

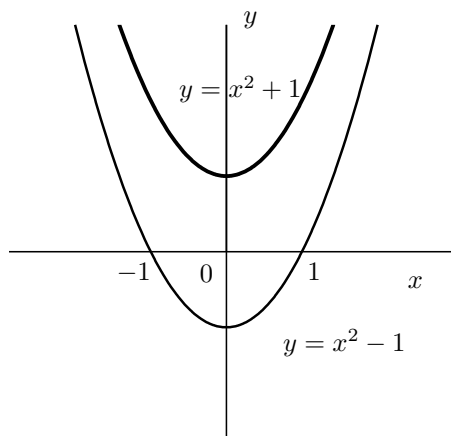
「数学と自然」 資料 N0.7(追加) (suu017b2.pdf)

複素数 (complex number) を考えてみます。われわれは、与えられた整数 a, b から実数 x に関する一次方程式; $ax + b = 0$ で、解 x には、正の数だけではなく、負の数が必要となることが分ります。たとえば、 $2x - 5 = 0$ は正の数を解としますが、 $2x + 5 = 0$ は負の数が解となります。また与えられた3つの整数 a, b, c から実数 x に関する2次方程式; $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ では実数だけではなく、複素数の概念が必要となります。実数とは数直線上の点で、値とその位置を対応できます。たとえば、 $y = x^2 - 1$ では数直線上に $x = 1, -1$ で交わるのが一目瞭然ですが、 $y = x^2 + 1$ としたら、 y 軸と交わるような点は見当たりません。2次方程式 $x^2 - 1 = 0$ では解は有理数と無理数を含む実数ですが、2次方程式 $x^2 + 1 = 0$ では解が、いままでの範囲を超えた複素数の概念が必要となります。ギリシャの時代にも、この数が表れたといわれますが、16世紀にカルダノ (G.Cardano,) が3次方程式 $x^3 + 6x = 20$ の解、 $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}} = 2$ を求めるときといわれます。

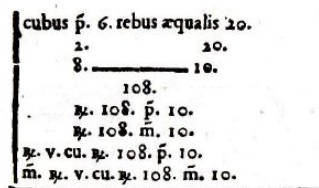
さらに、著書「Ars Magna」に述べられている $x^3 - 15x = 4$ の解として

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} \\ &= (2 + \sqrt{-1}) - (-2 + \sqrt{-1}) = 4 \end{aligned}$$

を求めた、この $\sqrt{-1} = i$ が単位複素数 (imaginary number) の今日の表現です。このような形になることもたいへん不思議なことですね。この解になることは後述の公式で導けます。



写真は Wikipedia の URL: から。下の数式は、Journey through Genius (W.Dunham, Penguin books) から。下の図中、一行目には、“cubus p. 6.rebus aequalis 20.”として $x^3 + 6x = 20$ の意味が、また下の2行には、“ $\sqrt{108}$ p. 10”と“ $\sqrt{108}$ m. 10”という解が書かれています。ここでは、この手順を説明してみます。



Cardano's Rule for the cubic, from *Ars Magna*
(photograph courtesy of Johnson Reprint Corporation)

カルダノの3次方程式の解

3次方程式: $x^3 + mx = n$ を解け。

カルダノは一辺の長さを t とする立方体から2つの小さな立方体を辺の長さが u と $t - u$ に分けると、その部分の体積は $u^3, (t - u)^3$ となります。大きな立方体は6つの部分に切り分けられ、

$$t^3 = u^3 + (t - u)^3 + 2tu(t - u) + u^2(t - u) + u(t - u)^2$$

と表せます。これを整理すると、

$$(t - u)^3 + 3tu(t - u) = t^3 - u^3$$

となりますが、この代数的な演算の展開や整理は、その当時に行われておらず、幾何的な図形に基づきました。この式の目的は $t - u = x$ とおくと、 x の2次項が消去されて、さらに

$$3tu = m, \quad t^3 - u^3 = n$$

とおくことで、 t^3, u^3 の関係として、積が $t^3 \times u^3 = \frac{m^3}{27}$ 、差が $t^3 - u^3 = n$ なる “2 次方程式” に帰着できます。この 2 次方程式から立方根をとり、

$$t = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}, \quad u = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}$$

