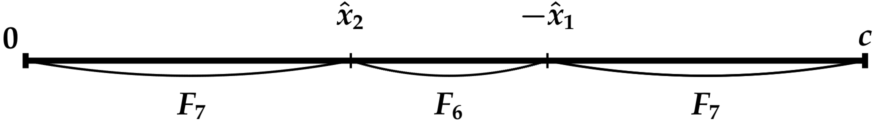
$$\frac{x_6-(-x_7)}{1} = \frac{-x_7}{1}, \quad -x_7 = x_8.$$



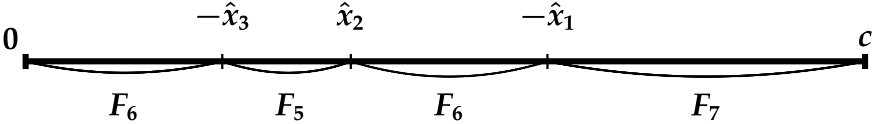
0 c

最適解

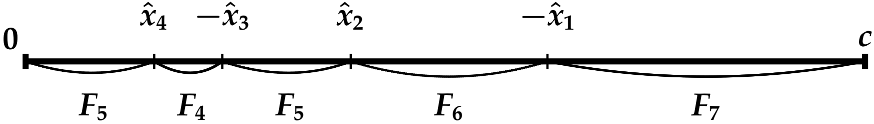
$$\text{最適解}\left\{\begin{array}{l} -\hat{x}_1 = \dfrac{F_8}{F_8+F_7}\,c \end{array}\right.$$



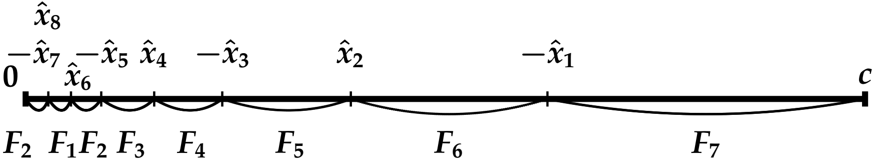
$$\text{最適解}\left\{\begin{aligned} -\hat{x}_1 &= \frac{F_8}{F_8+F_7}\,c \\ \hat{x}_2 &= \frac{F_7}{F_7+F_6}\,(-\hat{x}_1) \end{aligned}\right.$$



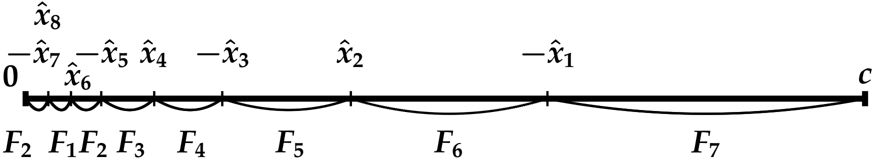
最適解
$$
\begin{cases}
-\hat{x}_1 = \dfrac{F_8}{F_8 + F_7}\, c \\[2ex]
\hat{x}_2 = \dfrac{F_7}{F_7 + F_6}\, (-\hat{x}_1) \\[2ex]
-\hat{x}_3 = \dfrac{F_6}{F_6 + F_5}\, \hat{x}_2
\end{cases}
$$



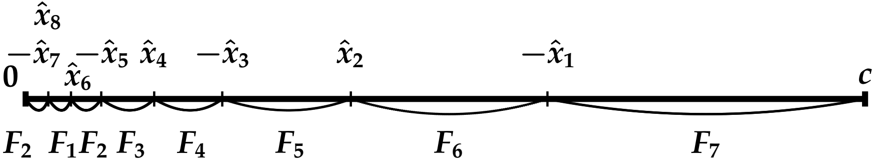
$$
\text{最適解} \quad \begin{cases} -\hat{x}_1 = \dfrac{F_8}{F_8 + F_7} c \\ \hat{x}_2 = \dfrac{F_7}{F_7 + F_6} (-\hat{x}_1) \\ -\hat{x}_3 = \dfrac{F_6}{F_6 + F_5} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_4 = \dfrac{F_5}{F_5 + F_4} (-\hat{x}_3) \end{cases}
$$



$$
\text{最適解}\quad \left\{
\begin{array}{rcl}
-\hat{x}_1 & = & \dfrac{F_8}{F_8+F_7}\,c \\[2ex]
\hat{x}_2 & = & \dfrac{F_7}{F_7+F_6}\,(-\hat{x}_1) \\[2ex]
-\hat{x}_3 & = & \dfrac{F_6}{F_6+F_5}\,\hat{x}_2 \\[2ex]
\hat{x}_4 & = & \dfrac{F_5}{F_5+F_4}\,(-\hat{x}_3) \\[2ex]
\vdots & & \vdots
\end{array}
\right.
$$



$$
\text{最適解}\quad
\begin{cases}
-\hat{x}_1 = \dfrac{F_8}{F_8+F_7}\,c \\[2ex]
\hat{x}_2 = \dfrac{F_7}{F_7+F_6}\,(-\hat{x}_1) \\[2ex]
-\hat{x}_3 = \dfrac{F_6}{F_6+F_5}\,\hat{x}_2 \\[2ex]
\hat{x}_4 = \dfrac{F_5}{F_5+F_4}\,(-\hat{x}_3) \\[2ex]
\quad\vdots \qquad \vdots \\[2ex]
-\hat{x}_7 = \hat{x}_8 = \dfrac{F_2}{F_2+F_1}\,\hat{x}_6
\end{cases}
$$

