日本ファジィ学会誌 Vol.10, No.6, pp.1053-1062(1998)

特集 確率ファジィ解析とその周辺

ファジィ・システムにおける意思決定の展開†

吉田 祐治*1 安田 正実*2

1. ファジィ動的計画法

動的計画法による多段意思決定の研究は，Bellman[2]を出発点として，以降 Bellman and Dreyfus[3]，Balackwell[6,7]，Bertsekas and Shreve[5]，Ross[21]，Whittle[23]等の多数の書物や論文が出版されている．しかし意思決定のモデル化に際しては，一般に不確実な状況下であり，かつ複雑な状況を如何に組み上げて，柔軟性，信頼性をもち，理論展開にもとづき計算可能な数学フレームを構成できるか，現実には多くの課題を抱えているであろう．確率的なシステムとして考察するモデルは，豊富な理論的な背景のもとに，極めて多くの応用が知られている．一方，著名な Bellman and Zadeh[4]がファジィ環境での意思決定としてモデルを構成してから，かなりの年月を経て，御承知のとおり極めて多数の理論，応用がなされているが未だ研究の途上にあるといえるだろう．

ここでは動的計画法の考えにもとづき，まず有限計画期間問題として多段モデルを定式化し，離散時間パラメータでの無限計画問題を定義し，動的ファジィ・システムを議論する．本論では，利得評価には割り引き利得の場合だけを述べ，長期間平均利得については，あとがきで少し触れる．また典型的なファジィ利得の最適停止時間モデルも参考文献だけにとどめておく．本論に関する話題は，日本数学会統計分科会の特別講演[28]や企画特別講演[38]においても発表をしているので併読していただければ幸いである．

まず初めに実数上で定義された関数からつぎの簡単な例を考えよう．対象とする状態が実数上の集合で，数理計画の問題としての制約と目的を意味するものである．

たとえば，ファジィ制約条件 C とファジィ・ゴール G がつぎのファジィ集合で与えられたとする．

$$\mu_C(x) := \begin{cases} (1+(x-10)^{-2})^{-1} & (x>10) \\ 0 & (x\leq 10) \end{cases}$$

$$\mu_G(x) := (1+((x-6)/5)^4)^{-1}$$

このとき，制約 C は 10 より大きく，15 以上は 95 %の程度をもつことを要求する．目的 G はだいたい 2 と 10 の間を 70 %以上，1 と 11 の間を 50 %以上，また 4 と 8 の間は 95 %以上を表すファジィ・ゴールと解釈することができる．このとき，ファジィ決定 $D=C\cap G$ はメンバーシップ関数

$$\mu_D(x) := \mu_C(x) \wedge \mu_G(x) \tag{1}$$

で表され(図 1)，

$$\mu_D(x^*) = \max_{x\in S} \mu_D(x) \tag{2}$$

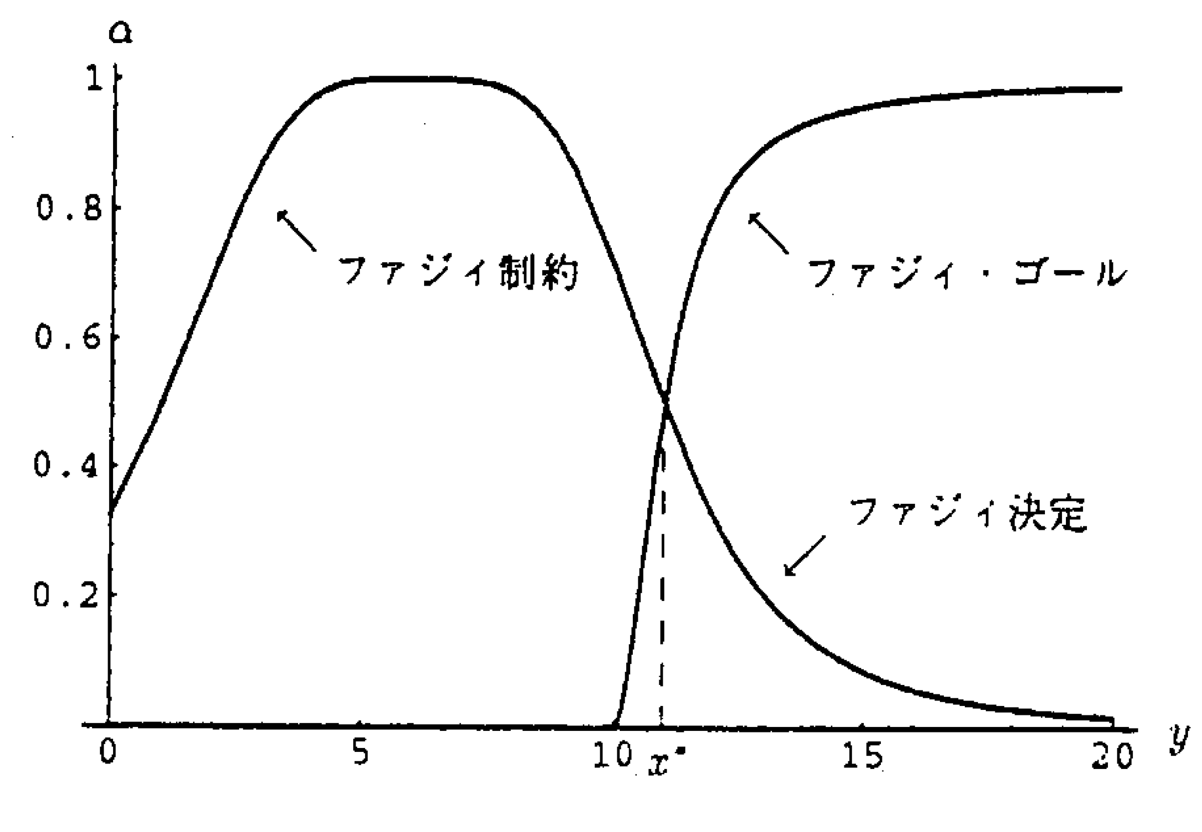


図1 ファジィ意思決定

---

† Decision-Making in Dynamic Fuzzy Systems
Yuji YOSHIDA and Masami YASUDA

*1 北九州大学経済学部
Faculty of Economics and Business Administration, Kitakyushu University
*2 千葉大学理学部
Faculty of Science, Chiba University