となりますから、この 2 つから $x = t - u$ として、求めることができました。ただし m^3 となっていますから、 m の値が負で大きければ、“平方根の中はマイナスに” なることもあります。冒頭の例はその場合に当たります。

問 1. つぎの関係式を平面上の図形をもちいて説明せよ。ヒント：辺の長さを $a + b, a - b$ の長方形を描く。

$$(1) (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \quad (2) (a + 2b)(a - 3b) = a^2 - ab - 6b^2$$

問 2. 2 つの方程式の関係を調べよ。

$$x^3 - 15x^2 + 81x - 175 = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \quad y^3 + 6y = 20 \quad \cdots \textcircled{2}$$

問 3. 文中に表れたつぎの式を確かめよ。

$$(1) \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}} = 2$$

$$(2) \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} = (2 + \sqrt{-1}) - (-2 + \sqrt{-1}) = 4$$

問 4. (ボンベツリ) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$ (ここで b の係数にはマイナスがある。また $\sqrt{-121} = 11i$ という意味) とおくとき、 $a^2 + b = 5$ および $a^3 - 3ab = 2$ を満たし、 $a = 2, b = 1$ となることを示しなさい。

問 5. 複素数を係数とする 2 次の方程式を解きなさい。

$$(1) x^2 + 6ix + (6 - 8i) = 0 \quad (2) x^2 - (5 - 2i)x + (1 - 41i) = 0$$

$$(3) (1 + i)x^2 - (2 + i)x + (3 + 4i) = 0 \quad (4) \frac{1 - i}{1 + i}x^2 + \frac{1 + i}{1 - i}x - (2 + 4i) = 0$$

$$\text{答 (1) } 1 + i, -1 - 7i \quad (2) 7 + 3i, -2 - 5i \quad (3) 1 - 2i, -1/2 + 3/2i \quad (4) 1 + 2i, -2i$$

4 次方程式はたいへんな苦勞を多くの人々により研究されました。しかしそれより高次の解法の挑戦はすべて無駄になります。5 次以上の理論は、アーベルやガロアの出現により、解決されることとなります。今日の数学理論には代数学だけではなく極めて重要な影響を与えます。彼らの業績や波乱に満ちた生涯は、多くの本により紹介され、劇的なドラマとなっています。1 冊だけでは偏りのあるものとなりますから、ぜひ複数の本を読まれてみると思います。(以下は wikipedia から引用)

N.Abel(1802-1829) 1818 年に、数学教師ホルンボエに出会ってから、数学に興味を抱くようになった。友人達とヨーロッパ中を回って長く遊学し、クレレと知遇を得て、クレレの雑誌に多数の研究論文を掲載した。ヤコビやルジャンドルはアーベルの業績を認めていたが、ガウスはアーベルの研究論文に不快感を示し、コーシーは彼の論文をまともに審査しないまま放置するなど、アーベルには正当な評価が与えられなかった。帰国後はクリスチャニア大学に臨時講師を勤めたが、病気（結核及び併発した肝機能障害）のために 26 歳で世を去った。しかし、彼が当時世界最高レベルといわれた数学の総本山パリ科学アカデミーへ提出した「超越関数の中の非常に拡張されたものの一般的な性質に関する論文」こその中に“青銅よりも永続する記念碑”と謳われ後代の数学者に 500 年分の仕事を残してくれたとまで言われた不滅の大論文だった。5 次以上の代数方程式には、冪根 $n\sqrt{\quad}$ と四則演算だけで書けるような一般的な解の公式が存在しないことに、初めて正確な証明を与えた。この業績については、パオロ・ルフィニの重要な貢献があるが、その証明は必ずしも完全なものではなかったとされている。

E.Galois(1811-1832) 数学者として 10 代のうちにガロア理論の構成要素である体論や群論の先見的研究を行った。彼はガロア理論を用い、ニールス・アーベルによる「五次以上の方程式には一般的な代数的解の公式がない」という定理（アーベル-ルフィニの定理）の証明を大幅に簡略化し、また、より一般にどんな場合に与えられた方程式が代数的な解の表示を持つかについての特徴付けを与えた。ガロア理論に端を発する考え方は抽象代数学、疑似乱数列 (PN)、誤り訂正符号 (ECC) など、数学、物理学、コンピュータなど、自然科学や応用科学の多くの分野に表れている。また、彼の創始した数学理論である群論はアインシュタインの特殊相対性理論におけるローレンツ群やハイゼンベルクらの量子力学などの現代物理学の言葉としても用いられる。