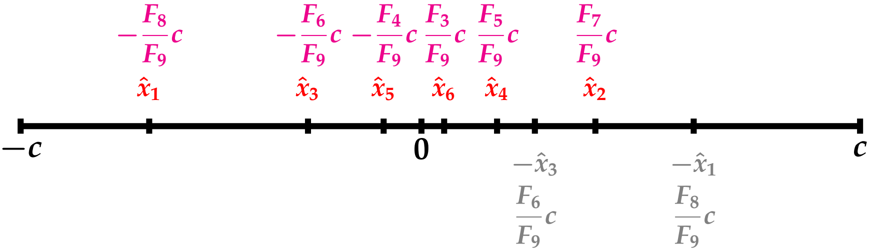


$$
\text{最適解}\quad\left\{
\begin{array}{rcccl}
-\hat{x}_1 & = & \dfrac{F_8}{F_8+F_7}\,c & = & \dfrac{F_8}{F_9}\,c\,, \\[2ex]
\hat{x}_2 & = & \dfrac{F_7}{F_7+F_6}\,(-\hat{x}_1) & = & \dfrac{F_7}{F_8}\cdot\dfrac{F_8}{F_9}\,c\,, \\[2ex]
-\hat{x}_3 & = & \dfrac{F_6}{F_6+F_5}\,\hat{x}_2 & = & \dfrac{F_6}{F_7}\cdot\dfrac{F_7}{F_8}\cdot\dfrac{F_8}{F_9}\,c\,, \\[2ex]
\hat{x}_4 & = & \dfrac{F_5}{F_5+F_4}\,(-\hat{x}_3) & = & \dfrac{F_5}{F_6}\cdot\dfrac{F_6}{F_7}\cdot\dfrac{F_7}{F_8}\cdot\dfrac{F_8}{F_9}\,c\,, \\[2ex]
\vdots & & \vdots & & \\[2ex]
-\hat{x}_7=\hat{x}_8 & = & \dfrac{F_2}{F_2+F_1}\,\hat{x}_6 & = & \dfrac{F_2}{F_3}\cdot\dfrac{F_3}{F_4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{F_7}{F_8}\cdot\dfrac{F_8}{F_9}\,c\,.
\end{array}
\right.
$$

すなわち、主問題 (P_{s8}) の最小解 $\hat{x}$ は、

$$\begin{aligned}\hat{x} &= (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \cdots,\ \hat{x}_8) \\ &= \frac{c}{F_9}\left(\ -F_8\,,\ \ F_7\,,\ \ -F_6\,,\ \ F_5\,,\ \ -F_4\,,\ \ F_3\,,\ \ -F_2\,,\ \ F_1\ \right)\end{aligned}$$

となる。



この列、$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_8)$ は交互フィボナッチ経路を構成している。

主問題 ($\mathrm{P_{s8}}$) の最小値

主問題 ($\mathrm{P_{s8}}$) の目的関数は、

$$f(x) := \sum_{n=0}^{7} \left[F_{8-n}(x_n + x_{n+1})^2 + \frac{F_{7-n}^2}{F_{8-n}} x_{n+1}^2 \right] + \frac{F_0 F_1}{F_2} x_8^2$$

であり、最小解 $\hat{x}$ は、

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_8) \\ &= \frac{c}{F_9} \left(-F_8, \ F_7, \ -F_6, \ F_5, \ -F_4, \ F_3, \ -F_2, \ F_1 \right) \end{aligned}$$

なので、

主問題 (P_{s8}) の最小値

主問題 (P_{s8}) の目的関数は、

$$f(x) := \sum_{n=0}^{7}\left[F_{8-n}(x_n + x_{n+1})^2 + \frac{F_{7-n}^2}{F_{8-n}}x_{n+1}^2\right] + \frac{F_0F_1}{F_2}x_8^2$$

であり、最小解 $\hat{x}$ は、

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_8) \\
&= \frac{c}{F_9}\left(-F_8,\ F_7,\ -F_6,\ F_5,\ -F_4,\ F_3,\ -F_2,\ F_1\right)
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
f(\hat{x}) = \frac{c^2}{F_9^2}\Big\{&(F_8F_7^2 + F_7^2F_8) + (F_7F_6^2 + F_6^2F_7) + \cdots \\
&\cdots + (F_2F_1^2 + F_1^2F_2) + (F_1F_0^2 + F_0^2F_1)\Big\}
\end{aligned}$$

となる。

補題（準立方和）

フィボナッチ列 $\{F_k\}$ において、次が成り立つ。

$$2\sum_{k=1}^{n} F_k^2 F_{k+1} = F_n F_{n+1} F_{n+2}.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Table 1: Fibonacci sequence $\{F_n\}$

準立方和

補題（準立方和）

フィボナッチ列 $\{F_k\}$ において、次が成り立つ。

$$2\sum_{k=1}^{n} F_k^2 F_{k+1} = F_n F_{n+1} F_{n+2}.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Table 1: Fibonacci sequence $\{F_n\}$

例えば、$n = 4$ では、

$$\begin{aligned} & 2 \times \left(F_1^2 F_2 + F_2^2 F_3 + F_3^2 F_4 + F_4^2 F_5\right) \\ = \; & 2 \times \left(1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 5\right) \\ = \; & 120 \\ = \; & F_4 F_5 F_6 \end{aligned}$$

よって、

$$f(\hat{x}) = \frac{c^2}{F_9^2}\Big\{(F_8F_7^2 + F_7^2F_8) + (F_7F_6^2 + F_6^2F_7) + \cdots$$
$$\cdots + (F_2F_1^2 + F_1^2F_2) + (F_1F_0^2 + F_0^2F_1)\Big\}$$

より、

$$\begin{aligned} F_9^2\frac{f(\hat{x})}{c^2} &= (F_8F_7^2 + F_7^2F_8) + (F_7F_6^2 + F_6^2F_7) + \cdots \\ &\quad \cdots + (F_2F_1^2 + F_1^2F_2) + (F_1F_0^2 + F_0^2F_1) \\ &= 2(F_8F_7^2 + F_7F_6^2 + \cdots + F_2F_1^2 + F_1F_0^2) \\ &= F_7 \cdot F_8 \cdot F_9. \end{aligned}$$

すなわち、最小値は $f(\hat{x}) = \dfrac{F_7F_8}{F_9}c^2 = \dfrac{13 \cdot 21}{34}c^2$ である。

交互フィボナッチ条件 (Alternately Fibonacci Condition)

問題 (D_{s8}) に対する交互フィボナッチ条件は次の等式からなる系 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_s}}$ で与えられる。

$$
(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_s}}
\begin{cases}
\dfrac{c-\mu_0}{F_8} = \dfrac{\dfrac{F_8}{F_7}\mu_0+\mu_1}{F_7} = \dfrac{\mu_1}{-F_6}, \\[2ex]
\dfrac{\dfrac{F_7}{F_6}\mu_1+\mu_2}{-F_6} = \dfrac{\mu_2}{F_5}, \quad \dfrac{\dfrac{F_6}{F_5}\mu_2+\mu_3}{F_5} = \dfrac{\mu_3}{-F_4}, \\[2ex]
\dfrac{\dfrac{F_5}{F_4}\mu_3+\mu_4}{-F_4} = \dfrac{\mu_4}{F_3}, \quad \dfrac{\dfrac{F_4}{F_3}\mu_4+\mu_5}{F_3} = \dfrac{\mu_5}{-F_2}, \\[2ex]
\dfrac{\dfrac{F_3}{F_2}\mu_5+\mu_6}{-F_2} = \dfrac{\mu_6}{F_1}, \quad \mu_7 = 0.
\end{cases}
$$

