

ニュートンの積分

2 項係数の展開式を一般化したばあい、ニュートンが積分の計算として用いました。積分記号で書けば

$$\int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n x^{\frac{n+m}{n}}}{n+m}$$

ですが、微積分のテキストでは、 $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, 微分式では $\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$ というライプニッツ流の
ほうが見易いかも知れません。

ニュートンのもちいた積分は、2 項係数を展開すると x^a というべき乗式で関数が表れるからです。半径 $1/2$ で
中心が $(1/2, 0)$ の上半円の面積を計算しています。 $y = \sqrt{x(1-x)} = (x-x^2)^{1/2}$ ですから、2 項展開の式を適用
できます。

$(a+b)^{\alpha}$ の形で $a=x, b=x^2, \alpha=1/2$ として、はじめの 2, 3, 4 項ぐらいを計算してみてください。これを積
分しますが、0 から 1 までは半円になり、積分しなくてもいいのですが、途中の 0 から $1/4$ まで、つまり、原始
関数の形を計算しています。

数列の和と積分

微分をすることはもとの関数から、次数がひとつ減ったりしますから、積分と比べれば楽です。しかし積分
はやはり難しくなります。係数のプラスとマイナスでも、かなり違った関数（原始関数）となります。ここ
では数列の和（離散的な場合）について考えましょう。積分は連続関数についての概念ですが、そこには類
似性が見出されます。

数列の和：

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots+n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

ここまではお馴染みの式でしょう。しかしこれからより高次の場合の公式は少し計算が必要となります。昔の偉
い人、関孝和などは、12 乗ぐらいを計算しているのですから驚きです。もちろん電卓の代わりには算盤ですか
らね。

せっかく 2 項係数の関係式を知っているのだから、これを用いた関係式を説明していきます。はじめは $1+2+3+4+5+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$ から出発します。分母に 2 がきいているので、積をつくると 3 を分母にして、
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20 = \frac{60}{3} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3}$, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 40 = \frac{120}{3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3}$, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = 70 = \frac{210}{3} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3}$. これから、 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 2 \binom{n+2}{3}$.
両辺を 2 で割って、最尾項のひとつを取り除くと、つぎの 2 項係数の関係式が得られます。

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

最初は 2 から出発しますが、 $\binom{1}{2} = 0$ ですから、書きません。さらに進めば、2 個ずつの積を 3 個ずつにすれば、

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{n-1}{3} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3}$$

が成り立つことを推察することは難しくはありません。どんどんしていくと、 $\binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} = \binom{n+1}{n-1}$
ですから、“1” + “n” = “n+1” となった詰まらない式になってしまいました。

この目的は和の積分との関連ですが、得られた式は、増加乗積

$$k^{[r]} = \overbrace{k(k+1)(k+2)\cdots(k+r-2)(k+r-1)}^r$$

をもちいるならば、 $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+\cdots+n\cdot (n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ の式は

$$1^{[2]}+2^{[2]}+3^{[2]}+4^{[2]}+5^{[2]}+\cdots+n^{[2]}=\frac{n^{[3]}}{3}$$

となります。Σ (シグマ) 記号で書くと、 $r=2,3,4,\cdots$ で成り立ちますから

$$\sum_{k=1}^n k^{[r]}=1^{[r]}+2^{[r]}+3^{[r]}+4^{[r]}+5^{[r]}+\cdots+n^{[r]}=\frac{n^{[r+1]}}{r+1}$$

となり、よく知られたベキ関数の積分公式 (積分定数は省略) ;