を満たす x^* は最適決定とよばれる．ここに，記号 $\wedge$ は $a \wedge b := \min\{a,b\}$ (a,b は実数) である．

N 期間の有限個の状態をもつ意思決定モデルでは，状態空間を $S := \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$，決定空間を $U := \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ として，t 時刻でのファジィ制約 C^t は U 上のファジィ集合 $(t=0,1,2,\cdots,N-1)$，ファジィ・ゴールは S 上のファジィ集合で与えられる．時刻 t のある状態 x_t においてある決定 u_t を選ぶことを戦略とよび，その対応を π_t で表す．

$$u_t := \pi_t(x_t) \quad (t=0,1,2,\cdots,N-1). \tag{3}$$

各時刻の戦略の列 $\pi := (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_{N-1})$ は政策とよばれる．システムの推移が

$$x_{t+1} := f(x_t, u_t) = f(x_t, \pi_t(x_t)) \tag{4}$$
$$(t=0,1,2,\cdots,N-1)$$

で与えられると（図2），ファジィ決定は

$$\begin{aligned} &\mu_D(u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}) \\ &\quad := \mu_{C^0}(u_0) \wedge \mu_{C^1}(u_1) \wedge \cdots \\ &\quad\quad \cdots \wedge \mu_{C^{N-1}}(u_{N-1}) \wedge \mu_G(x_N) \end{aligned} \tag{5}$$

となり，このとき，$\mu_D(u_0, u_1, \cdots, u_{N-1})$ を最大にする政策 π を求める．この解法としてもっとも広く用いられている方法は最適性の原理に基づくものである．

定理 1.1（最適性の原理） つぎのアルゴリズムを考える．

$$\mu_{G^N} := \mu_G,$$
$$\mu_{G^{N-i}}(x_{N-i})$$
$$:= \max_{u_{N-i}} \{\mu_{C^{N-i}}(u_{N-i}) \wedge \mu_{G^{N-i+1}}(x_{N-i+1})\}$$
$$(t=0,1,2,\cdots,N-1).$$

この式の max を達成する決定を u^*_{N-i} とおく．この決定は状態 x^{N-i} に依存して，$u^*_{N-i} = \pi^*_{N-i}(x^{N-i})$ によって戦略 π^*_{N-i} を与えることができる．このとき，戦略の列 $\pi^* := (\pi^*_0, \pi^*_1, \cdots, \pi^*_{N-1})$ は最適政策になり，

時刻:	$t=0$		$t=1$		$\cdots$		$t=N$
決定:	u_0 ↓		u_1 ↓		$\cdots$		
推移:		f		f		f	
状態:	x_0	$\longrightarrow$	x_1	$\longrightarrow$	$\cdots$	$\longrightarrow$	x_N

図2 ファジィ動的計画法

$$\begin{aligned} &\mu_{G_0}(x_0) \\ &\quad = \mu_D(u^*_0, u^*_1, \cdots, u^*_{N-1}) \\ &\quad = \max_{u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}} \mu_D(u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}) \end{aligned}$$

の関係が成り立つ．

システムの推移(4)を関数による対応関係ではなく，Zadeh の拡張原理に基づくファジィ化により，2つの状態間についてのファジィ関係ととらえて各決定に対して定める．Baldwin and Pilsworth[1]は，つぎのようなファジィ関係 $\mu_R : S \times S \mapsto [0,1]$ によってシステムの推移を与えた．

例として，2期間の離散的決定モデルにおいて，状態空間が3点集合 $S := \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$，決定空間が2点集合 $U := \{a_1, a_2\}$ とする．システムの推移を2状態 x_1, x_{t+1} 間のファジィ関係で与える．もし決定が $u_t = a_1$ の場合は

$x_t \backslash x_{t+1}$	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	1	0.3	0.7
σ_2	0.5	0.6	1
σ_3	1	0.4	0.8

決定が $u_t = a_2$ の場合は

$x_t \backslash x_{t+1}$	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	0.3	1	0.6
σ_2	1	0.4	0.7
σ_3	0.5	0.2	1

とする．ここで，ファジィ制約 $C^t(t=0,1)$ とファジィ・ゴール G を

$$\mu^0_C(a_1) = 0.7, \quad \mu^0_C(a_2) = 1$$
$$\mu^1_C(a_1) = 1, \quad \mu^1_C(a_2) = 0.6$$

$$\mu_G(\sigma_1) = 0.3, \quad \mu_G(\sigma_2) = 1, \quad \mu_G(\sigma_3) = 0.8$$

と与えると，最適戦略 $\pi^* := (\pi_0^*, \pi_1^*)$ と最適グレードは，最適性の原理から求めることができる．

状態	π_0^*	π_1^*	最適グレード
σ_1	a_2	a_1	0.8
σ_2	a_1 or a_2	a_1	0.7
σ_3	a_2	a_1	0.8

これらの様々なタイプについての動的計画法はEsogbue and Bellman[9]にまとめられている．

また，Kacprzyk はファジィ動的計画法の様々な解法(分枝限定法による解法，ニューラル・ネットによる解法)やモデル拡張(ファジィ期間での最適化，言語モデルでの最適推論)に取り組み，それらはKacprzyk[11,12,13]に納められている．岩本・藤田[10]は確率的なシステムのファジィ動的計画法で不変埋没原理による解法を研究している．

2. 動的ファジィ・システム

動的ファジィ・システムとファジィ決定過程に関する論文[14]-[17]，[24]-[37]は，ファジィ環境下での決定過程モデルについて，主として数学的な理論展開を目的としている．すなわち，従来の計画モデルによる定式化を発展させ，ファジィ推移の極限定理，システムの構造，関係方程式の一意性や存在等を議論する．

