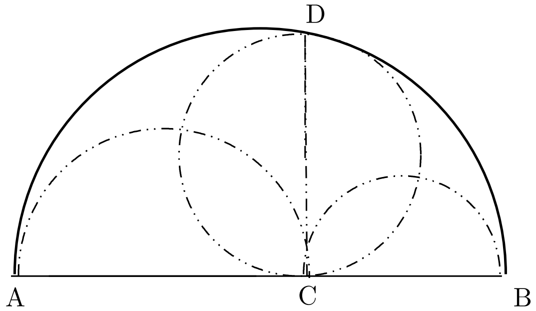
「数学と自然」 資料 N0.6 (suu016.pdf)

偏愛的数学「魅惑の図形」（岩波書店、2011 年）には幾何学の驚異、数学の金塊という章建てで書かれていて、その本の和書の文献リストに挙げている、清宮俊雄、「幾何学　改訂版」科学新興新社、1988 年があります。副題に「発見的研究法」とあるように，全体の３分の２ほどはどのようにして新しい定理を発見するか，という内容になっていて、興味が持てます。さらに先生ご自身が 16 歳の時に見つけられ「清宮の定理」と呼ばれる結果も紹介されています。とてもいい本であるとおもいます。

また経済学者として有名な宇沢弘文氏の書かれた「好きになる数学入門」（岩波書店、1999 年）第３巻「代数で幾何を解く一解析幾何」はやさしく読めます。このうちからトッピクスを拾ってみましょう。歴史的にも有名な定理が述べられています。

アルキメデスによる「アルベロスの定理」

アルベロスとは、靴屋のナイフのことですが、図形の形に由来するからといわれます。アルキメデスの「レンマの本」(Book of Lemmas) にあるとのことです。



与えられた線分ＡＢ上に点Ｃをとり、ＡＢ，ＡＣ，ＢＣを直径とする３つの半円を描く。一番大きな半円ＡＢから２つの小さな半円ＡＣ，ＢＣを切り取って残りの「アルベロス」形の ACBDA をつくる。またＣで直線ＡＢに立てた垂線が半円周ＡＢと交わる点をＤとして、ＣＤを直径とする円を描く。このとき

アルベロス ACBDA の面積	=	CD を直径とする 円の面積

(証明) 直径 AB に対する円周角 $\angle$ADB は 90^o だから、三角形 $\triangle$ABD は直角三角形となる。いま $a = \overline{AC}$ $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ とおけば、$ab = c^2$. また AB, AC, BC を直径とする半円の面積は、$\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$ となるから、「アルベロス」ACBDA の面積 S は $S = \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}ab.$ 一方、CD を直径とする円の面積 T は $T = \pi\left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}c^2.$ このことから、面積は等しくなる。(終)

問 1. 「アルベロス」ACBDA を線分 CD によって２つの図形に分けたとき、それぞれの図形に内接する円の半径はお互いに等しい。これを示せ。（ヒント：この円の半径ともに $\dfrac{ab}{2(a+b)}$）

ヒポクラテスは、紀元前 430 年ころに活躍したギリシャの数学者です。直角三角形と円の関係、三角形の比例と相似などが知られています。同じ地域で同じころ活躍した「医聖」とよばれるヒポクラテスとは別人物です。

ヒポクラテスの定理

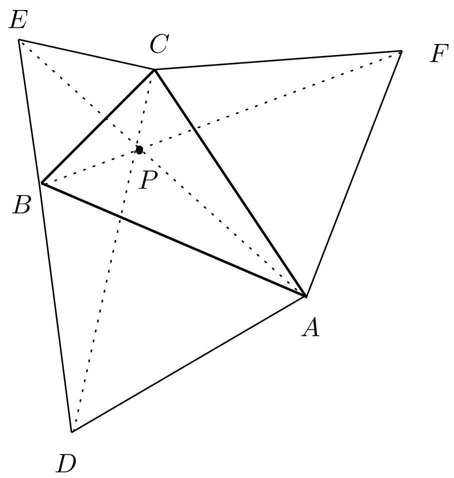
与えられた直角三角形 $\triangle$ABC の斜辺 AB を直径とする半円を描き、他の２辺、BC,CA を直径とする直角三角形 ABC の外側に描く。３つの半円からつくった２つの三日月形の図形の面積の和は、直角三角形の面積に等しい。

あの有名なボナパルト・ナポレオン (1769-1821) による平面幾何学の三角形に関する定理がある。ナポレオンと関わりをもった数学者には、ポンスレ (1788-1867); ナポレオン軍の工兵将校の教師、射影幾何学の創始者, モンジュ (1746-1818)；軍の技術顧問、微分幾何学、曲面論, ラグランジュ (1736-1813)；１８世紀最大の数学者、ア

ントワネットの数学教師も、解析力学、天文学, フーリエ (1768-1830); エジプト遠征に随行、熱伝導方程式、フーリエ変換、確率論, ラプラス (1749-1827); ナポレオン政府の内務大臣、天体力学、解析学、ラプラスの悪魔など。錚々たる面々が連なる。

ナポレオンの三角形

長さの異なる任意の三角形において、その各辺上に各辺の長さを一辺とする正三角形をつくる。正三角形の各頂点ともとの三角形の頂点を結ぶ。(1) 3つの線分は同一の点で交わる。(2) 3つの線分の長さは等しい。(3) 3つの正三角形の重心を結んでつくられる三角形は正三角形である。



等間隔にならんだ平面での格子点をいくつか結んでつくられる多角形 (凸でも凹でもよい) において、その格子点での面積を求める簡単な公式が知られている。これを Pick の定理とよばれる。1899 年 Georg Alexander Pick オーストリアの数学者

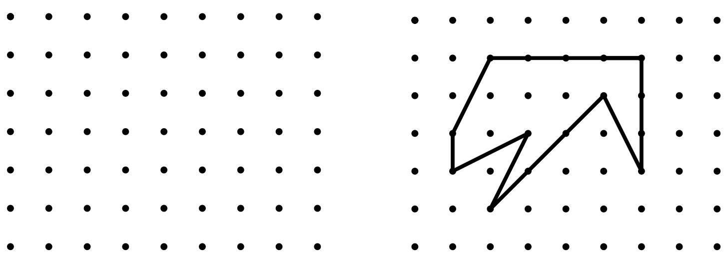
ピックの定理

多角形の頂点がすべて格子点上にあり、(A) 多角形の内部 (含まれる点 interia) の点の個数 ; i (B) 辺上の格子点（境界 boundary）の個数; b とすると、多角形の面積 S は

$$S = i + \frac{1}{2}b - 1$$

として求められる。

問 2 実際、グラフ用紙などをもちい、その格子点を結んでつくった任意の多角形（凸凹でも）の内部の点の個数、境界線上にある点の個数を数え上げて、定理が成り立つことを確かめよ。



右図は内部には 4 点、境界上には 15 点並んでいる。面積を計算してみよ。