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}$$

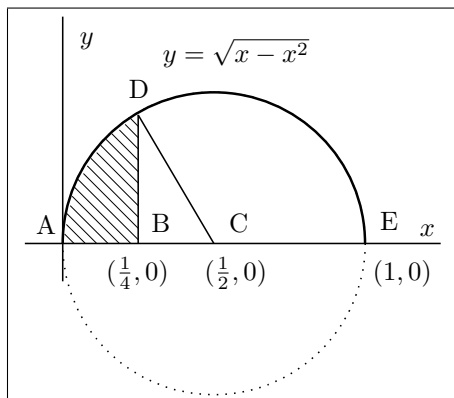
と比べて、類似性が感じられるはずです。

π の近似計算

ニュートンは一般化した 2 項係数の展開式を積分することで、円周率 π の近似 (approximately equal) を

$$\pi \approx 24 \left(0.07677310678 + \frac{\sqrt{3}}{32} \right) = 3.141592668...$$

と計算しました。



なぜなら、

$$\begin{aligned} y &= x^{1/2}(1-x)^{1/2} \\ &= x^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\cdots\right) \\ &= x^{1/2}-\frac{1}{2}x^{3/2}-\frac{1}{8}x^{5/2}-\frac{1}{16}x^{7/2}-\cdots \end{aligned}$$

を積分します。

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{1}{8}\frac{2}{7}x^{7/2}-\frac{1}{16}\frac{2}{9}x^{9/2}-\cdots \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{5}x^{5/2}-\frac{1}{28}x^{7/2}-\frac{1}{72}x^{9/2}-\frac{5}{704}x^{11/2}-\cdots \end{aligned}$$

が 5 項までの積分をした結果です。

ここで $x=\frac{1}{4}$ とおけば、上の図の A B D の部分を計算したことになります。 $\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2}=\frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{5/2}=\frac{1}{32}$, などとなりますから、ニュートンは 9 項までの計算をおこなって、

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{160}-\frac{1}{3584}-\cdots-\frac{429}{163208757248}=0.07677310678$$

としました。斜線部の面積はこれで計算できました。

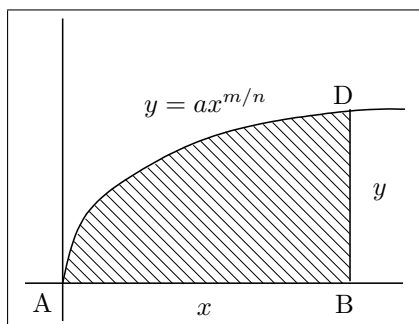
問 上の式はまだ完全ではありません。 $\frac{\sqrt{3}}{32}$ や $\frac{\pi}{24}$ という項はどの部分を計算したものでしょうか？これを最後まで進めてみて下さい。

参考文献：

Journey through Genius; W.Dunham (Penguin Books, 1990)

1 追加の事項

1.1 関数の積分



積分の計算 (原始関数):

$$\int ax^{m/n} dx = \frac{nx^{(m+n)/n}}{m+n}$$

これは領域の斜線部 ABD の面積を表します。

1.2 極形式による 2 次曲線

2 次曲線とは、(i) 楕円 (Ellipse)、特別な場合に円 (circle)、(ii) 放物線 (Parabola)、(iii) 双曲線 (Hyperbola) をいいます。円錐を切断したときでの切り口の曲線です。2 つの図 (次ページ) を参照してみてください。xy 座標の形式では、(i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, (ii) $y = ax^2$, (iii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と表します。ニュートンは、極座標形式で

$$r(\theta) = \frac{1}{1 + a \cos \theta}$$

として、この 3 つをすべての形で表しました。

a	$-\infty$	$\dots$	-1	0	1	$\dots$	∞
$r(\theta)$	双曲線		放物線	楕円 (0 は円)	放物線	双曲線	

なぜなら、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ですから、 $r = \frac{1}{1 + a \cos \theta}$ という式は、 $\sqrt{x^2 + y^2} + ax = 1$ と同じですから、 $(1 - a^2)x^2 + 2ax + y^2 = 1$ と変形できます。これを更に変形するには、場合分けが必要です。(i) もし $a^2 \neq 1$ ならば、

$$\left(x + \frac{a}{1 - a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - a^2} = \left(\frac{1}{1 - a^2}\right)^2$$