複素数の話がほとんどありませんが、非常に多くの分野にもちいられ、重要な概念です。

W.Rudin の「Real and Complex Analysis」には、『これは数学でもっとも重要な関数である。(This is the most important function in mathematics.)』と記されている。複素関数の指数関数『オイラーからの贈り物』：複素関数での指数関数と三角関数

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$

をすこしだけ述べてみる。

複素関数は $z = a + bi$ と表現され、あるいはベクトル (a, b) とも対応がつけられます。

与えられた複素数 $z = a + bi, w = c + di$ に対して、ただし複素数の集まり $\mathbb{C} \ni z, w$, 実数の集まりを $\mathbb{R} \ni a, b, c$ などと表します。

● 用語の定義：

$z = a + bi$ の共役複素数： $\bar{z} = a - bi$

$z = a + bi$ の絶対値： $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z = a + bi$ の偏角： $\arg(z) = \arctan \frac{b}{a} = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

$z = a + bi$ の実部 (Real part)、 $\operatorname{Re}(z) = a$, 虚部 (Imaginary part) $\operatorname{Im}(z) = b$

● 演算の定義：

加法： $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$

乗法： $zw = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(bc + ad)$ ただし第1項は $i^2 = -1$ から。

とします。また割り算は $\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$

問 1 $z, w \in \mathbb{C}$ について、

$$(1) \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

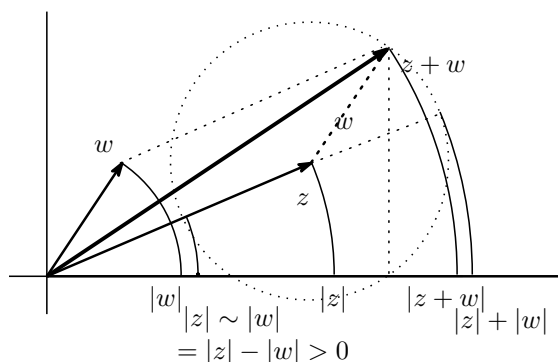
$$(2) \quad z\bar{z} = |z|^2 \quad (3) \quad \bar{z}\bar{w} = \overline{zw} \quad (4) \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$(5) \quad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

問 2 三角不等式を示せ。

$$|z| \sim |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

等号の成り立つ場合はどんなときか。ここで $\sim$ は2つの数値の差。



z, w の和は平行四辺形で表され、それぞれは絶対値の大きさを円で、実軸上に対応できる。これから、 $|z| \sim |w|, |z| + |w|$ などの絶対値比較は、円周と実軸の交点で表現され、その大小関係が理解できる。平面図形の三角形が成り立つ、辺の長さから三角形が形成されることと同じである。これを絶対値の数値計算による不等式を導く。

つぎに $z = a + bi$ の指数関数 $e^z = \exp(z) = e^a e^{ib}$ を考える。虚部の b に関する部分が定義できると、その実数倍 e^a で計算される。 b のかわりに θ とする。なぜなら、 $\arg(z) = \theta$ となるから。指数関数の実数での関係式

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

において、 $x = i\theta$ において、複素数へ拡張すると、 $i^n \rightarrow \{1, -1, -i, i, \cdots\}, (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ と周期が4の繰

り返しとなる。よって、

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} &= 1 + (i) \frac{\theta}{1!} + (-1) \frac{\theta^2}{2!} + (-i) \frac{\theta^3}{3!} + (1) \frac{\theta^4}{4!} + (i) \frac{\theta^5}{5!} + \cdots \\
 &= (\text{実部}) + i(\text{虚部}) \\
 &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\
 &= \cos \theta + i \sin \theta
 \end{aligned}$$