$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_s}}$ の同値条件 I

双対問題 $(\mathrm{D_{s8}})$ の目的関数を $\mu = (\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_7)$ の 8 変数関数 $g(\mu)$ で表す。

$$g(\mu) := 2cF_8\mu_0 - \sum_{n=0}^{6} F_{8-n}\left[\mu_n^2 + \left(\frac{F_{8-n}}{F_{7-n}}\mu_n + \mu_{n+1}\right)^2\right] - F_1\mu_7^2.$$

$(\mathbf{AF})_{\mathbf{D_s}}$

$$\iff \begin{cases} c - \mu_0 + \dfrac{F_8}{F_7}\left(\dfrac{F_8}{F_7}\mu_0 + \mu_1\right) & = 0 \\ -\dfrac{F_8}{F_7}\left(\dfrac{F_8}{F_7}\mu_0 + \mu_1\right) - \mu_1 - \dfrac{F_7}{F_6}\left(\dfrac{F_7}{F_6}\mu_1 + \mu_2\right) & = 0 \\ \vdots & \\ -\dfrac{F_4}{F_3}\left(\dfrac{F_4}{F_3}\mu_4 + \mu_5\right) - \mu_5 - \dfrac{F_3}{F_2}\left(\dfrac{F_3}{F_2}\mu_5 + \mu_6\right) & = 0 \\ -\dfrac{F_3}{F_2}\left(\dfrac{F_3}{F_2}\mu_5 + \mu_6\right) - \mu_6 - \dfrac{F_2}{F_1}\left(\dfrac{F_2}{F_1}\mu_6 + \mu_7\right) & = 0 \\ \mu_7 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad \frac{\partial g}{\partial \mu_n} = 0 \quad n = 0, 1, \cdots, 6, \quad \mu_7 = 0.$$

$(\mathbf{AF})_{\mathbf{D_s}}$ の同値条件 III

目的関数 $g(\mu)$ は μ の 2 次の凹関数であることから、問題 $(\mathbf{D_{s8}})$ の最大解 $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \cdots, \mu_6^*)$ は、最適化の 1 階条件を満たす。

$$(\mathbf{AF})_{\mathbf{D_s}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{F_8} = \dfrac{\mu_0}{F_7}, & \dfrac{\mu_0+\mu_1}{F_5} = \dfrac{\mu_1}{-F_6}, \\ \dfrac{\mu_1+\mu_2}{-F_4} = \dfrac{\mu_2}{F_5}, & \dfrac{\mu_2+\mu_3}{F_3} = \dfrac{\mu_3}{-F_4}, \\ \dfrac{\mu_3+\mu_4}{-F_2} = \dfrac{\mu_4}{F_3}, & \dfrac{\mu_4+\mu_5}{F_1} = \dfrac{\mu_5}{-F_2}, \\ \mu_5+\mu_6 = -\dfrac{F_0}{F_1}\mu_6, \quad \mu_7 = 0. \end{cases}$$

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D_s}} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{F_8} = \dfrac{\mu_0}{F_7}, & \dfrac{\mu_0+\mu_1}{F_5} = \dfrac{\mu_1}{-F_6}, \\ \dfrac{\mu_1+\mu_2}{-F_4} = \dfrac{\mu_2}{F_5}, & \dfrac{\mu_2+\mu_3}{F_3} = \dfrac{\mu_3}{-F_4}, \\ \dfrac{\mu_3+\mu_4}{-F_2} = \dfrac{\mu_4}{F_3}, & \dfrac{\mu_4+\mu_5}{F_1} = \dfrac{\mu_5}{-F_2}, \\ \mu_5+\mu_6 = -\dfrac{F_0}{F_1}\mu_6, \quad \mu_7 = 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{c-\mu_0}{21} = \dfrac{\mu_0}{13}, & \dfrac{\mu_0-(-\mu_1)}{5} = \dfrac{-\mu_1}{8}, \\ \dfrac{-\mu_1-\mu_2}{3} = \dfrac{\mu_2}{5}, & \dfrac{\mu_2-(-\mu_3)}{2} = \dfrac{-\mu_3}{3}, \\ \dfrac{-\mu_3-\mu_4}{1} = \dfrac{\mu_4}{2}, & \dfrac{\mu_4-(-\mu_5)}{1} = \dfrac{-\mu_5}{1}, \\ \mu_5+\mu_6 = 0, & \mu_7 = 0. \end{cases}$$

双対問題 ($\mathrm{D_{s8}}$) の交互フィボナッチ分割

$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c - \mu_0}{21} = \frac{\mu_0}{13}, \qquad \frac{\mu_0 - (-\mu_1)}{5} = \frac{-\mu_1}{8},$$

$$\frac{-\mu_1 - \mu_2}{3} = \frac{\mu_2}{5}, \qquad \frac{\mu_2 - (-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{3},$$

$$\frac{-\mu_3 - \mu_4}{1} = \frac{\mu_4}{2}, \qquad \frac{\mu_4 - (-\mu_5)}{1} = \frac{-\mu_5}{1},$$

$$\mu_5 + \mu_6 = 0, \qquad \mu_7 = 0.$$

双対問題 (D_{s8}) の交互フィボナッチ分割

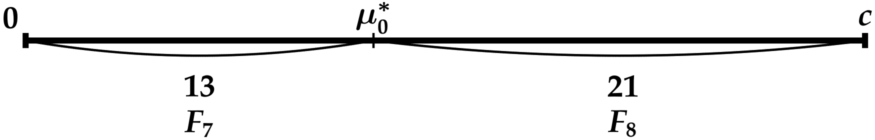
$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c-\mu_0}{21} = \frac{\mu_0}{13}, \qquad \frac{\mu_0-(-\mu_1)}{5} = \frac{-\mu_1}{8},$$

$$\frac{-\mu_1-\mu_2}{3} = \frac{\mu_2}{5}, \qquad \frac{\mu_2-(-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{3},$$

$$\frac{-\mu_3-\mu_4}{1} = \frac{\mu_4}{2}, \qquad \frac{\mu_4-(-\mu_5)}{1} = \frac{-\mu_5}{1},$$

