

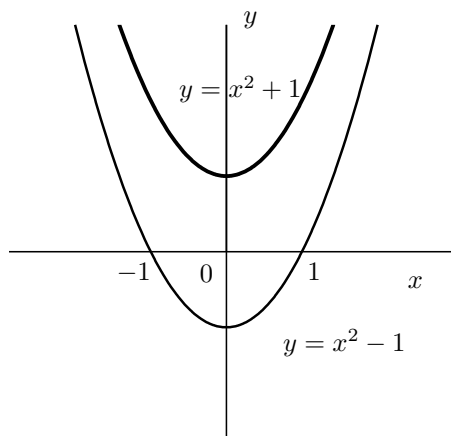
「数学と自然」 資料 N0.7 (suu017.pdf)

複素数 (complex number) を考えてみます。われわれは、与えられた整数 a, b から実数 x に関する一次方程式; $ax + b = 0$ で、解 x には、正の数だけではなく、負の数が必要となることが分ります。たとえば、 $2x - 5 = 0$ は正の数を解としますが、 $2x + 5 = 0$ は負の数が解となります。また与えられた3つの整数 a, b, c から実数 x に関する2次方程式; $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ では実数だけではなく、複素数の概念が必要となります。実数とは数直線上の点で、値とその位置を対応できます。たとえば、 $y = x^2 - 1$ では数直線上に $x = 1, -1$ で交わることが一目瞭然ですが、 $y = x^2 + 1$ としたら、 y 軸と交わるような点は見当たりません。2次方程式 $x^2 - 1 = 0$ では解は有理数と無理数を含む実数ですが、2次方程式 $x^2 + 1 = 0$ では解が、いままでの範囲を超えた複素数の概念が必要となります。ギリシャの時代にも、この数が表れたといわれますが、16世紀にカルダノ (G.Cardano,) が3次方程式 $x^3 + 6x = 20$ の解、 $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}} = 2$ を求めるときといわれます。

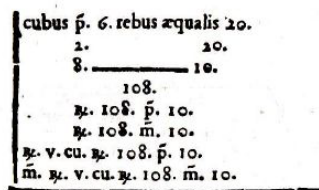
さらに、著書「Ars Magna」に述べられている $x^3 - 15x = 4$ の解として

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} \\ &= (2 + \sqrt{-1}) - (-2 + \sqrt{-1}) = 4 \end{aligned}$$

を求めた、この $\sqrt{-1} = i$ が単位複素数 (imaginary number) の今日の表現です。このような形になることもたいへん不思議なことですね。この解になることは後述の公式で導けます。



写真は Wikipedia の URL: から。下の数式は、Journey through Genius (W.Dunham, Penguin books) から。下の図中、一行目には、“cubus p. 6.rebus aequalis 20.”として $x^3 + 6x = 20$ の意味が、また下の2行には、“ $\sqrt[3]{108}$ p. 10”と“ $\sqrt[3]{108}$ m. 10”という解が書かれています。ここでは、この手順を説明してみます。



Cardano's Rule for the cubic, from *Ars Magna*
(photograph courtesy of Johnson Reprint Corporation)

カルダノの3次方程式の解

3次方程式: $x^3 + mx = n$ を解け。

カルダノは一辺の長さを t とする立方体から2つの小さな立方体を辺の長さが u と $t - u$ に分けると、その部分の体積は $u^3, (t - u)^3$ となります。大きな立方体は6つの部分に切り分けられ、

$$t^3 = u^3 + (t - u)^3 + 2tu(t - u) + u^2(t - u) + u(t - u)^2$$

と表せます。これを整理すると、

$$(t - u)^3 + 3tu(t - u) = t^3 - u^3$$

となりますが、この代数的な演算の展開や整理は、その当時に行われておらず、幾何的な図形に基づきました。この式の目的は $t - u = x$ とおくと、 x の2次項が消去されて、さらに

$$3tu = m, \quad t^3 - u^3 = n$$

とおくことで、 t^3, u^3 の関係として、積が $t^3 \times u^3 = \frac{m^3}{27}$ 、差が $t^3 - u^3 = n$ なる “2 次方程式” に帰着できます。この 2 次方程式から立方根をとり、

$$t = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}, \quad u = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}$$

となりますから、この 2 つから $x = t - u$ として、求めることができました。ただし m^3 となっていますから、 m の値が負で大きければ、“平方根の中はマイナスに” なることもあります。冒頭の例はその場合にあたります。