問 3 (i) $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = 0 + 1 \cdot i = i$, (ii) $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = (-1) + i \cdot 0 = -1$ の関係を表計算ソフトで求めてみよ。また $\pi/4 = 45^\circ$ や $\pi/6 = 30^\circ$ を確かめなさい。表計算では、 $\pi = \text{PI}()$, $k! = \text{FACT}(k)$, $(\pi/2)^k = (\text{PI}()/2)^k$ と計算できる。 $e^{i\pi/2} = i$ では、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ とおいて順に計算していく

(i)

$e^{(\pi/2)i}$ の近似項		極限值
1	+ 0	= 1
1	+ $i\pi/2$	= $1 + 1.57i$
$1 - (\pi/2)^2/2!$	+ $i\pi/2$	= $-0.23 + 1.57i$
$1 - (\pi/2)^2/2!$	+ $i(\pi/2 - (\pi/2)^3/3!)$	= $-0.23 + 0.92i$
$1 - (\pi/2)^2/2! + (\pi/2)^4/4!$	+ $i(\pi/2 - (\pi/2)^3/3!)$	= $0.02 + 0.92i$
$1 - (\pi/2)^2/2! + (\pi/2)^4/4!$	+ $i(\pi/2 - (\pi/2)^3/3! + (\pi/2)^5/5!)$	= $0.02 + 1.00i$
$1 - (\pi/2)^2/2! + (\pi/2)^4/4! - (\pi/2)^6/6!$	+ $i(\pi/2 - (\pi/2)^3/3! + (\pi/2)^5/5!)$	= $0.00 + 1.00i$
$\rightarrow \cos(\pi/2) = 0.00$	+ $i(\rightarrow \sin(\pi/2) = 1.00)$	$\rightarrow i$

(ii)

$e^{\pi i}$ の近似項		極限值
1	+ 0	= 1
1	+ $i\pi$	= $1 + 3.14i$
$1 - \pi^2/2!$	+ $i\pi$	= $-3.93 + 3.14i$
$1 - \pi^2/2!$	+ $i(\pi - \pi^3/3!)$	= $-3.93 - 2.03i$
$1 - \pi^2/2! + \pi^4/4!$	+ $i(\pi - \pi^3/3!)$	= $0.12 - 2.03i$
$1 - \pi^2/2! + \pi^4/4!$	+ $i(\pi - \pi^3/3! + \pi^5/5!)$	= $0.12 + 0.52i$
$1 - \pi^2/2! + \pi^4/4! - \pi^6/6!$	+ $i(\pi - \pi^3/3! + \pi^5/5!)$	= $-1.21 + 0.52i$
$1 - \pi^2/2! + \pi^4/4! - \pi^6/6!$	+ $i(\pi - \pi^3/3! + \pi^5/5! - \pi^7/7!)$	= $-1.21 - 0.08i$
$1 - \pi^2/2! + \pi^4/4! - \pi^6/6! - \pi^8/8!$	+ $i(\pi - \pi^3/3! + \pi^5/5! - \pi^7/7!)$	= $-0.98 - 0.08i$
$1 - \pi^2/2! + \pi^4/4! - \pi^6/6! - \pi^8/8!$	+ $i(\pi - \pi^3/3! + \pi^5/5! - \pi^7/7! + \pi^9/9!)$	= $-0.98 - 0.01i$
$\rightarrow \cos(\pi) = -1.00$	+ $i(\rightarrow \sin(\pi) = 0.00)$	$\rightarrow -1$

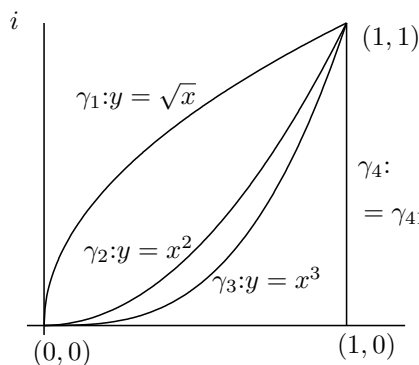
複素積分を説明します。実数関数での積分と比較すると、たいへん興味があるとおもいます。