$$\mu_5+\mu_6 = 0, \qquad \mu_7 = 0.$$



双対問題 (D_{s8}) の交互フィボナッチ分割

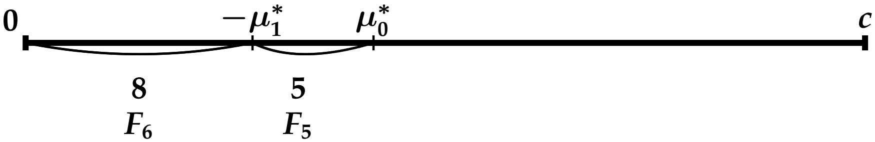
$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c - \mu_0}{21} = \frac{\mu_0}{13}, \qquad \frac{\mu_0 - (-\mu_1)}{5} = \frac{-\mu_1}{8},$$

$$\frac{-\mu_1 - \mu_2}{3} = \frac{\mu_2}{5}, \qquad \frac{\mu_2 - (-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{3},$$

$$\frac{-\mu_3 - \mu_4}{1} = \frac{\mu_4}{2}, \qquad \frac{\mu_4 - (-\mu_5)}{1} = \frac{-\mu_5}{1},$$

$$\mu_5 + \mu_6 = 0, \qquad \mu_7 = 0.$$



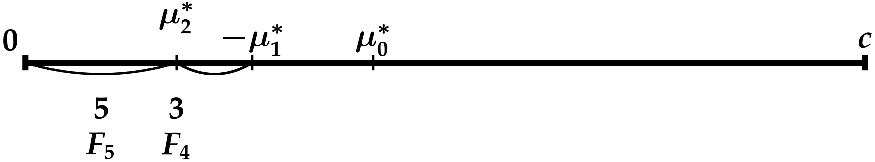
$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c - \mu_0}{21} = \frac{\mu_0}{13}, \qquad \frac{\mu_0 - (-\mu_1)}{5} = \frac{-\mu_1}{8},$$

$$\frac{-\mu_1 - \mu_2}{3} = \frac{\mu_2}{5}, \qquad \frac{\mu_2 - (-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{3},$$

$$\frac{-\mu_3 - \mu_4}{1} = \frac{\mu_4}{2}, \qquad \frac{\mu_4 - (-\mu_5)}{1} = \frac{-\mu_5}{1},$$

$$\mu_5 + \mu_6 = 0, \qquad \mu_7 = 0.$$



双対問題 (D_{s8}) の交互フィボナッチ分割

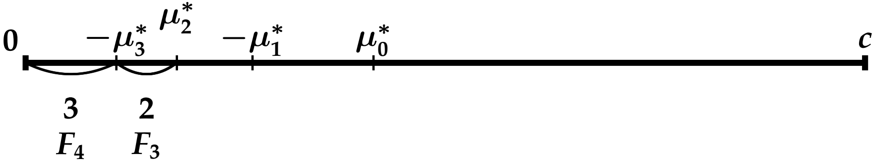
$x_0 = c \ (> 0)$

$$\frac{c - \mu_0}{21} = \frac{\mu_0}{13}, \qquad \frac{\mu_0 - (-\mu_1)}{5} = \frac{-\mu_1}{8},$$

$$\frac{-\mu_1 - \mu_2}{3} = \frac{\mu_2}{5}, \qquad \frac{\mu_2 - (-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{3},$$

$$\frac{-\mu_3 - \mu_4}{1} = \frac{\mu_4}{2}, \qquad \frac{\mu_4 - (-\mu_5)}{1} = \frac{-\mu_5}{1},$$

$$\mu_5 + \mu_6 = 0, \qquad \mu_7 = 0.$$



双対問題 (D_{s8}) の交互フィボナッチ分割

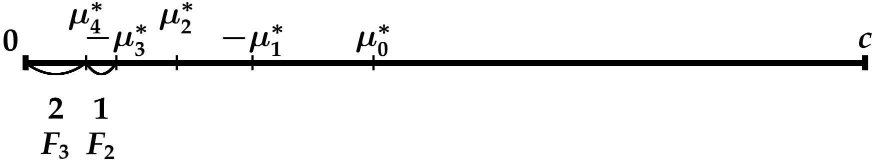
$x_0 = c \ (> 0)$

$$\frac{c-\mu_0}{21} = \frac{\mu_0}{13}, \qquad \frac{\mu_0-(-\mu_1)}{5} = \frac{-\mu_1}{8},$$

$$\frac{-\mu_1-\mu_2}{3} = \frac{\mu_2}{5}, \qquad \frac{\mu_2-(-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{3},$$

$$\frac{-\mu_3-\mu_4}{1} = \frac{\mu_4}{2}, \qquad \frac{\mu_4-(-\mu_5)}{1} = \frac{-\mu_5}{1},$$

$$\mu_5+\mu_6 = 0, \qquad \mu_7 = 0.$$



双対問題 (D_{s8}) の交互フィボナッチ分割

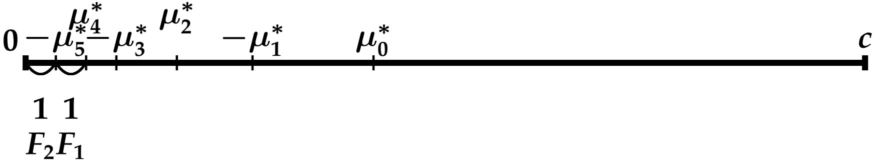
$x_0 = c \ (> 0)$

$$\frac{c-\mu_0}{21} = \frac{\mu_0}{13}, \qquad \frac{\mu_0-(-\mu_1)}{5} = \frac{-\mu_1}{8},$$

$$\frac{-\mu_1-\mu_2}{3} = \frac{\mu_2}{5}, \qquad \frac{\mu_2-(-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{3},$$

$$\frac{-\mu_3-\mu_4}{1} = \frac{\mu_4}{2}, \qquad \frac{\mu_4-(-\mu_5)}{1} = \frac{-\mu_5}{1},$$

$$\mu_5+\mu_6 = 0, \qquad \mu_7 = 0.$$



双対問題 $(\mathrm{D_{s8}})$ の交互フィボナッチ分割

$$x_0 = c \ (> 0)$$

$$\frac{c - \mu_0}{21} = \frac{\mu_0}{13}, \qquad \frac{\mu_0 - (-\mu_1)}{5} = \frac{-\mu_1}{8},$$