問 1. つぎの関係式を平面上の図形をもちいて説明せよ。ヒント：辺の長さを $a + b, a - b$ の長方形を描く。

$$(1) (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \quad (2) (a + 2b)(a - 3b) = a^2 - ab - 6b^2$$

問 2. 2 つの方程式の関係を調べよ。

$$x^3 - 15x^2 + 81x - 175 = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \quad y^3 + 6y = 20 \quad \cdots \textcircled{2}$$

問 3. 文中に表れたつぎの式を確かめよ。

$$(1) \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}} = 2$$

$$(2) \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} = (2 + \sqrt{-1}) - (-2 + \sqrt{-1}) = 4$$

問 4. (ボンベツリ) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$ (ここで b の係数にはマイナスがある。また $\sqrt{-121} = 11i$ という意味) とおくとき、 $a^2 + b = 5$ および $a^3 - 3ab = 2$ を満たし、 $a = 2, b = 1$ となることを示しなさい。

問 5. 複素数を係数とする 2 次の方程式を解きなさい。

$$(1) x^2 + 6ix + (6 - 8i) = 0 \quad (2) x^2 - (5 - 2i)x + (1 - 41i) = 0$$

$$(3) (1 + i)x^2 - (2 + i)x + (3 + 4i) = 0 \quad (4) \frac{1 - i}{1 + i}x^2 + \frac{1 + i}{1 - i}x - (2 + 4i) = 0$$

$$\text{答 (1) } 1 + i, -1 - 7i \quad (2) 7 + 3i, -2 - 5i \quad (3) 1 - 2i, -1/2 + 3/2i \quad (4) 1 + 2i, -2i$$

4 次方程式はたいへんな苦勞を多くの人々により研究されました。しかしそれより高次の解法の挑戦はすべて無駄になります。5 次以上の理論は、アーベルやガロアの出現により、解決されることとなります。今日の数学理論には代数学だけではなく極めて重要な影響を与えます。彼らの業績や波乱に満ちた生涯は、多くの本により紹介され、劇的なドラマとなっています。1 冊だけでは偏りのあるものとなりますから、ぜひ複数の本を読まれてみるというと思います。(以下は wikipedia から引用)

N.Abel(1802-1829) 1818 年に、数学教師ホルンボエに出会ってから、数学に興味を抱くようになった。友人達とヨーロッパ中を回って長く遊学し、クレレと知遇を得て、クレレの雑誌に多数の研究論文を掲載した。ヤコビやルジャンドルはアーベルの業績を認めていたが、ガウスはアーベルの研究論文に不快感を示し、コーシーは彼の論文をまともに審査しないまま放置するなど、アーベルには正当な評価が与えられなかった。帰国後はクリスチャニア大学に臨時講師を勤めたが、病気(結核及び併発した肝機能障害)のために 26 歳で世を去った。しかし、彼が当時世界最高レベルといわれた数学の総本山パリ科学アカデミーへ提出した「超越関数の中の非常に拡張されたものの一般的な性質に関する論文」こその中に“青銅よりも永続する記念碑”と謳われ後代の数学者に 500 年分の仕事を残してくれたとまで言われた不滅の大論文だった。5 次以上の代数方程式には、冪根 $n\sqrt{\quad}$ と四則演算だけで書けるような一般的な解の公式が存在しないことに、初めて正確な証明を与えた。この業績については、バオロ・ルフィニの重要な貢献があるが、その証明は必ずしも完全なものではなかったとされている。

E.Galois(1811-1832) 数学者として 10 代のうちにガロア理論の構成要素である体論や群論の先見的な研究を行った。彼はガロア理論を用い、ニールス・アーベルによる「五次以上の方程式には一般的な代数的解の公式がない」という定理(アーベル-ルフィニの定理)の証明を大幅に簡略化し、また、より一般にどんな場合に与えられた方程式が代数的な解の表示を持つかについての特徴付けを与えた。ガロア理論に端を発する考え方は抽象代数学、疑似乱数列(PN)、誤り訂正符号(ECC)など、数学、物理学、コンピュータなど、自然科学や応用科学の多くの分野に表れている。また、彼の創始した数学理論である群論はアインシュタインの特殊相対性理論におけるローレンツ群やハイゼンベルクらの量子力学などの現代物理学の言葉としても用いられる。

複素数の話がほとんどありませんが、非常に多くの分野にもちいられ、重要な概念です。最後に、オイラーからの贈り物をひとつ：複素関数での指数関数と三角関数

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$