

数列のいろいろ

どんな数列 (numerical sequence) を知っていますか？ たとえば、 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ と自然数と対応させると、まさに自然数の上に定められた関数が数列です。 $n = 1$ を初項 (first term), $n = 2$ を第2項 (second), $n = 3$ を第3項 (third), と続いて、 n 番目が a_n となり、これを一般項 (general term) といい、 n の値を指定されると、その値 a_n が決まります。関数が値 x に対して、数値 $f(x)$ が対応することと同じと考えられます。

たとえば、 $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1$ と続いていけば、一般項 $a_n = (-1)^n$ と表すことができます。

漸化式 (recurrence relation) とは、いままで以前の数列の値から、帰納的に定められる関係をいいます。

たとえば、 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ であれば、過去の2項から現在の値を定めています。うさぎの番 (つがい) の増殖過程を表現するとして、有名なフィボナッチ (Fibonacci) 数列です。 $a_1 = 1, a_2 = 1$ から始めて、 $a_3 = 2, a_4 = 3, \dots$ ですから、

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	143	232

連分数でつかったすべての項が1であれば、 $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$ と $p_{n-1} = 1 \cdot p_{n-1} + 0 \cdot p_{n-2}$ から、ベクトルと行列をもちいた漸化式

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ p_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} p_{n-2} \\ p_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} p_{n-3} \\ p_{n-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} p_{n-4} \\ p_{n-5} \end{pmatrix}$$

ですから、初項 $\begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\dots$

★行列の積: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot d_2 & a_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot d_2 \\ b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot d_1 & b_1 \cdot c_2 + b_2 \cdot d_2 \end{pmatrix}$

★行列式: $\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

問. n 乗したときに表れる行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ の要素がフィボナッチ項の何番目かを推定して、確認をしてみよう。

数列とそのつくる関数

$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ とベキ関数 (x^n) を組み合わせる方法があります。数列と関数の対応関係をつかって調べるものです。たとえば、

$$\begin{array}{cccccc} \{a_n\} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \{x^n\} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \end{array} \rightarrow f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

と $f(x)$ を定めます。これを生成するという意味で、母関数とよびます。

簡単な数列として、 $\{1, 1, 1, \dots\}$ を考えれば、 $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$ ですから、これは幾何級数とよばれ、 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ となります。収束とか発散とは考えず、強引にでも力づくで計算します。

この形で x のかわりに $x+x^2$ を代入してみてください。 $f(x+x^2) = 1 + (x+x^2) + (x+x^2)^2 + (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 + \dots$ ですから、各項を2項展開してみましょう。パスカル三角形での係数を $\{1, 1\}$, $\{1, 2, 1\}$, $\{1, 3, 3, 1\}$, $\{1, 4, 6, 4, 1\}$ などです。係数を整理してみると、フィボナッチ数列がでできます。また $f(x+x^2) = \frac{1}{1-x-x^2}$ ですから、この関数を展開したものが、フィボナッチ数列の母関数ということです。

整数ではない 2 項係数

自然数 $r = 1, 2, \dots$ から、 $\binom{q}{r} = \frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-r+1)}{r!}$ と定義します。もし $q = n$ が正の整数であれば、 $\binom{n}{r} = \begin{cases} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} & \text{if } r = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{if } r = n+1, n+2, n+3, \dots \end{cases}$ となります。パスカル三角形といわれるように横に並んだ 2 項係数は r を大きくするとゼロになるからです。つぎはニュートンの微積に関する部分で与えられた式を現在流に書いたものです。

$$(1+a)^q = 1 + qa + \binom{q}{2}a^2 + \binom{q}{3}a^3 + \binom{q}{4}a^4 + \cdots$$

積分 $\int_0^1 x^{1/p} dx = \frac{1}{1/p+1}$, $\int_0^1 x^{2/p} dx = \frac{1}{2/p+1}$, $\int_0^1 x^{3/p} dx = \frac{1}{3/p+1}$, などを利用すれば、

$$\frac{1}{\binom{p+q}{p}} = 1 - q\frac{p}{1+p} + \binom{q}{2}\frac{p}{2+p} - \binom{q}{3}\frac{p}{3+p} + \binom{q}{4}\frac{p}{4+p} + \cdots$$

が成り立ちます。

例. $\int_0^1 (1-x^{1/4})^3 dx = \frac{1}{35}$ 被積分関数を展開してから積分します。この例では、 $p = 4$, $q = 3$ の場合です。 $\binom{3}{4} = \binom{3}{5} = \cdots = 0$ を使えば、

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x^{1/4})^3 dx &= 1 - 3 \cdot \frac{4}{1+4} + \binom{3}{2} \frac{4}{2+4} - \binom{3}{3} \frac{4}{3+4} + 0 + 0 + \cdots \\ &= 1 - 3 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{4}{6} - \frac{4}{7} \\ &= \frac{1}{35} = \frac{1}{\binom{7}{3}} = \frac{3!}{7 \cdot 6 \cdot 5} \end{aligned}$$

が得られます。公式流に書けば、 p, q が自然数であれば、

$$\int_0^1 (1-x^{1/p})^q dx = \frac{p!}{(q+1)(q+2)(q+3)\cdots(q+p)} = \frac{1}{\binom{p+q}{p}} = \frac{p!q!}{(p+q)!}$$

ここに実は、パイ (π) が含まれる場合があります。 p, q を分数にしますが、 $p = q = 1/2$ であれば、積分は $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ となりますが、単位円の上半部分の半分で、円を 4 等分したひとつの領域の面積ですから、 $\frac{\pi}{4}$ に等しくなります。積分の計算が多くて、手ごわいかもしれません。強引に階乗の記号をもちいるならば、 $\frac{(\frac{1}{2})! (\frac{1}{2})!}{(1/2+1/2)!} = \left(\frac{1}{2}\right)!^2 = \frac{\pi}{4}$ ですから、 $(\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ という整数ではない半数の階乗を計算したということになります。これは、ベータ関数に伴って表れる計算です。

問. インターネットなどで、「ベータ関数 (Beta function)」、「ガンマ関数 (Gamma function)」を調べてみましょう。これらは決して易しい積分ではありません。微分積分の言葉では、広義積分とか特異積分などの項目で取り扱われます。

2 項展開の別の拡張: r を自然数として、 $a_{(r)} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-r+1)$ と定めます。たとえば、 $5_{(3)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ で、いままででは順列 (permutation) $_a P_r$ と習ってきました。このとき、つぎの関係式が成り立ちます。

$$\begin{aligned} (a+b)_{(2)} &= (a+b)(a+b-1) = (a)_2 + 2ab + (b)_2 \\ (a+b)_{(3)} &= (a+b)(a+b-1)(a+b-2) = (a)_3 + 3(a)_2 b + 3a(b)_2 + (b)_3 \end{aligned}$$

この関係式の意味することを講義時に解説します。