E をあるコンパクト距離空間とする．$\boldsymbol{C}(E)$ を E の空でない閉凸部分集合の全体として，ρ は $\boldsymbol{C}(E)$ のハウスドルフ距離を表す．このとき $(\boldsymbol{C}(E), \rho)$ はコンパクト距離空間になる([5])．以下の章では，E 上のファジィ集合をそのメンバーシップ関数 $\tilde{s} : E \mapsto [0,1]$ で表す(Zadeh[39]，Novák[19])．上半連続で正規性 $\sup_{x \in E} \tilde{s}(x) = 1$ を満たす E 上の凸ファジィ集合の全体を $\boldsymbol{F}(E)$ と表す．ファジィ集合 $\tilde{s}\ (\in \boldsymbol{F}(E))$ と実数 $\alpha\ (0 \leq \alpha \leq 1)$ に対して，その α-カットをつぎのように定義する．

$$\tilde{s}_\alpha := \begin{cases} \{x \in E \mid \tilde{s}(x) \geq \alpha\} & (\alpha > 0) \\ \mathrm{cl}\{x \in E \mid \tilde{s}(x) > 0\} & (\alpha = 0). \end{cases}$$

ただし，cl は集合の閉包を意味する．このとき，$\tilde{s}_\alpha \in \boldsymbol{C}(E)$ となる．ここで，離散時間の動的ファジィ・システム $(E, \tilde{q}, \tilde{s})$ の構成はつぎの条件(a)-(c)を満たすものとする．

(a) システムの状態はファジィであり，それはファジィ状態とよばれ $\boldsymbol{F}(E)$ の元で表される．特に，システムの状態が一点 $x\ (\in E)$ の場合にはその状態は特性関数 $1_{\{x\}}(\cdot)$ で表す．

(b) システムの推移は時間に無関係なファジィ関係 $\tilde{q} : S \times S \mapsto [0,1]$ で与えられ，$\tilde{q}$ は上半連続であるとする．システムが状態 $x\ (\in E)$ であるならば，単位時間に新しいファジィ状態 $\tilde{q}(x, \cdot)\ (\in \boldsymbol{F}(E))$ へ移る．

(c) 初期ファジィ状態は任意に与える．

この動的ファジィ・システムの条件からファジィ状態列 $\{\tilde{s}_t\}_{t=0}^\infty$ をつぎのように定義する．

$$\tilde{s}_{t+1}(y) = \sup_{x \in E} \{\tilde{s}_t(x) \wedge \tilde{q}(x, y)\} \quad (6)$$

$$(y \in E,\ t \geq 0)$$

となる．この式(6)はファジィ状態 $\tilde{s}_t$ からファジィ状態 $\tilde{s}_{t+1}$ への推移法則を表しファジィ推移とよばれる．

つぎでは，このシステムによって逐次決まる無限期間のファジィ状態列 $\{\tilde{s}_t\}_{t=0}^\infty$ を繰り返し観測し続けると，極限状態がある定常なファジィ状態に近づくかどうかを論じた．

定義 2.1(ファジィ状態列の収束) ファジィ状態列 $\{\tilde{s}_t\}_{t=0}^\infty$ がファジィ状態 $\tilde{p}$ に収束する(すなわち $\lim_{t \to \infty} \tilde{s}_t = \tilde{p}$)とは，

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \rho(\tilde{s}_{t,\alpha}, \tilde{p}_\alpha) \to 0 \quad (t \to \infty)$$

が成り立つときをいう．ただし，$\tilde{s}_{t,\alpha}$, $\tilde{p}_\alpha$ は各々ファジィ状態 $\tilde{s}_t$, $\tilde{p}$ の α-カット $(0 \leq \alpha \leq 1)$ である．

論文[14]で，ファジィ推移の縮小性の仮定を導入した．それを説明するためにつぎのするために

記号を与えよう．各$\alpha\in[0,1]$に対して，写像$\tilde{q}_\alpha : \boldsymbol{C}(E)\mapsto\boldsymbol{C}(E)$を

$$\tilde{q}_\alpha(D) := \left\{ y\in E \,\middle|\, \begin{array}{l}\tilde{q}(x,y)\geq\alpha \text{ を満たす} \\ x\in D \text{ が存在する}\end{array} \right\} \quad (\alpha>0)$$

と定義する．また，$\alpha=0$の場合は，$\tilde{q}(x,y)>0$とした集合の閉包で定義する．

仮定 2.1（ファジィ推移の縮小性） つぎの条件を満たす定数$\beta(0<\beta<1)$が存在する．

$$\rho(\tilde{q}_\alpha(A), \tilde{q}_\alpha(B))\leq\beta \quad \rho(A,B) \quad (A,B\in\boldsymbol{C}(E), \alpha\in[0,1]).$$

ファジィ状態列$\{\tilde{s}_t\}_{t=0}^{\infty}$について，この縮小性の仮定の下ではつぎの極限定理を示した．

定理 2.1（極限定理）

(i) つぎのファジィ関係方程式を満たす唯一のファジィ状態$\tilde{p}\in\boldsymbol{F}(E)$が存在する．

$$\tilde{p}(y)=\max_{x\in E}\{\tilde{p}(x)\wedge\tilde{q}(x,y)\} \quad (y\in E).$$

(ii) 式(6)で与えられたファジィ状態列$\{\tilde{s}_t\}_{t=0}^{\infty}$は，初期ファジィ状態に無関係に上式を満たす唯一つのファジィ状態$\tilde{p}\in\boldsymbol{F}(E)$に収束する．すなわち，

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{s}_t=\tilde{p}.$$

たとえば，ファジィ関係$(x,y\in[0,1])$を

$$\tilde{q}(x,y)=1-|y-x/2-1/4|$$

とすると，$\beta=1/2$で仮定2.1が満たされる（図3）．

いま，初期ファジィ状態を

$$\tilde{s}_0(x)=1-2|x-1/2| \quad (x\in[0,1])$$

とすると，ファジィ状態列$\{\tilde{s}_t\}_{t=0}^{\infty}$は

$$\tilde{s}_t(x)=1-a_t|x-1/2|.$$

ただし，数列$\{a_t\}_{t=0}^{\infty}$は初項$a_0=2$と2項関係$a_t=2a_{t-1}/(2a_{t-1}+1)$で与えられる．また，その極限のファジィ状態$\tilde{p}$は

$$\tilde{p}(x)=1-2^{-1}|x-1/2|$$

となることが分かる（図4）．

論文[37]では動的ファジィ・システムの再帰性の観点から極限のファジィ状態$\tilde{p}$の特徴付けを行っている．また，論文[27]では縮小条件を満たす代わりファジィ状態がファジィ数として単調性をもつ場合に極限のファジィ状態を論じている．さらに，論文[36]では，システムのもつ周期性について論じている．

