「数学と自然」 資料 N0.5 (suu015.pdf)

**ニュートンの積分**

2 項係数の展開式を一般化したばあい、ニュートンが積分の計算として用いました。積分記号で書けば

$$\int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{n\,x^{\frac{n+m}{n}}}{n+m}$$

ですが、微積分のテキストでは、$\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$，微分式では $\dfrac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ というライプニッツ流のほうが見易いかも知れません。

ニュートンのもちいた積分は、2 項係数を展開すると $x^a$ というべき乗式で関数が表れるからです。半径 1/2 で中心が $(1/2, 0)$ の上半円の面積を計算しています。$y = \sqrt{x(1-x)} = (x-x^2)^{1/2}$ ですから、2 項展開の式を適用できます。

$(a+b)^\alpha$ の形で $a = x, b = x^2, \alpha = 1/2$ として、はじめの 2，3，4 項ぐらいを計算してみてください。これを積分しますが、0 から 1 までででは半円になり、積分しなくてもいいのですが、途中の 0 から 1/4 まで、つまり、原始関数の形を計算しています。

**数列の和と積分**

微分をすることはもとの関数から、次数がひとつ減ったりしますから、積分と比べれば楽です。しかし積分はやはり難しくなります。係数のプラスとマイナスでも、かなり違った関数（原始関数）となります。ここでは数列の和（離散的な場合）について考えましょう。積分は連続関数についての概念ですが、そこには類似性が見出されます。

数列の和：

$$1+2+3+4+5+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ここまではお馴染みの式でしょう。しかしこれからより高次の場合の公式は少し計算が必要となります。昔の偉い人、関孝和などは、12 乗ぐらいを計算しているのですから驚きです。もちろん電卓の代わりには算盤ですからね。

せっかく 2 項係数の関係式を知っているので、これを用いた関係式を説明していきます。はじめは $1+2+3+4+5+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$ から出発します。分母に 2 がきているので、積をつくると 3 を分母にして、$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4 = 20 = \dfrac{60}{3} = \dfrac{3\cdot4\cdot5}{3}$, $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5 = 40 = \dfrac{120}{3} = \dfrac{4\cdot5\cdot6}{3}$, $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6 = 70 = \dfrac{210}{3} = \dfrac{5\cdot6\cdot7}{3}$. これから、$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6+\cdots+n\cdot(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} = 2\begin{pmatrix}n+2\\3\end{pmatrix}$. 両辺を 2 で割って、最尾項のひとつを取り除くと、つぎの 2 項係数の関係式が得られます。

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{n-1}{3}+\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

最初は 2 から出発しますが、$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0$ ですから、書きません。さらに進めば、2 個ずつの積を 3 個ずつにすれば、

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\cdots+\binom{n-1}{3}+\binom{n}{3} = \binom{n+1}{4}$$

が成り立つことを推察することは難しくはありません。どんどんしていくと、$\begin{pmatrix}n-1\\n-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n\\n-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n+1\\n\end{pmatrix}$ ですから、“1” + “$n$” = “$n+1$” となった詰まらない式になってしまいました。

ここの目的は和の積分との関連ですが、得られた式は、増加乗積

$$k^{[r]} = \overbrace{k(k+1)(k+2)\cdots(k+r-2)(k+r-1)}^{r}$$

をもちいるならば、$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 5\cdot 6 + \cdots + n\cdot(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ の式は

$$1^{[2]} + 2^{[2]} + 3^{[2]} + 4^{[2]} + 5^{[2]} + \cdots + n^{[2]} = \frac{n^{[3]}}{3}$$

となります。Σ (シグマ) 記号で書くと、$r = 2, 3, 4, \cdots$ で成り立ちますから

$$\sum_{k=1}^{n} k^{[r]} = 1^{[r]} + 2^{[r]} + 3^{[r]} + 4^{[r]} + 5^{[r]} + \cdots + n^{[r]} = \frac{n^{[r+1]}}{r+1}$$

となり、よく知られたベキ関数の積分公式 (積分定数は省略)；

$$\int x^r\, dx \;=\; \frac{x^{r+1}}{r+1}$$

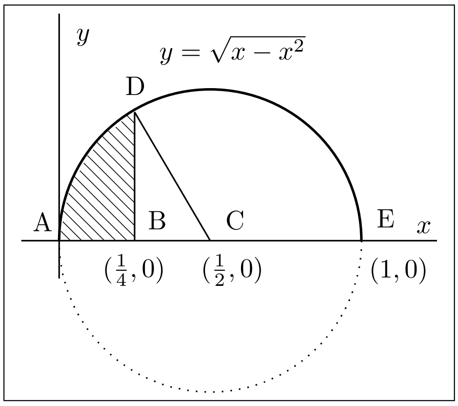
と比べて、類似性が感じられるはずです。

**$\pi$ の近似計算**

ニュートンは一般化した 2 項係数の展開式を積分することで, 円周率 $\pi$ の近似 (approximately equal) を

$$\pi \approx 24\left(0.07677310678 + \frac{\sqrt{3}}{32}\right) = 3.141592668...$$

と計算しました。




なぜなら、

$$\begin{aligned} y &= x^{1/2}(1-x)^{1/2} \\ &= x^{1/2}(1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots) \\ &= x^{1/2} - \tfrac{1}{2}x^{3/2} - \tfrac{1}{8}x^{5/2} - \tfrac{1}{16}x^{7/2} - \cdots) \end{aligned}$$

を積分します。

$$\begin{aligned} &\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{5}x^{5/2} - \tfrac{1}{8}\tfrac{2}{7}x^{7/2} - \tfrac{1}{16}\tfrac{2}{9}x^{9/2} - \cdots \\ &= \tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{5}x^{5/2} - \tfrac{1}{28}x^{7/2} - \tfrac{1}{72}x^{9/2} - \tfrac{5}{704}x^{11/2} - \cdots \end{aligned}$$

が 5 項までの積分をした結果です。

ここで $x = \dfrac{1}{4}$ とおけば、上の図のＡＢＤの部分を計算したことになります。$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3/2} = \dfrac{1}{8}$, $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{5/2} = \dfrac{1}{32}$, などとなりますから、ニュートンは 9 項までの計算をおこなって、

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{160} - \frac{1}{3584} - \cdots \frac{429}{163208757248} = 0.07677310678$$

としました。斜線部の面積はこれで計算できました。

**問** 上の式はまだ完全ではありません。$\dfrac{\sqrt{3}}{32}$ や $\dfrac{\pi}{24}$ という項はどの部分を計算したものでしょうか？これを最後まで進めてみて下さい。

参考文献：


Journey through Genius; W.Dunham (Penguin Books, 1990)