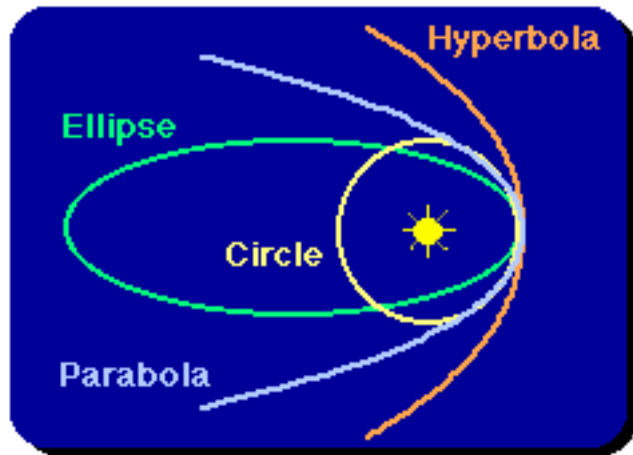
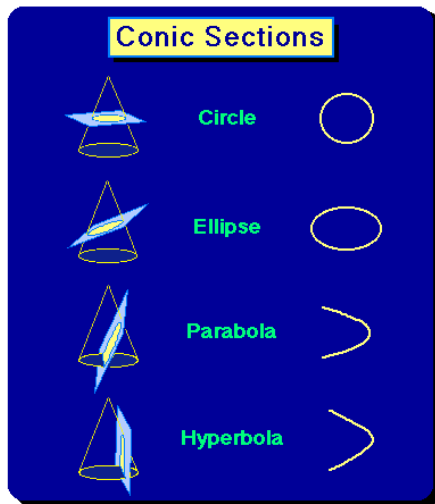
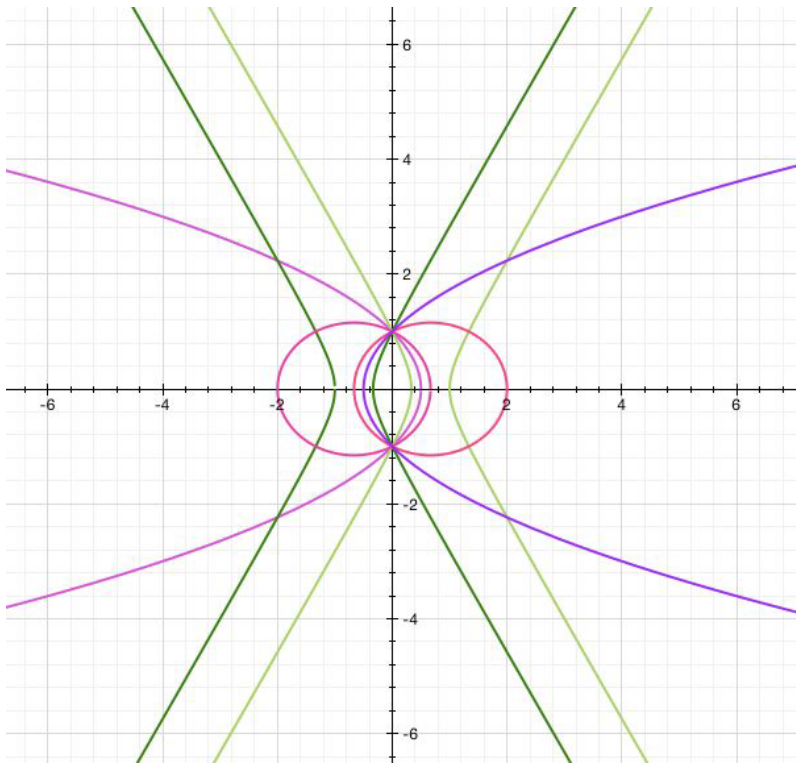
となります。これは (i-1) $a^2 > 1$ ならば、双曲線ですし、(i-2) $a^2 < 1$ ならば、楕円となります。とくに $a = 0$ は場合に含まれますし、これは円です。(ii) もし $a^2 = 1$, つまり $a = \pm 1$ ならば、 $y^2 \pm 2x = 1$ ですから、放物線 $x = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}$, または $x = \frac{-1}{2} + \frac{y^2}{2}$ を表します。