論文[25]は，動的ファジィ・システムのファジィ推移法則がある種の線形構造をもつ場合に，縮小性とコンパクト性の仮定のもとでファジィ状態のポテンシャルの存在を証明し，そのポテンシャルがファジィ関係方程式の一意解であることを示している．さらに，論文[26]はその縮小性とコンパクト性の仮定をはずし，非有界の場合にはポテンシャルの存在がどのようになるかを論じている．

Stein[22]では，非確率的または確率的なシステムのファジィ制約の下での最適停止問題を論じている．論文[29]では，ファジィ推移に従う状態列に対する最適停止問題を研究し，ファジィ動的

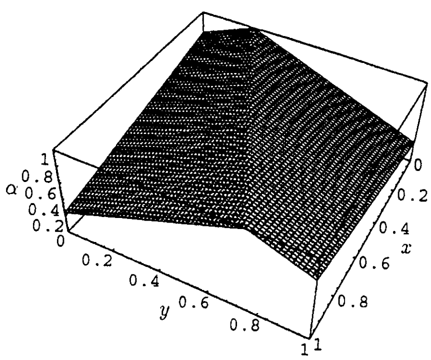


図3 縮小的ファジィ関係

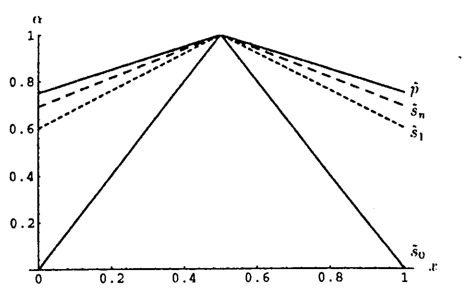


図4 ファジィ状態の極限

計画法を用いて解いた．また，論文[35]では，双対性の観点から論じている．

3. ファジィ決定過程

非確率的または確率的なシステムでファジィ評価による利得モデルを論じたものにChang[8]がある．前述の動的ファジィ・システムの分析をもとに，論文[15,16,17]ではマルコフ型の推移を伴うファジィ決定過程を構成し，Zadehの拡張原理に基づき利得をファジィ数で与えている．この章では，マルコフ型の推移を伴うファジィ決定過程について論文[15]の結果を紹介しよう．

まず，状態 $x_t \in S$ と決定(入力) $a_t \in A$ に対してシステムの推移が，いわゆる漸化式 $f: S\times A \mapsto S$ で与えられたとする．

$$x_{t+1}=f(x_t,a_t) \quad (t=1,2,\cdots) \tag{7}$$

この推移法則をZadehの拡張原理によってファジィ化することから考えてみよう．ファジィ状態 $\tilde{x}_t \in \boldsymbol{F}(S)$ とファジィ決定 $\tilde{a}_t \in \boldsymbol{F}(A)$ に対して，ファジィ関係 $\tilde{f} \in \boldsymbol{F}((S\times A)\times S)$ によるファジィ状態の推移をつぎで定義する．

$$\tilde{x}_{t+1}=Q(\tilde{x}_t, \tilde{a}_t) \quad (t=1,2,\cdots).$$

ただし，

$$Q(\tilde{x}_t, \tilde{a}_t)(y) := \sup_{(x,a)\in S\times A} \tilde{x}_t(x) \wedge \tilde{a}_t(a) \wedge \tilde{f}(x,a,y) \tag{8}$$

$$(y \in S).$$

いま，とくに

$$\tilde{f}(x,a,y)=\begin{cases}1 & (y=f(x,a))\\ 0 & (y\neq f(x,a))\end{cases}$$

$\tilde{x}_1=1_{\{x_1\}}$，$\tilde{a}_1=1_{\{a_1\}}$ とおくと，(7)は(8)に帰着される．これから，ファジィ状態の推移を表す(8)は，(7)の状態空間 S をファジィ状態空間 $\boldsymbol{F}(S)$ にし決定空間 A をファジィ決定空間 $\boldsymbol{F}(A)$ にしたファジィ拡張になっていることが分かる．

この考えをもとに，マルコフ型の推移を伴うファジィ決定過程の定式化を考えよう．E_1 と E_2 を各々バナッハ空間のコンパクト凸部分集合とする．直積 $E_1\times E_2$ 上のファジィ関係 $\tilde{q}$ が不等式

$$\tilde{q}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda y_1+(1-\lambda)y_2) \geq \tilde{q}(x_1,y_1)\wedge \tilde{q}(x_2,y_2)$$

$$(x_1,x_2\in E_1,\ y_1,y_2\in E_2,\ \lambda\in[0,1])$$

を満たすとき，凸であるという．上半連続で正規条件を満たす凸ファジィ関係の全体を $\boldsymbol{F}(E_1\times E_2)$ 表す．

つぎの(A)−(C)を満たすマルコフ型の推移を伴うファジィ決定過程

$$(S,A,[0,M],\ \tilde{q},\ \tilde{r},\ \beta)$$

を考える．

(A) 状態空間 S と決定空間 A は，各々バナッハ空間のコンパクト凸部分集合とする．各時刻でのシステムの状態と決定は $\boldsymbol{F}(S)$ と $\boldsymbol{F}(A)$ の元で表され，ファジィ状態とファジィ決定とよばれる．