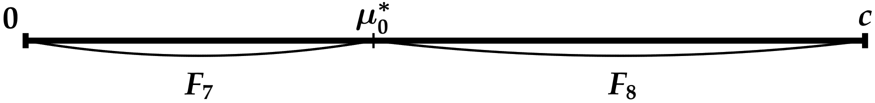
$$\frac{-\mu_1 - \mu_2}{3} = \frac{\mu_2}{5}, \quad \frac{\mu_2 - (-\mu_3)}{2} = \frac{-\mu_3}{3},$$

$$\frac{-\mu_3 - \mu_4}{1} = \frac{\mu_4}{2}, \quad \frac{\mu_4 - (-\mu_5)}{1} = \frac{-\mu_5}{1},$$

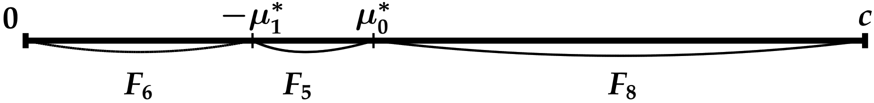
$$\mu_5 + \mu_6 = 0, \qquad \mu_7 = 0.$$

0 c

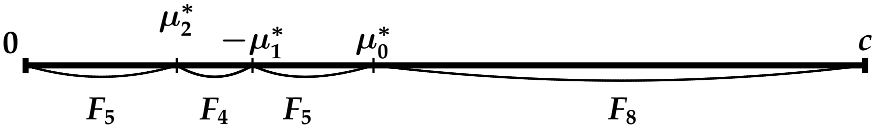
最適解



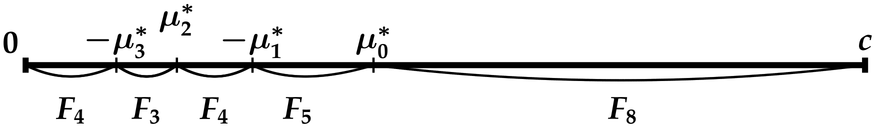
$$\text{最適解}\ \left\{\ \mu_0^* = \frac{F_7}{F_7+F_8}\,c \right.$$



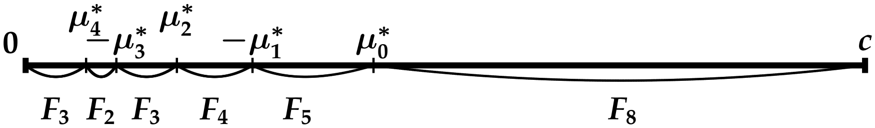
$$
\text{最適解}\left\{
\begin{aligned}
\mu_0^* &= \frac{F_7}{F_7 + F_8}\, c \\
-\mu_1^* &= \frac{F_6}{F_6 + F_5}\, \mu_0^*
\end{aligned}
\right.
$$



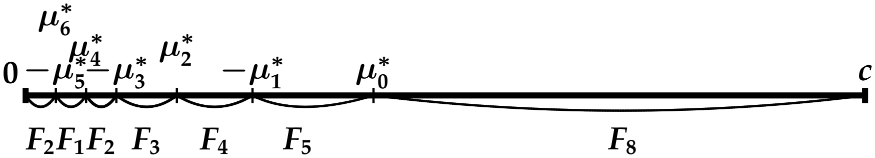
$$
\text{最適解}\quad
\left\{
\begin{array}{rcl}
\mu_0^* & = & \dfrac{F_7}{F_7 + F_8}\, c \\
-\,\mu_1^* & = & \dfrac{F_6}{F_6 + F_5}\, \mu_0^* \\
\mu_2^* & = & \dfrac{F_5}{F_5 + F_4}\, (-\mu_1^*)
\end{array}
\right.
$$



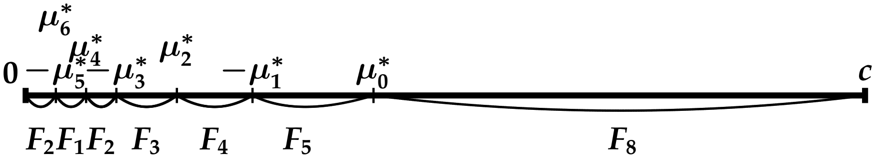
$$\text{最適解}\quad \begin{cases} \mu_0^* = \dfrac{F_7}{F_7 + F_8}\, c \\[2ex] -\mu_1^* = \dfrac{F_6}{F_6 + F_5}\, \mu_0^* \\[2ex] \mu_2^* = \dfrac{F_5}{F_5 + F_4}\, (-\mu_1^*) \\[2ex] -\mu_3^* = \dfrac{F_4}{F_4 + F_3}\, \mu_2^* \end{cases}$$



$$
\text{最適解}\quad
\left\{
\begin{aligned}
\mu_0^* &= \frac{F_7}{F_7+F_8}\,c \\
-\mu_1^* &= \frac{F_6}{F_6+F_5}\,\mu_0^* \\
\mu_2^* &= \frac{F_5}{F_5+F_4}\,(-\mu_1^*) \\
-\mu_3^* &= \frac{F_4}{F_4+F_3}\,\mu_2^* \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
\right.
$$



最適解
$$
\begin{cases}
\mu_0^* &= \dfrac{F_7}{F_7 + F_8}\, c \\
-\mu_1^* &= \dfrac{F_6}{F_6 + F_5}\, \mu_0^* \\
\mu_2^* &= \dfrac{F_5}{F_5 + F_4}\, (-\mu_1^*) \\
-\mu_3^* &= \dfrac{F_4}{F_4 + F_3}\, \mu_2^* \\
\vdots & \quad \vdots \\
\mu_6^* = -\mu_5^* &= \dfrac{F_2}{F_2 + F_1}\, \mu_4^*
\end{cases}
$$