問 つぎの 6 本の曲線の式が、図に示した曲線のうちのどれになるか考えてみましょう。

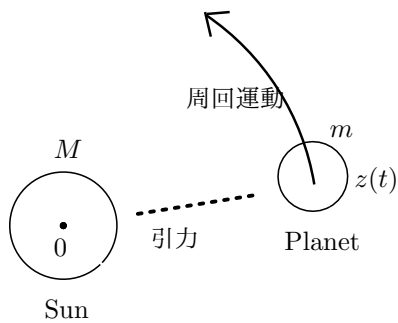
6 本の 2 次曲線 :

$$\begin{array}{lll} (1) \ r(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} & (2) \ r(\theta) = \frac{1}{1 - \cos \theta} & (3) \ r(\theta) = \frac{1}{1 + 2 \cos \theta} \\ (4) \ r(\theta) = \frac{1}{1 - 2 \cos \theta} & (5) \ r(\theta) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta} & (6) \ r(\theta) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cos \theta} \end{array}$$

つぎの 2 つの曲線は、パラメータの変化により、円錐曲線がどのように変化していくかを示しています。



万有引力の法則から、周回運動の方程式の導出：これから、ニュートンによる万有引力の法則から、惑星軌道を表す。すなわち、楕円の方程式を導いてみます。この方法も多くの読み物に書かれています。複素数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 、微分の積公式 $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ 、微分方程式の解法をもちいます。



$$f = \frac{GMm}{|z(t)|^2} \left(-\frac{z(t)}{|z(t)|} \right) = -\frac{GMm}{|z(t)|^2} z(t),$$

ニュートンの運動法則：(力=質量×加速度) $f = mz''$ より、 $z'' = -\frac{GMm}{|z(t)|^2} z$

惑星の位置 $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ とおき、2 階微分をします。積の微分公式から、関数 $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$ などと変数 t を省略しますと、

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{dz}{dt} &= \frac{d}{dt}(r e^{i\theta}) = \left(\frac{dr}{dt}\right) e^{i\theta} + r \frac{d(e^{i\theta})}{dt} = e^{i\theta} \left(\frac{dr}{dt} + ir \frac{d\theta}{dt}\right) \\ \text{(ii)} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d e^{i\theta}}{dt} \times \left(\frac{dr}{dt} + ir \frac{d\theta}{dt}\right) + e^{i\theta} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} + ir \frac{d\theta}{dt}\right) \\ &= i e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} \times \left(\frac{dr}{dt} + ir \frac{d\theta}{dt}\right) + e^{i\theta} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} + i \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + ir \frac{d^2 \theta}{dt^2}\right) \\ &= e^{i\theta} \left[\frac{d^2 \theta}{dt^2} - r \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + i \left\{ r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \right\} \right] \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{実部: } \operatorname{Re}\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = -\frac{k}{r^2} e^{i\theta} \\ \text{虚部: } \operatorname{Im}\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{実部: } e^{i\theta} \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} - r \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right) = -\frac{k}{r^2} e^{i\theta} \dots \textcircled{1} \\ \text{虚部: } e^{i\theta} \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \right) = 0 \dots \textcircled{2} \end{array} \end{aligned}$$