(B) システム推移とファジィ利得は時間に無関係なファジィ関係 $\tilde{q}\in \boldsymbol{F}((S\times A)\times S)$ と $\tilde{r}\in \boldsymbol{F}((S\times A)\times[0,M])$ で表される．ただし，M は正の定数．システムがファジィ状態 $\tilde{s}\in \boldsymbol{F}(S)$ にあるとき，ファジィ決定 $\tilde{a}\in \boldsymbol{F}(A)$ を選ぶと，新しいファジィ状態 $Q(\tilde{s},\tilde{a})$ に移り，ファジィ利得 $R(\tilde{s},\tilde{a})$ が得られる．ただし，Q と R はつぎの式で与える．

$$Q(\tilde{s},\tilde{a})(y) := \sup_{(x,a)\in S\times A} \tilde{s}(x)\wedge \tilde{a}(a)\wedge \tilde{q}(x,a,y) \tag{9}$$

$$(y\in S)$$

$$R(\tilde{s},\tilde{a})(u) := \sup_{(x,a)\in S\times A} \tilde{s}(x)\wedge \tilde{a}(a)\wedge \tilde{r}(x,a,u) \tag{10}$$

$$(0\leq u\leq M).$$

(C) 定数 β は $0<\beta<1$ を満たす割引率である．

ファジィ状態とファジィ決定に基づく政策を定義しよう．写像 $\pi: \boldsymbol{F}(S)\mapsto \boldsymbol{F}(A)$ を戦略とよび，戦略の全体を $\Pi := \{\pi \mid \pi: \boldsymbol{F}(S)\mapsto \boldsymbol{F}(A)\}$ で表す．また，戦略 $\pi: \boldsymbol{F}(S)\mapsto \boldsymbol{F}(A)$ の α-カット

$\pi(\widetilde{s})_\alpha$が$\alpha$と集合$\widetilde{s}_\alpha$のみに依存するとき許容可能であるとよび，許容可能な戦略で構成される政策も許容可能とよび，許容可能な政策の全体をΠ_Aで表す．特に，政策$(\pi,\pi,\pi,\cdots)$は定常であるとよばれπ^∞と書く．初期ファジィ状態$\widetilde{s}\in\boldsymbol{F}(S)$が与えられたとき，政策$\check{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\cdots)$によって定まるファジィ状態列$\{\widetilde{s}_t\}_{t=0}^{\infty}$を

$$\widetilde{s}_1 := \widetilde{s},$$
$$\widetilde{s}_{t+1} := Q(\widetilde{s}_t, \pi_t(\widetilde{s}_t)) \quad (t=1,2,\cdots) \tag{11}$$

とおく．このファジィ状態の推移は，$t+1$時刻のファジィ状態がt時刻のファジィ状態によって定まるという意味でマルコフ性をもつ(図5).

定数を$M' := M/(1-\beta)$とおくと，$\boldsymbol{C}([0,M'])$は区間$[0,M']$の空でない閉部分区間の全体を表している．$\boldsymbol{C}([0,M'])$上のハウスドルフ距離δを

$$\delta([a,b],[c,d]) = |a-c| \vee |b-d| \quad ([a,b],[c,d]\in\boldsymbol{C}([0,M']))$$

とする．ここに，記号$\vee$は$a\vee b := \max\{a,b\}$ (a,bは実数)である．$\boldsymbol{F}([0,M'])$は閉区間$[0,M']$内の広い意味でのファジィ数を表している．割引率を伴う総ファジィ利得を定義するために，このファジィ数に定義2.1と同様にハウスドルフ距離δによる収束を導入しておく．

定義3.1(ファジィ数列の収束) ファジィ数の列$\{\widetilde{n}_t\}_{t=0}^{\infty}\subset\boldsymbol{F}([0,M'])$がファジィ数$\widetilde{n}\in\boldsymbol{F}([0,M'])$に収束する($\lim_{t\to\infty}\widetilde{n}_t=\widetilde{n}$)とは，

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} \delta(\widetilde{n}_{t,\alpha}, \widetilde{n}_\alpha) \to 0 \quad (t\to\infty)$$

が成り立つときをいう．ただし，$\widetilde{n}_{t,\alpha}$, $\widetilde{n}_\alpha$は各々ファジィ数$\widetilde{n}_t$, $\widetilde{n}$のα-カットである．

論文[25]によるポテンシャルに関する結果から，

$$\left\{\sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} R(\widetilde{s}_t, \pi_t(\widetilde{s}_t))\right\}_{T\geq 1}$$

は収束しファジィ数になる．それをここでは割引率を伴う総ファジィ利得とよび，

$$\psi(\widetilde{s},\check{\pi}) := \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} R(\widetilde{s}_t, \pi_t(\widetilde{s}_t)) \tag{12}$$

時刻:	$t=1$		$t=2$		$\cdots$
決定:	$\tilde{a}_1$		$\tilde{a}_2$		$\cdots$
	↓		↓		
推移: 状態:	$\tilde{s}_1$	$\xrightarrow{Q}$	$\tilde{s}_2$	$\xrightarrow{Q}$	$\cdots$
	↓		↓		
利得:	$R(\tilde{s}_1,\tilde{a}_1)$		$R(\tilde{s}_2,\tilde{a}_2)$		$\cdots$

図5 ファジィ決定過程

とおく．ここでRはファジィ数であるから，ふつうの級数の意味ではなく，ファジィ数の和，スカラー倍，そしてファジィ数での極限の意味であることに注意しておく．

つぎに，総ファジィ利得を比較するため順序を考えねばならない．ファジィ集合論ではファジィ数を比較するさまざまな順序が考案されているが，つぎで定義するファジィ・マックス順序は，基本的な順序の公理系で満たされる自然な順序と考えられる．

定義3.2(ファジィ・マックス順序) ファジィ数$\widetilde{n}\in\boldsymbol{F}([0,M'])$がファジィ数$\widetilde{m}\in\boldsymbol{F}([0,M'])$よりもファジィ・マックス順序$\succeq$に関して大きいか等しい($\widetilde{n}\succeq\widetilde{m}$)とは，不等式

$$\widetilde{n}_\alpha^- \geq \widetilde{m}_\alpha^- \quad と \quad \widetilde{n}_\alpha^+ \geq \widetilde{m}_\alpha^+$$