複素積分の定義として、線積分で定めます。複素平面の点 $z = x + iy$, (x, y) の点がある実数パラメータ t ($\alpha \leq t \leq \beta$ により条件 $(x, y) \in (C)$ 、たとえば、 $x = x(t)$, $y = y(t)$ として、放物線 $y = x^2$ のうちの $(0, 0)$ と $(1, 1)$ の部分であれば、 $x = t$, $y = t^2$ ($0 \leq t \leq 1$) と表します。この曲線を γ : として、曲線上の分割した点を結び合わせていった和に対して、極限をとります。もし、 $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ であれば、さらに変形できます。ここで $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ としています。

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i f(z_i) |z_{i+1} - z_i| = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt$$

例題

原点 $\alpha = 0$ から $\beta = 1 + i$ までの経路を 4 通りについて、関数 $f(z) = z^2 = (x + iy)^2$ を積分してみます。不思議なことに経路が違っていても、答えはすべて同じになります。



4通りの経路：

(i) 経路 $\gamma_1 : y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x(t) = t, y(t) = \sqrt{t}, (0 \leq t \leq 1)$

(ii) 経路 $\gamma_2 : y = x^2 \Leftrightarrow x(t) = t, y(t) = t^2, (0 \leq t \leq 1)$

(iii) 経路 $\gamma_3 : y = x^3 \Leftrightarrow x(t) = t, y(t) = t^3, (0 \leq t \leq 1)$

(iv) 経路 $\gamma_4 = \gamma_{41} + \gamma_{42} : \{x(t) = t, y(t) = 0\} + \{x(t) = 1, y(t) = t\}, (0 \leq t \leq 1)$

積分の計算：

(i) $\gamma_1 : z(t) = t + i\sqrt{t}, dz(t) = \left(1 + \frac{i}{2\sqrt{t}}\right) dt, f(z(t)) = (t + i\sqrt{t})^2$ より、

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} z^2 dz &= \int_0^1 (t + i\sqrt{t})^2 \left(1 + \frac{i}{2\sqrt{t}}\right) dt = \int_0^1 (t^2 + 2it\sqrt{t} - t) \left(1 + \frac{i}{2}t^{1/2}\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(t^2 + \frac{5i}{2}t^{3/2} - 2t - \frac{i}{2}t^{1/2}\right) dt = \frac{1}{3} + \frac{5i}{2} \frac{1}{1+3/2} - 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \frac{1}{1+1/2} \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2i}{3} = \frac{(1+i)^3 - 0^3}{3} = \frac{z^3}{3} \Big|_{z=0}^{1+i} \end{aligned}$$

(ii) $\gamma_2 : z(t) = t + it^2, dz(t) = (1 + 2it) dt, f(z(t)) = (t + it^2)^2$ より、

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} z^2 dz &= \int_0^1 (t + it^2)^2 (1 + 2it) dt = \int_0^1 t^2 (1 + it)^2 (1 + 2it) dt \\ &= \int_0^1 t^2 (1 + 4it - 5t^2 - 2it^3) dt \\ &= \frac{1}{3} + 4i \frac{1}{4} - 5 \frac{1}{5} - 2i \frac{1}{6} = -\frac{2}{3} + \frac{2i}{3} = \frac{z^3}{3} \Big|_{z=0}^{1+i} \end{aligned}$$

後半の部分は練習問題として、試みてください。

(iii) $\gamma_3 : z(t) = t + it^3, dz(t) = (1 + 3it^2) dt, f(z(t)) = (t + it^3)^2$ として、代入して計算します。

(iv) $\int_{\gamma_4} z^2 dz = \int_{\gamma_{41}} z^2 dz + \int_{\gamma_{42}} z^2 dz$ となっていますから、 $\gamma_{41} : z(t) = t, dz(t) = dt, f(z(t)) = t^2, (0 \leq t \leq 1)$ ですし、また $\gamma_{42} : z(t) = it, dz(t) = i dt, f(z(t)) = i^2, (0 \leq t \leq 1)$ として計算していきます。