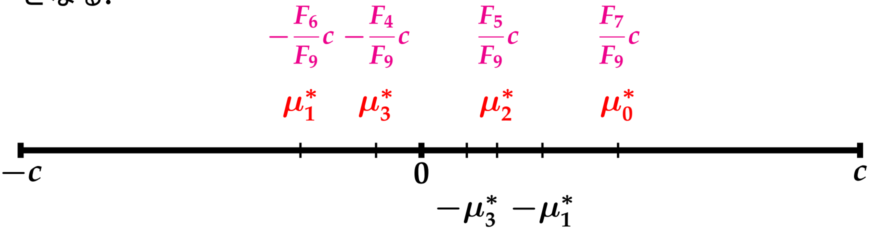


$$
\text{最適解}\quad
\left\{
\begin{array}{rcl}
\mu_0^* = \dfrac{F_7}{F_7+F_8}\, c & = & \dfrac{F_7}{F_9}\, c\,, \\[2ex]
-\mu_1^* = \dfrac{F_6}{F_6+F_5}\, \mu_0^* & = & \dfrac{F_6}{F_7}\cdot\dfrac{F_7}{F_9}\, c\,, \\[2ex]
\mu_2^* = \dfrac{F_5}{F_5+F_4}\, (-\mu_1^*) & = & \dfrac{F_5}{F_6}\cdot\dfrac{F_6}{F_7}\cdot\dfrac{F_7}{F_9}\, c\,, \\[2ex]
-\mu_3^* = \dfrac{F_4}{F_4+F_3}\, \mu_2^* & = & \dfrac{F_4}{F_5}\cdot\dfrac{F_5}{F_6}\cdot\dfrac{F_6}{F_7}\cdot\dfrac{F_7}{F_9}\, c\,, \\[2ex]
\vdots \qquad \vdots & & \vdots \\[2ex]
\mu_6^* = -\mu_5^* = \dfrac{F_2}{F_2+F_1}\, \mu_4^* & = & \dfrac{F_2}{F_3}\cdot\dfrac{F_3}{F_4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{F_7}{F_9}\, c\,.
\end{array}
\right.
$$

すなわち、双対問題 $(\mathrm{D_{s8}})$ の最大解 μ^* は、

$$
\begin{aligned}
\mu^* &= (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \cdots,\ \mu_6^*,\ \mu_7) \\
&= \frac{c}{F_9}\left(F_7,\ -F_6,\ F_5,\ -F_4,\ F_3,\ -F_2,\ F_1,\ -F_0 \right)
\end{aligned}
$$

となる.



列 $(\mu_0^*, \mu_1^*, \cdots, \mu_6^*, \mu_7)$ は交互フィボナッチ経路を構成している。

双対問題 ($\mathbf{D_{s8}}$) の最大値

双対問題 ($\mathbf{D_{s8}}$) の目的関数は、

$$g(\mu) := 2cF_8\mu_0 - \sum_{n=0}^{6} F_{8-n}\left[\mu_n^2 + \left(\frac{F_{8-n}}{F_{7-n}}\mu_n + \mu_{n+1}\right)^2\right] - F_1\mu_7^2.$$

であり、最大解 μ^* は、

$$\mu^* = \frac{c}{F_9}\left(F_7\,, \quad -F_6\,, \quad F_5\,, \quad -F_4\,, \quad F_3\,, \quad -F_2\,, \quad F_1\,, \quad -F_0 \right)$$

なので、

双対問題 $(\mathrm{D_{s8}})$ の最大値

双対問題 $(\mathrm{D_{s8}})$ の目的関数は、

$$g(\mu) := 2cF_8\mu_0 - \sum_{n=0}^{6} F_{8-n}\left[\mu_n^2 + \left(\frac{F_{8-n}}{F_{7-n}}\mu_n + \mu_{n+1}\right)^2\right] - F_1\mu_7^2.$$

であり、最大解 μ^* は、

$$\mu^* = \frac{c}{F_9}\left(F_7,\ -F_6,\ F_5,\ -F_4,\ F_3,\ -F_2,\ F_1,\ -F_0 \right)$$

なので、

$$\begin{aligned} g(\mu^*) = \frac{c^2}{F_9^2}\Big\{ & 2F_7F_8F_9 - F_8\left[F_7^2 + (F_8 - F_6)^2\right] \\ & - F_7\left[F_6^2 + (F_7 - F_5)^2\right] - \cdots \\ & \cdots - F_2\left[F_1^2 + (F_2 - F_0)^2\right] - F_1F_2F_0^2 \Big\} \end{aligned}$$

補題（準立方和）より、

$$\begin{aligned} g(\mu^*)F_9^2/c^2 &= 2F_7F_8F_9 - F_8\left[F_7^2 + (F_8 - F_6)^2\right] \\ &\quad -F_7\left[F_6^2 + (F_7 - F_5)^2\right] - \cdots \\ &\quad \cdots - F_2\left[F_1^2 + (F_2 - F_0)^2\right] - F_1F_2F_0^2 \\ &= 2F_7F_8F_9 - 2(F_8F_7^2 + \cdots + F_2F_1^2) \\ &= F_7F_8F_9 \end{aligned}$$

となり、すなわち、最大値は $g(\mu^*) = \dfrac{F_7F_8}{F_9}c^2 = \dfrac{13 \cdot 21}{34}c^2$ である。

ダ・ヴィンチ・コード

映画「ダ・ヴィンチ・コード」（2006 年）では冒頭のシーンで 10 桁の暗証番号

$$\mathbf{1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1}$$

が現れている。

ダ・ヴィンチ・コード

映画「ダ・ヴィンチ・コード」（2006 年）では冒頭のシーンで 10 桁の暗証番号

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

が現れている。
この 10 個の数字は 8 つの数字からなる列

$$\boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{5} \quad \boxed{8} \quad \boxed{13} \quad \boxed{21}$$

すなわち、フィボナッチ数列の第 1 項 $F_1 = 1$ から第 8 項 $F_8 = 21$ までの数列に他ならない。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Table 1: Fibonacci sequence $\{F_n\}$

主問題 $(\mathrm{P_{c4}})$ および双対問題 $(\mathrm{D_{c4}})$ の変数を反転させて、反転問題

$$
(\mathrm{RP_{c4}}) \qquad \begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{n=1}^{4} \left[x_n^2 + (x_n + x_{n+1})^2\right] & \\
\textbf{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < x_n < \infty & n = 1, 2, 3, 4 \\
 & \text{(ii)} \quad x_5 = c &
\end{array}
$$

および

$$
(\mathrm{RD_{c4}}) \qquad \begin{array}{lll}
\textbf{Maximize} & -\mu_1^2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{3} \left[\mu_n^2 + (\mu_n + \mu_{n+1})^2\right] - \mu_4^2 + 2c\mu_4 & \\
\textbf{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < \mu_n < \infty & n = 1, 2, 3, 4
\end{array}
$$

を考える.

問題 $(\mathbf{RP_{c4}})$ の最小解 $\tilde{x}$ と最小値 m_4' は、

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= (\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3,\ \tilde{x}_4,\ x_5) \\ &= \frac{c}{34}\left(\ 1,\quad -2,\quad 5,\quad -13,\quad 34\ \right) \\ m_4' &= \frac{21}{34}c^2\end{aligned}$$

であり、問題 $(\mathbf{RD_{c4}})$ の最大解 $\mu^\star$ と最大値 M_4' は、

$$\begin{aligned}\mu^\star &= (\mu_1^\star,\ \mu_2^\star,\ \mu_3^\star,\ \mu_4^\star) \\ &= \frac{c}{34}\left(\ -1,\quad 3,\quad -8,\quad 21\ \right) \\ M_4' &= \frac{21}{34}c^2\end{aligned}$$

となる.