がすべてのα $(0\leq\alpha\leq 1)$について成り立つときをいう．ここでα-カットした閉区間の上限と下限をそれぞれ$\widetilde{n}_\alpha=[\widetilde{n}_\alpha^-, \widetilde{n}_\alpha^+]$, $\widetilde{m}_\alpha=[\widetilde{m}_\alpha^-, \widetilde{m}_\alpha^+]$と表す．

この順序はいわゆる「半順序」とよばれる範疇に入り，すべてのファジィ数がこの順序で比較できるというわけではない．しかし，ファジィ数全体$(\boldsymbol{F}([0,M']), \succeq)$は完備束の性質をもつから，ファジィ利得の順序$\succeq$に関する上限はファジィ数になる．

$$\sup_{\check{\pi}\in\Pi_A} \psi(\widetilde{s},\check{\pi}) \in \boldsymbol{F}([0,M']).$$

ここでの問題は，総ファジィ利得$\psi(\widetilde{s},\check{\pi})$をフ

ァジィ・マックス順序$\succeq$に関して最大にする許容可能な政策$\check{\pi}$を見つけることである．

最適性に関する結果を記述するためα-カットについて記号を導入する．写像$\tilde{q}_\alpha: \boldsymbol{C}(S)\times\boldsymbol{C}(A)\mapsto\boldsymbol{C}(S)$と$\tilde{r}_\alpha: \boldsymbol{C}(S)\times\boldsymbol{C}(A)\mapsto\boldsymbol{C}([0,M'])$を

$$\tilde{q}_\alpha(D\times B):=\left\{y\in S \,\middle|\, \begin{array}{l}\tilde{q}(x,a,y)\geq\alpha \text{ を満たす}\\ (x,a)\in D\times B \text{ が存在する}\end{array}\right\} \quad (\alpha>0)$$

$$\tilde{r}_\alpha(D\times B):=\left\{\{u\geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l}\tilde{r}(x,a,u)\geq\alpha \text{ を満たす}\\ (x,a)\in D\times B \text{ が存在する}\end{array}\right\} \quad (\alpha>0)$$

で定義する．また$\alpha=0$はそれぞれ“$\geq\alpha$”を“>0”とした集合の閉包をとる．さらに，各$\pi\in\Pi_A$, $\alpha\in[0,1]$に対して，写像$Q_\alpha^\pi: \boldsymbol{C}(S)\mapsto\boldsymbol{C}(S)$と$R_\alpha^\pi: \boldsymbol{C}(S)\mapsto\boldsymbol{C}([0,M'])$を

$$Q_\alpha^\pi(D):=\tilde{q}_\alpha(D\times\pi(\alpha,D)) \quad (D\in\boldsymbol{C}(S))$$
$$R_\alpha^\pi(D):=\tilde{r}_\alpha(D\times\pi(\alpha,D)) \quad (D\in\boldsymbol{C}(S))$$

とおく．一方，閉集合から閉区間への写像の族を$V:=\{v: \boldsymbol{C}(S)\mapsto\boldsymbol{C}([0,M'])\}$とおき，空間$V$上の距離$d_V$を

$$d_V(v,w):=\sup_{D\in C(S)}\delta(v(D),w(D)) \quad (v,w\in V)$$

とすると，(V,d_V)は完備距離空間になる．

定理 3.1(論文[15])

(i)各$\pi\in\Pi_A$と$\alpha\in[0,1]$に対して，写像$U_\alpha^\pi: V\mapsto V$を

$$U_\alpha^\pi v(D):=R_\alpha^\pi(D)+\beta v(Q_\alpha^\pi(D)) \quad (v\in V, D\in\boldsymbol{C}(S))$$

で与えると，U_α^πは距離d_Vに関して縮小的であり，

$$v_\alpha^\pi=U_\alpha^\pi v_\alpha^\pi \tag{13}$$

を満たす不動点$v_\alpha^\pi\in V$が唯一つ存在する．

(ii)各$\tilde{s}\in\boldsymbol{F}(S)$と許容可能な定常政策$\pi^\infty=(\pi,\pi,\pi,\cdots)$に対してつぎの式が成り立つ．

$$\psi(\tilde{s},\pi^\infty)_\alpha=v_\alpha^\pi(\tilde{s}_\alpha). \tag{14}$$

従来のマルコフ決定過程(Blackwell[7])に習い，定理3.2によって政策改良法を与えることもできる．つぎに，最適方程式を考えよう．写像$U_\alpha: V\mapsto V(\alpha>0)$を

$$U_\alpha v(D):=\sup_{B\in C(A)}\{\tilde{r}_\alpha(D\times B)+\beta v(\tilde{q}_\alpha(D\times B))\} \quad (v\in V, D\in\boldsymbol{C}(S))$$

とおく．ただし，supはつぎに述べる閉区間に関する半順序$\succeq_{ci}$である．各2つの閉区間$[a,b]$, $[c,d]\in\boldsymbol{C}([0,M'])$に対して

$$[a,b]\succeq_{ci}[c,d] \iff a\geq c \text{ かつ } b\geq d.$$

この場合，各レベルαごとにつぎの最適方程式を得る(論文[15])．

定理 3.2(最適方程式) 各$\alpha\in[0,1]$に対して，写像U_αは縮小的で

$$v_\alpha^*=U_\alpha v_\alpha^* \tag{15}$$

を満たす不動点$v_\alpha^*\in V$が唯一つ存在する．

さらに，$\tilde{r}$と$\tilde{q}$に関する一様連続性の仮定(論文[15])のもとで，このv_α^*から最適総ファジィ利得を構成できる．

定理 3.3 各$\alpha\in(0,1]$と$\tilde{s}\in\boldsymbol{F}(S)$に対して，ファジィ数

$$v^*(\tilde{s})(u):=\sup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge 1_{v_\alpha^*(\tilde{s}_\alpha)}(u)\} \quad (0\leq u\leq M)$$

が定義でき$v^*(\tilde{s})$は初期ファジィ状態$\tilde{s}$に対する最適総ファジィ利得である．もし各$\alpha\in[0,1]$に対して，$U_\alpha^{\pi^*}v_\alpha^*=v_\alpha^*$を満たす戦略$\pi^*\in\Pi_A$が存在するならば，その定常政策$\pi^{*\infty}$は最適である．