微積分での重要な関係式；

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x = \exp(x)$$

を複素数 $z = x + iy$ では当然、

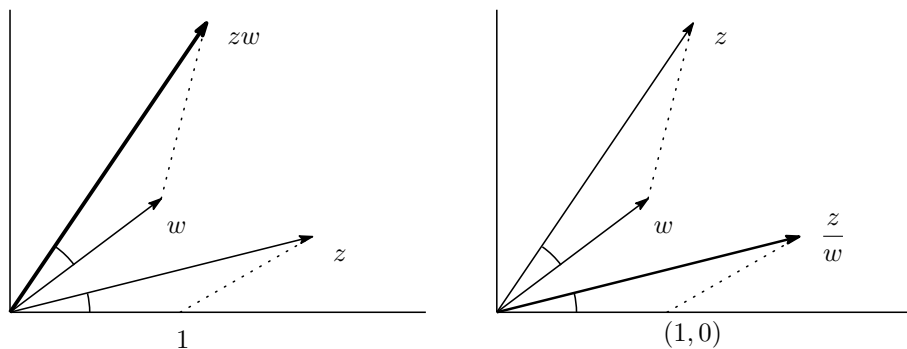
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z = \exp(z)$$

と期待できますし、もし $x = 0, y = \theta$ であるときには

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\theta}{n}\right)^n = e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$

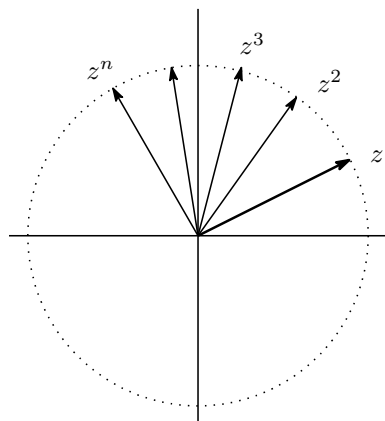
が得られるはずです。この理由は $z_n = 1 + \frac{i\theta}{n}$ とおくと、 $|z_n| = \sqrt{1 + \left(\frac{\theta}{n}\right)^2}$ また 2 乗 z_n^2 は $(0,0), (1,0), z_n$ で定まる直角三角形で角度は $\frac{\theta}{n}$ です。積（べき乗）は回転させることから、 n 乗すれば、この繰り返しですから、 $\arg((z_n)^n) = n \arg(z_n) = n \arctan\left(\frac{\theta}{n}\right) \approx \theta$ となります。角度が θ の複素数で単位円上にありますから、近似的に $\cos \theta + i \sin \theta$ と考えられます。

z と w の積：原点と点 $(1,0)$, z の作る三角形と原点と w, zw の三角形が相似になる。各辺の長さ (各複素数の絶対値) を考えると、 $|(1,0)| = 1, |z-1|, |z|$ に対応して、 $|w|, |zw-w| = |z-1| \cdot |w|, |zw| = |z| \cdot |w|$ となる。



問 積の相対的な関係から、商 $\frac{w}{z}$ と z, w の位置関係を考えよ。(ヒント) 一般に $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ とおくと、和 $z_1 + z_2$ は平行四辺形の辺と対角線の関係、差 $z_2 - z_1$ も平行四辺形の辺と対角線の間をもつ。積は $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ から、与えられた複素数から作られた三角形を回転して、辺のひとつを他の複素数の辺にそろえた拡大／縮小の位置関係 (相似形) によって与えられる。また、商は $\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$ べき乗は $z^n = r^n e^{i(n\theta)}$, $z^{1/n} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$ となる。

べき乗積：単位円周上の点 z の $z^n, n = 1, 2, \dots$:



複素数 $z = 1 + i \frac{\theta}{n}$ の偏角は、 $\arg(z) = \frac{\theta}{n}$ であり、 n が大き

いと、 $|z| = \sqrt{1 + \left(\frac{\theta}{n}\right)^2}$ でほぼ単位円周上に近い位置にある。これを n 乗する z^n は、偏角が n 倍されるから、 θ の角度値をもつ偏角になる。この複素数は $\cos \theta + i \sin \theta$ に他ならない。つまり、これは $\exp(i\theta) = e^{i\theta}$ 。

いいかえると、

$$\left(1 + \frac{i\theta}{n}\right)^n \rightarrow e^{i\theta}$$

実数の $e = 2.71828 \dots$ の定義

$$\lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

が複素数平面で、自然に拡張されている。