両方とも $e^{i\theta}$ で割って簡単にしておきます。②において、巧みなテクニックを用います。両辺に r をかけると、 $r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0$ となりますが、 $2r \frac{dr}{dt} = \frac{d(r^2)}{dt}$ と考えます。したがって、 $\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$ が得られました。微分してゼロですから、定数です。この定数を α とおけば、 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha}{r^2}$ です。この関係式を①に代入すると、 $\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{\alpha}{r^2}\right)^2 = -\frac{k}{r^2}$ 、ゆえに $\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{\alpha^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2} \dots \textcircled{3}$ となります。もともと複素数を導入した時点で奇異に感じられるかも知れませんが、複素数の虚部から、このような関係式③が得られるのも不思議な感じです。分数の形ですから、変換 $s = \frac{1}{r}$, $r = r(\theta)$ という関数でしたから、 $s(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ です。

これから $\frac{ds}{d\theta} = \frac{d(r)^{-1}}{d\theta} = (-1)r^{-2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$ をつかうと、 r の t による 1 階微分では $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{\alpha}{r^2}$ 、 $\frac{dr}{d\theta} \frac{\alpha}{r^2} = -\alpha \frac{ds}{d\theta}$ 。このように $\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{d}{d\theta}$ という関係をもちいました。またさらに微分を繰り返すと、 $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-\alpha \frac{ds}{d\theta} \right) = \frac{\alpha}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(-\alpha \frac{ds}{d\theta} \right) = \alpha s^2 \frac{d}{d\theta} \left(-\alpha \frac{ds}{d\theta} \right) = -\alpha^2 s^2 \frac{d^2 s}{d\theta^2}$ という 2 階微分を行いました。この 2 階の微分を③に代入することにより、 $-\alpha^2 s^2 \frac{d^2 s}{d\theta^2} - \frac{\alpha^2}{r^3} = -\alpha^2 s^2 \frac{d^2 s}{d\theta^2} - \alpha^2 s^3 = -ks^2$ ですか r 、結局

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = \frac{k}{\alpha^2}$$

という定数係数の 2 階非斉次（非同次）微分方程式にすることができました。この微分方程式は、「微分方程式」の初等テキストにはかならず解法が述べられています。あるいはインターネットでは定数係数の 2 階線形（線型）常微分方程式、解法など、とくにこの場合には、「調和振動子」で検索してみてください。

この解は

$$s = s(\theta) = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + \frac{k}{\alpha^2} = A \cos(\theta + \phi) + \frac{k}{\alpha^2}$$

です。第 1 項と第 2 項を単振動合成によってまとめると、定数 A , ϕ を適当に決めました。もとに戻すと、 $r = r(\theta)$ でしたから、

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{k}{\alpha^2} + A \cos(\theta + \phi)} = \frac{k/\alpha^2}{1 + \epsilon \cos(\theta + \phi)}, \quad \epsilon = A \frac{\alpha^2}{k}$$

このように目的とした 2 次曲線（楕円の方程式）の形を導くことができました。

$$r(\theta) = \frac{1}{1 + a \cos \theta}, \quad (a^2 < 1 \text{ のときは楕円})$$

分厚い翻訳本ですが、S. チャンドラセカールの「プリンキピア」講義、一般読者のために（中村誠太郎監訳、講談社、1998）があります。

ダンハムの本では、ニュートンの記述 (by W.Danham) を終えるにあたり、その締めくくり (epilog) :

Late in his life, Issac Newton look back upon his remarkable intellecture adventure and graciously acknowledge that, if he had seen farther than others, it was because he had stood on the shoulders of giants. He was, of course, thinking of Viéte, Galileo, Descartes, and other figures of heroic century. Now his own sholders would be availabel for the scholars of futer generations. in an often quated, and quite striking reflection, Newton mused:

I do not know what I may appear to the world; but to myself I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smooother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscoverd before me.

But perhaps we should leave him, finally at rest in Westminster Abbey, with this fitting epitaph:

Mortals, congratulate yourselves that so great a man has lived for the honor of the human race.
と書かれています。ニュートンの生涯とその人類への業績、今日の科学への貢献などをぜひ調べてみて味わってみてください。

(以上)