たとえば，$S=[0,1]$, $A=[0,1]$, $M=1$, $\beta=0.5$とおく，ファジィ関係を

$$\tilde{q}(x,a,y)=\Lambda_{[x\wedge a,x\vee a]}(y) \quad (x,y\in S, a\in A)$$
$$\tilde{r}(x,a,u)=\Lambda_{[x\wedge a,x\vee a]}(u) \quad (x\in S, a\in A, u\in[0,1])$$

で与えよう．$\tilde{q}(x,a,y)$は，$x<a$ または $a<x$ に応じて，左右にシステムを動かすファジィ推移を表す(図6,図7)．ただし，

$$\Lambda_{[c,d]}(w)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{2}{d-c}\left|\dfrac{c+d}{2}-w\right|\right)\vee 0 \\ \qquad (0\leq c<d\leq 1,\ 0\leq w\leq 1) \\ 1_{\{c\}}(w) \qquad\qquad (c=d).\end{cases}$$

初期ファジィ状態を三角型ファジィ数

$$\tilde{s}(x):=(1-|8x-4|)\vee 0\quad (x\in S)$$

で与えると，最適政策$\check{\pi}^*=(\pi^*,\pi^*,\pi^*,\cdots)$は

$$\pi^*(\tilde{s}_t)=1_{\{1\}}\quad (t=1,2,3,\cdots)$$

であり，最適期待利得は

$$\begin{aligned}&\psi(\check{\pi}^*,\tilde{s})(u)\\&\approx\{7.5(1+0.267L(u)-0.267u)\wedge\\&\quad\wedge 16(-0.344-0.125L(u)+0.125u)\}\\&\quad\vee 0\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$L(u):=\sqrt{(-7.396+u)(-2.104+u)}\qquad (u\in[0,1])$$

である．

この章では，絶対最適な政策を求めてきたが，その仮定がいつも満たされるとは限らない．報告[30]では，あるファジィ積分によるファジィ利得の期待値を効用関数を用いて定義しファジィ期待値を最大にする最適な政策を求めている．たとえば，ファジィ・ゴールを単調増加関数

$$\tilde{g}(u):=1-\exp(-0.8u)\vee 0\quad (u\in[0,1])$$

で与えると，図8でu^*が最適支払となる．

本稿では触れなかったが，論文[16,17]では，ファジィ決定過程で長時間平均ファジィ利得を最適化する問題を論じている．長時間平均ファジィ利得は第2章の極限のファジィ状態と密接に関連していて，論文[14,27,37]の定常なファジィ状態の研究をもとに解析が行われる．長時間平均の場合，相対値関数を用いて最適方程式が与えられる．報告[32]ではファジィ・ゴールによる方法が長時間平均の場合でも適用できることでファジィ積分の妥当性を論じ，国際学会報告[33]ではそのファジィ積分の三角ノルムによる拡張性を論じている．さらに，論文[31]では，そのファジィ積分を用いた期待ファジィ利得の最適停止問題を研究している．

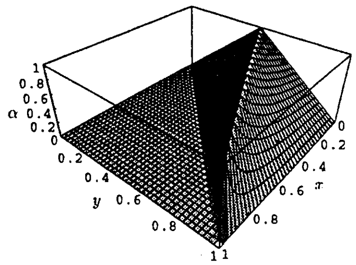


図6　ファジィ関係

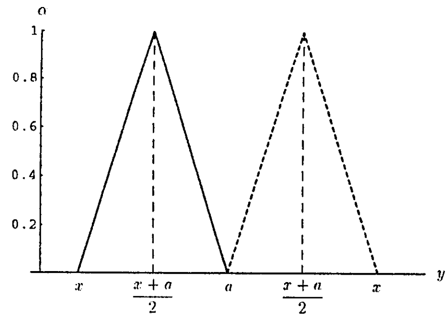


図7　ファジィ関係の働き

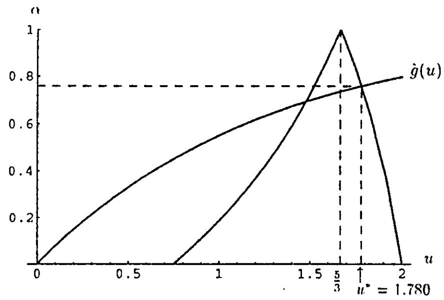


図8　ファジィ利得と評価

謝　辞

本研究は，蔵野正美(千葉大学教育学部)，中神潤一(千葉大学理学部)教授との共同研究に基づいている，両氏のご協力に感謝を表したい．

参 考 文 献

[1]J.E.Baldwin and B.W.Pilsworth, Dynamic programming for fuzzy systems with fuzzy environment, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol.85, 1-23, 1982.

[2]R.E.Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, 1957.

[3]R.E.Bellman and S.E.Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, 1962.

[4]R.E.Bellman and L.A.Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, *Management Sci. Ser B.*, Vol.17, 141-164, 1970.

[5]D.P.Bertsekas and S.E.Shreve, *Stochastic Optimal Control : The Discrete Time Case*, Academic Press, New York, 1978.

[6]D.Blackwell, Discrete dynamic programming, *Ann. Math. Stat.*, Vol.33, 719-726, 1962.

[7]D.Blackwell, Discounted dynamic programming, *Ann. Math. Stat.*, Vol.36, 226-235, 1965.

[8]S.S.L.Chang, Fuzzy dynamic programming and the decision making process, *Proceedings of the 3rd Princeton Conference on Information Sciences*, Princeton, N.J., 1969.

[9]A.O.Esogbue and R.E.Bellman, Fuzzy dynamic programming and its extensions, *TIMS/Studies in Management Sci.*, Vol.20, North-Holland, Amsterdam, 147-167, 1984.

[10]岩本 誠一, 藤田 敏治, 確率的ファジィ意思決定過程について, オペレーションズ・リサーチ, Vol.39, 517-521, 1994.