両反転問題の最適解の間には今度は前向きの交互フィボナッチ相補双対性が成り立つ.

- **(双対性)**

  最小値と最大値が等しい：

$$m'_4 = M'_4 = \frac{21}{34}c^2.$$

- **(2 段階フィボナッチ)**

  最小解 $\tilde{x}$ と最大点 $\mu^\star$ は共に交代フィボ数列の前向き 2 段跳びである.

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= (\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3,\ \tilde{x}_4,\ x_5) \\ &= \frac{c}{34}\left(\boxed{1},\ \boxed{-2},\ \boxed{5},\ \boxed{-13},\ \boxed{34}\right) \\ &= \frac{c}{F_9}\left(\boxed{F_1},\ \boxed{-F_3},\ \boxed{F_5},\ \boxed{-F_7},\ \boxed{F_9}\right),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mu^\star &= (\mu_1^\star,\ \mu_2^\star,\ \mu_3^\star,\ \mu_4^\star) \\
&= \frac{c}{34}\left(\boxed{-1},\ \ \boxed{3},\ \ \boxed{-8},\ \ \boxed{21} \right) \\
&= \frac{c}{F_9}\left(\boxed{-F_2},\ \ \boxed{F_4},\ \ \boxed{-F_6},\ \ \boxed{F_8} \right).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\mu^\star &= (\mu_1^\star,\ \mu_2^\star,\ \mu_3^\star,\ \mu_4^\star)\\ &= \frac{c}{34}\left(\boxed{-1},\ \boxed{3},\ \boxed{-8},\ \boxed{21}\right)\\ &= \frac{c}{F_9}\left(\boxed{-F_2},\ \boxed{F_4},\ \boxed{-F_6},\ \boxed{F_8}\right).\end{aligned}$$

- **(相補フィボナッチ)**

  最小解 $\tilde{x}$ と最大解 $\mu^\star$ を交互に編むと、

$\tilde{x}_1$	$\mu_1^\star$	$\tilde{x}_2$	$\mu_2^\star$	$\tilde{x}_3$	$\mu_3^\star$	$\tilde{x}_4$	$\mu_4^\star$	x_5
1	−1	−2	3	5	−8	−13	21	34

  になる.

$$
\begin{aligned}
\mu^\star &= (\mu_1^\star, \mu_2^\star, \mu_3^\star, \mu_4^\star) \\
&= \frac{c}{34}\left(\boxed{-1}, \ \boxed{3}, \ \boxed{-8}, \ \boxed{21} \right) \\
&= \frac{c}{F_9}\left(\boxed{-F_2}, \ \boxed{F_4}, \ \boxed{-F_6}, \ \boxed{F_8} \right).
\end{aligned}
$$

- **(相補フィボナッチ)**

  最小解 $\tilde{x}$ と最大解 $\mu^\star$ を交互に編むと、

$\tilde{x}_1$	$\mu_1^\star$	$\tilde{x}_2$	$\mu_2^\star$	$\tilde{x}_3$	$\mu_3^\star$	$\tilde{x}_4$	$\mu_4^\star$	x_5
1	-1	-2	3	5	-8	-13	21	34

  になる.

すなわち、これは「交互ダ・ヴィンチ・コード」を構成する。

交互ダ・ヴィンチ・コード 64

主問題 ($\mathrm{P_{s8}}$) および双対問題 ($\mathrm{D_{s8}}$) の変数を反転させて、反転問題

$$\begin{array}{lll} & \textbf{minimize} & \dfrac{F_{-1}F_0}{F_1}x_1^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{8}\left[\dfrac{F_{k-1}^2}{F_k}x_k^2 + F_k(x_k + x_{k+1})^2\right] \\ (\mathrm{RP_{s8}}) & \textbf{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < x_n < \infty \quad n = 1, 2, \cdots, 8 \\ & & \text{(ii)} \quad x_9 = c \end{array}$$

および

$$\begin{array}{lll} & \textbf{Maximize} & -F_1F_2\mu_1^2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{7}\left[\dfrac{F_{k+1}}{F_k^2}(F_k\mu_k + F_{k+1}\mu_{k+1})^2\right. \\ & & \qquad \left. + F_{k+1}\mu_{k+1}^2\right] + 2F_8c\mu_8 \\ (\mathrm{RD_{s8}}) & \textbf{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 2, 3, \cdots, 8 \\ & & \text{(ii)} \quad \mu_1 = 0 \end{array}$$

を考える。

主問題 $(\mathbf{RP_{s8}})$ の最小解 $\tilde{x}$ と最小値 m_8' は、

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= (\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \cdots,\ \tilde{x}_8) \\
&= \frac{c}{34}\left(\ \mathbf{1},\ \ \mathbf{-1},\ \ \mathbf{2},\ \ \mathbf{-3},\ \ \mathbf{5},\ \ \mathbf{-8},\ \ \mathbf{13},\ \ \mathbf{-21}\ \right) \\
m_8' &= \frac{13\cdot 21}{34}c^2
\end{aligned}$$

であり、双対問題 $(\mathbf{RD_{s8}})$ の最大解 $\mu^\star$ と最大値 M_8' は、

$$\begin{aligned}
\mu^\star &= (\mu_1,\ \mu_2^\star,\ \cdots,\ \mu_8^\star) \\
&= \frac{c}{34}\left(\ \mathbf{0},\ \ \mathbf{1},\ \ \mathbf{-1},\ \ \mathbf{2},\ \ \mathbf{-3},\ \ \mathbf{5},\ \ \mathbf{-8},\ \ \mathbf{13}\ \right) \\
M_8' &= \frac{13\cdot 21}{34}c^2
\end{aligned}$$

となる。

両反転問題の最適解の間には今度は前向きの交互フィボナッチ・シフト双対性が成り立つ。

- (双対性)

  最小値と最大値が等しい：

$$m_8' = M_8' = \frac{13 \cdot 21}{34} c^2.$$

- (交互フィボナッチ)