[11]J.Kacprzyk, Decision making in a fuzzy environment with fuzzy termination time, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.1, 169-179, 1978.

[12]J.Kacprzyk, Towards'human-consistent'multistage decision making and control models Using Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.18, 299-314, 1985.

[13]J.Kacprzyk, *Multistage Fuzzy Control*, Wiley, Chichester, 1997.

[14]M.Kurano, M.Yasuda, J.Nakagami and Y.Yoshida, A limit theorem in some dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.51, 83-88, 1992.

[15]M.Kurano, M.Yasuda, J.Nakagami and Y.Yoshida, Markov-type fuzzy decision processes with a discounted reward on a closed interval, *European Journal of Operational Research*, Vol. 92, 649-662, 1996.

[16]M.Kurano, M.Yasuda, J.Nakagami and Y.Yoshida, The time average reward for some dynamic fuzzy systems, to appear in *Computers Math. Appl.*.

[17]M.Kurano, M.Yasuda, J.Nakagami and Y.Yoshida, Fuzzy decision processes with an average reward criterion, *Tech. Rep. of Math. Sci., Chiba University,* Vol.4, No.11, 1995.

[18]S.Nanda, On sequences of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.33, 123-126, 1989.

[19]V.Novák, *Fuzzy Sets and Their Applications*, Adam Hilder, Bristol-Boston, 1989.

[20]S.M.Ross, *Applied probability models with optimization applications*,Holden-Say, san Francisco, 1970.

[21]S.M.Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, Florida, 1983.

[22]W.E.Stein, Optimal stopping in a fuzzy environment, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.3, 253-259, 1980.

[23]P.Whittle, *Optimization over Time, Vol.*1, Whiley, New York, 1982.

[24]M.Yasuda, A linear structure and convexity for relations in dynamic fuzzy systems, *Computers Math. Appl.*, Vol.27, 23-27, 1994.

[25]Y.Yoshida, M.Yasuda, J.Nakagami and M.Kurano, A potential of fuzzy relations with a linear structure : The contractive case, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.60, 283-294, 1993.

[26]Y.Yoshida, M.Yasuda, J.Nakagami and M.Kurano, A potential of fuzzy relations with a linear structure : The unbounded case, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.66, 83-95, 1994.

[27]Y.Yoshida, M.Yasuda, J.Nakagami and M.Kurano, A limit theorem in some dynamic fuzzy systems with a monotone property, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.94, 109-119, 1998.

[28]吉田祐治, ある動的ファジィ・システムの最適化, 日本数学会 特別講演予稿集, 於東京工業大学, 平成5年9月.

[29]Y.Yoshida, Markov chains with a transition possibility measure and fuzzy dynamic programming, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.66, 39-57, 1994.

[30]Y.Yoshida, On fuzzy decision processes with discounted fuzzy rewards, *Proceedings of ISUMA-NAFIPS* '95, at University of Maryland, 268-273, 1995.

[31]Y.Yoshida, An optimal stopping problem in dynamic fuzzy systems with fuzzy rewards, *Computers Math. Appl.*, Vol.32, 17-28, 1996.

[32]Y.Yoshida, Fuzzy decision processes with time-average fuzzy rewards, *Proceedings of NAFIPS '96*, at University of California, 75-79, 1996.

[33]Y.Yoshida, Fuzzy reward criteria in fuzzy decision processes, *Proceedings of IIZUKA '96*, at Kyushu Institute of Technology, 424-427, 1996.

[34]Y.Yoshida, Fuzzy decision processes with expected fuzzy rewards, in : B.M.Ayyub and M. M.Gupta, eds., *Uncertainty Analysis in Engineering and the Sciences*, Kluwer Academic Publ., Boston, Chap. 21, 313-323, 1997.

[35]Y.Yoshida, Duality in dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.95, 53-65, 1998.

[36]Y.Yoshida, Cyclic classes and an ergodic theorem in dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.95, 189-199, 1998.

[37]Y.Yoshida, The recurrence of dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.95, 319-332, 1998.

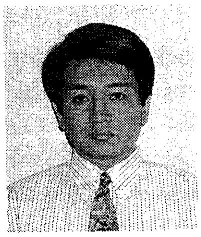
[38]吉田祐治, ファジィ・システムの数理, 日本数学会 企画特別講演 予稿集, 於名城大学, 平成10年3月.

[39]L.A.Zadeh, Fuzzy sets, *Inform. and Control*, Vol.8, 338-353, 1965.

(1996年9月9日 受付)

[問い合わせ先]
〒802-8577
北九州市小倉南区北方4-2-1
北九州大学経済学部
吉田 祐治
TEL : 093-964-4103
FAX : 093-964-4000
E-mail : yoshida@kitakyu-u.ac.jp
URL : http ://www.kitakyu-u.ac.jp/~yoshida/index.html

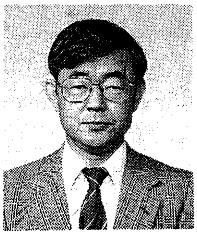
著者紹介



吉田 祐治（よしだ ゆうじ）

北九州大学経済学部

1978年 九州大学理学部数学科卒業, 1980年 同大学大学院理学研究科修士課程修了, 1984年 同研究科博士課程修了, 同年 日本電子(株)技術本部入社, 1986年 九州大学理学部助手, その後 千葉大学講師, 助教授を経て, 1993年 北九州大学経済学部助教授, 1996年 同大学教授, 現在に至る. 研究テーマは, 確率システムとファジィ・システムの解析. さらに, その最適化理論の研究と経営モデルでの意思決定の研究. 博士(理学, 九州大学). IFSA, 日本OR学会, 日本数学会各会員.



安田 正実（やすだ まさみ）

千葉大学理学部

1969年 千葉大学文理学部卒業, 1971年 九州大学大学院理学研究科修了, 同年 鹿児島大学助手, その後 千葉大学講師, 助教授を経て 1989年 同大学教授, 現在に至る. 研究テーマは確率モデルにおける最適化問題, ファジィ環境でのモデル化とその解析. 理学博士(九州大学). 日本数学会, 日本OR学会, 日本統計学会, 日本応用数理学会各会員.