  最小解 $\tilde{x}$ と最大点 $\mu^\star$ は共に交代フィボナッチ数列の前向きである。

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= (\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \cdots,\ \tilde{x}_8) \\
&= \frac{c}{34}\left(\boxed{1},\ \boxed{-1},\ \boxed{2},\ \boxed{-3},\ \boxed{5},\ \boxed{-8},\ \boxed{13},\ \boxed{-21} \right) \\
&= \frac{c}{F_9}\left(\boxed{F_1},\ \boxed{-F_2},\ \boxed{F_3},\ \boxed{-F_4},\ \boxed{F_5},\ \boxed{-F_6},\ \boxed{F_7},\ \boxed{-F_8} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu^\star &= (\mu_1,\ \mu_2^\star,\ \cdots,\ \mu_8^\star) \\ &= \frac{c}{34}\left(\boxed{0},\ \boxed{1},\ \boxed{-1},\ \boxed{2},\ \boxed{-3},\ \boxed{5},\ \boxed{-8},\ \boxed{13}\right) \\ &= \frac{c}{F_9}\left(\boxed{-F_0},\ \boxed{F_1},\ \boxed{-F_2},\ \boxed{F_3},\ \boxed{-F_4},\ \boxed{F_5},\ \boxed{-F_6},\ \boxed{F_7}\right)\end{aligned}$$

$$\mu^\star = (\mu_1,\ \mu_2^\star,\ \cdots,\ \mu_8^\star)$$

$$= \frac{c}{34}\left(\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{2}, \boxed{-3}, \boxed{5}, \boxed{-8}, \boxed{13}\right)$$

$$= \frac{c}{F_9}\left(\boxed{-F_0}, \boxed{F_1}, \boxed{-F_2}, \boxed{F_3}, \boxed{-F_4}, \boxed{F_5}, \boxed{-F_6}, \boxed{F_7}\right)$$

- (シフト)

最小解 $\tilde{x}$ と最大解 $\mu^\star$ はお互い 1 段シフトさせている。

$$\tilde{x} = \frac{c}{34}\left(\boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{2}, \boxed{-3}, \boxed{5}, \boxed{-8}, \boxed{13}, \boxed{-21}\right)$$

$$\mu^\star = \frac{c}{34}\left(\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{2}, \boxed{-3}, \boxed{5}, \boxed{-8}, \boxed{13}\right)$$

になる。

$$\mu^\star = (\mu_1, \mu_2^\star, \cdots, \mu_8^\star)$$

$$= \frac{c}{34}\left(\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{2}, \boxed{-3}, \boxed{5}, \boxed{-8}, \boxed{13} \right)$$

$$= \frac{c}{F_9}\left(\boxed{-F_0}, \boxed{F_1}, \boxed{-F_2}, \boxed{F_3}, \boxed{-F_4}, \boxed{F_5}, \boxed{-F_6}, \boxed{F_7} \right)$$

- (シフト)

最小解 $\tilde{x}$ と最大解 $\mu^\star$ はお互い 1 段シフトさせている。

$$\tilde{x} = \frac{c}{34}\left(\boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{2}, \boxed{-3}, \boxed{5}, \boxed{-8}, \boxed{13}, \boxed{-21} \right)$$

$$\mu^\star = \frac{c}{34}\left(\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{2}, \boxed{-3}, \boxed{5}, \boxed{-8}, \boxed{13} \right)$$

になる。

$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_8)$ は、「交互ダ・ヴィンチ・コード」を構成する。

References I

[1] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[2] 岩本誠一，動的計画論，九大出版会，1987.

[3] S. Iwamoto, Cross dual on the Golden optimum solutions, 「経済の数理解析」, 京大数理研講究録 1443, 2005 年 7 月, pp. 27–43.

[4] S. Iwamoto, The Golden trinity — optimility, inequality, identity —, 「経済の数理解析」, 京大数理研講究録, 2006 年 5 月, pp. 1–14.

[5] S. Iwamoto, The Golden optimum solution in quadratic programming, Ed. W. Takahashi and T. Tanaka, Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA05), Yokohama Publishers, Yokohama, 2007, pp. 199–205.

[6] 岩本 誠一，黄金最適解を鑑賞する— 経済数学へのプレリュード（ V）－－ , 経済学研究・別冊 第 12 号 (九大経済学会), 平成 18(2006) 年 4 月, pp.39–43.

[7] 岩本 誠一，最適化「ダ・ヴィンチ・コード」 — 経済数学へのプレリュード（VI）— , 経済学研究・別冊 第 13 号 (九大経済学会). 平成 19(2007) 年 4 月, pp.45–52.

References II

[8] 岩本 誠一，ダ・ヴィンチ・コードは最適か？，数理経済学研究センター会報，第 37 号，平成 21(2009) 年 9 月，pp.1–9.

[9] 岩本 誠一，吉良 知文，植野 貴之，ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 (2009 年 10 月) 2 3 号, pp.1–21.

[10] 岩本 誠一，吉良 知文，植野 貴之，ダ・ヴィンチ・コード 64, 経済学研究 (九大経済学会), 第 77 巻 1 号, 2010 年, pp.1–25.

[11] 岩本 誠一，木村 寛，交互ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 4 号, 2010 年, pp.1–18.

[12] S. Iwamoto and Y. Kimura, The Alternately Fibonacci Complementary Duality in Quadratic Optimization Problem, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization, Vol.2, No.1, 2011, pp.93–103.

[13] 岩本 誠一，木村 寛，交互ダ・ヴィンチ・コード 64, 経済学研究 (九大経済学会), 第 78 巻 1 号, 2011 年, pp.1–26 (掲載予定).

[14] S. Iwamoto and A. Kira, The Fibonacci complementary duality in quadratic programming, Ed. W. Takahashi and T. Tanaka, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007 Taiwan), in press.

References III

[15] S. Iwamoto and M. Yasuda, "Dynamic programming creates the Golden Ratio, too," ***Proc. of the Sixth Intl Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2004)*****, Ballarat, Australia, December, 2004.**

[16] S. Iwamoto and M. Yasuda, Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes, Ed. S. Elaydi, K. Nishimura, M. Shishikura and N. Tose, Advanced Studies in Pure Mathematics 53, June 2009, Advances in Discrete Dynamic Systems, pp.77–86. Proceedings of The International Conference on Differential Equations and Applications (ICDEA2006), Kyoto University, Kyoto, Japan, July, 2006.

[17] A. Kira and S. Iwamoto, Golden complementary dual in quadratic optimization, Modeling Decisions for Artificial Intelligence, Proceedings of the Fifth International Confernece (MDAI 2008), Sabadell (Barcelona), Catalonia, Spain, October 30-31, 2008, Eds. V. Torra and Y. Narukawa, Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp.191–202.